

Theoretical Question 1

달은 언제 동기 위성이 되는가?

현재 달의 자전주기는 공전주기와 일치 하기 때문에 달은 항상 같은 면을 지구 쪽으로 향하고 있다. 이 두 주기가 같은 것은 지구-달 계에 지속적으로 작용한 기조력에 의한 결과이다.

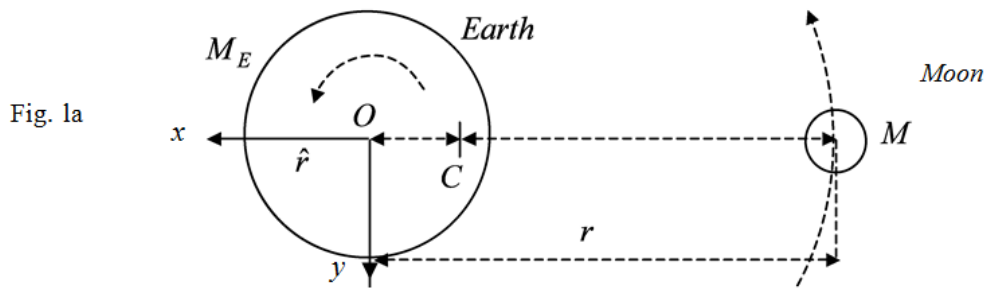
그러나 현재, 지구의 자전주기는 공전주기보다 짧다. 그 결과, 달에 의한 기조력에 의한 영향으로 지구의 자전이 느려지고, 지구와 달 사이 거리가 멀어지게 된다.

이 문제에서 우리는 지구의 자전주기와 공전주기가 같아지는데 얼마나 많은 시간이 걸릴지 예상하는 것이다. 이렇게 되면 달은 하늘에 고정된 물체처럼 보이는 동기 위성이 되며, 지구에서 달이 향하고 있는 면에 사는 사람들만 달을 볼 수 있다. 또한, 두 주기가 일치할 때, 지구가 자전을 한 번 하는데 걸리는 시간도 구할 것이다.

두 개의 오른손 좌표계가 기준 좌표계로 이용될 것이다. 두 좌표계의 세번째 축은 서로 평행하고, 달의 공전궤도면에 수직하다.

(I) CM 좌표계라 불리는 첫번째 좌표계는 원점이 지구-달 계의 질량중심 C 인 관성좌표계이다.

(II) xyz 좌표계라 불리는 두번째 좌표계는 원점이 지구의 중심 O 이다. 이 좌표계의 z 축은 지구의 자전축과 일치하며, x 축은 지구와 달의 중심을 잇고 Fig. 1a 에 표시된 단위벡터 $\hat{r}$ 방향이다. 이 좌표계에서 달은 항상 음의 x 축에 위치한다.



주어진 데이터:

- (a) 현재 지구와 달 사이 거리는 $r_0 = 3.85 \times 10^8$ m이고, 일년에 0.038 m 씩 증가하고 있다.
- (b) 현재 달의 공전주기는 $T_M = 27.322$ days이다.
- (c) 달의 질량은 $M = 7.35 \times 10^{22}$ kg이다.
- (d) 달의 반지름은 $R_M = 1.74 \times 10^6$ m이다.
- (e) 현재 지구의 자전주기는 $T_E = 23.933$ hours이다.
- (f) 지구의 질량은 $M_E = 5.97 \times 10^{24}$ kg이다.
- (g) 지구의 반지름은 $R_E = 6.37 \times 10^6$ m이다.
- (h) 만유인력 상수는 $G = 6.67259 \times 10^{-11}$ N · m²/kg²이다.

문제에 답할 때 다음의 가정들을 사용할 수 있다.

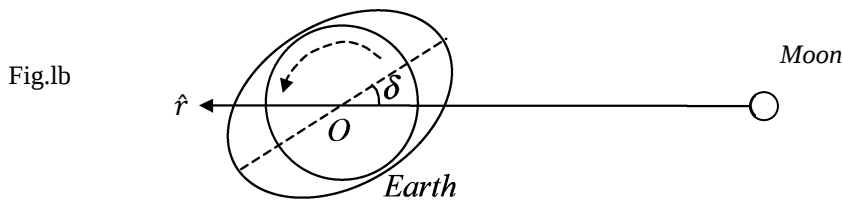
- (i) 지구-달 계는 주위와 고립되어 있다.
- (ii) 달의 공전궤도는 원이다.
- (iii) 지구의 자전축은 달의 공전궤도면과 수직하다.
- (iv) 만약 달이 존재하지 않고, 지구가 돌지 않는다면, 지구의 질량 분포는 구형 대칭이고 반지름은 R_E 이다.
- (v) 지구와 달에 대해서, 각각의 중심을 지나는 임의의 축에 대한 관성모멘트 I 는 질량 M , 반지름 R 인 구와 동일하다. 즉, $I = \frac{2}{5}MR^2$ 이다.
- (vi) 지구를 감싸고 있는 물은 xyz 좌표계에서 정지해 있다.

다음 문제들에 답하라:

- (1) 질량중심 C 에 대한 지구-달 계의 현재 전체 각운동량 L 의 값을 구하시오.
- (2) 지구의 자전주기와 달의 공전주기가 같아졌을 때, 지구가 한 번 자전하는데 걸리는 시간을 구하시오. 구하는 시간을 T 라 하고, 현재의 하루를 단위로 해서 나타내시오. 근사적인 해만 요구되므로, 반복을 이용한 방법을 사용할 수 있다.
- (3) 지구를 물 층으로 덮여있는 회전하는 강체구라고 생각하고, 달이 지구 주위를 돌 때, xyz 좌표계에서 물층 정지해 있다고 가정하시오. 이 모델에서는 회전하는 강체구와 물층 사이의 마찰력을 고려한다. 더 빨리 회전하는 강체 지구는 달에 의한 조석을 끌어서 Fig.1b 에서처럼 물이 튀어나온 부분을 이은 직선이 x 축과 각도 δ 를 이루도록 한다. 그 결과, 지구에 작용하는 달의 기조력은 O 에 대해서 토크 τ 를 작용해서 지구의 자전이 느려지게 만든다.

각도 δ 는 달의 공전이 지구의 자전과 동기화 되어 마찰력이 존재하지 않아 없어지기 전에는 일정하고, 지구와 달 사이 거리 r 에 의존하지 않는다고 가정한다. 따라서 토크 τ 는 지구와 달 사이의 거리에 따라 크기가 달라지며 $\frac{1}{r^6}$ 에 비례한다.

이 모형에서 지구의 자전주기와 달의 공전주기가 같아지는 데는 얼마나 걸리는가? 구하는 답을 t_f 라 하고 현재 1년을 단위로 해서 나타내시오.



다음 수학 공식들은 문제에 답을 할 때 유용할 것이다:

$$(M1) \quad 0 \leq s < r, x = s \cos \theta \text{ 일 때, } \frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rx}} \approx \left(\frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} + \frac{3x^2 - s^2}{2r^3} + \dots \right) \text{ 이다.}$$

$$(M2) \quad a \neq 0, \frac{d\omega}{dt} = b\omega^{1-a} \text{ 이면, } \omega^a(t') - \omega^a(t) = (t' - t)ab \text{ 이다.}$$

Theoretical Question 2

자기장 내에서 전기 쌍극자의 운동

균일하고 일정한 자기장 $\vec{B}$ 가 있을 때, 전하로 이루어진 계의 병진 운동은 회전 운동과 묶여있게 된다. 그 결과, 운동량과 $\vec{B}$ 방향 각운동량의 성분에 대한 보존 법칙은 일반적인 형태와 달라지게 된다. 이는 이 문제에서 동일한 질량 m 과 각각 전하량 $q, -q (q > 0)$ 를 가지고 있는 두 전하로 이루어진 전기 쌍극자의 운동을 고려함으로써 알 수 있게 된다. 두 입자는 무시 가능한 질량을 가진 길이 l 의 단단한 절연 막대로 연결되어 있다. $\vec{r}_1$ 을 전하량이 q 인 입자의 위치 벡터, $\vec{r}_2$ 가 다른 입자의 위치 벡터, $\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 라 하자. 쌍극자의 질량 중심에 대한 회전 각속도를 $\vec{\omega}$ 라 하자. $\vec{r}_{CM}, \vec{v}_{CM}$ 은 각각 질량 중심의 위치와 속도라고 하자. 상대론적 효과와 전자기파 방사는 무시할 수 있다.

속도 $\vec{v}$ 로 움직이고 있는 전하량이 q 인 입자에 작용하는 자기력은 $q\vec{v} \times \vec{B}$ 이며, 두 벡터의 외적 $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$ 의 x, y, z 성분은 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_x &= (\vec{A}_1)_y (\vec{A}_2)_z - (\vec{A}_1)_z (\vec{A}_2)_y \\ (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_y &= (\vec{A}_1)_z (\vec{A}_2)_x - (\vec{A}_1)_x (\vec{A}_2)_z \\ (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_z &= (\vec{A}_1)_x (\vec{A}_2)_y - (\vec{A}_1)_y (\vec{A}_2)_x \end{aligned}$$

(1) 보존 법칙

- (a) 쌍극자에 작용하는 알짜 힘과 질량중심에 대한 알짜 토크를 계산함으로써 쌍극자의 질량중심과 질량중심에 대한 회전에 관한 운동 방정식을 구하라.
- (b) 질량중심에 대한 운동 방정식에서 **바뀐** 형태의 운동량 보존 법칙을 구하라. 바뀐 형태의 보존량을 $\vec{P}$ 라 하자. 보존되는 에너지 E 를 $\vec{v}_{CM}, \vec{\omega}$ 로 나타내시오.
- (c) 각운동량은 두 가지 항으로 구성되어 있다. 하나는 질량중심의 운동, 다른 하나는 질량중심에 대한 회전 운동에 의한 것이다. 바뀐 형태의 총 운동량 보존 법칙과 질량중심에 대한 회전에 관한 운동 방정식으로부터 아래와 같이 정의되는 양 J 는 **보존됨**을 증명하시오.

$$J = (\vec{r}_{CM} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \vec{B}$$

임의의 세 벡터 $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ 에 대해 다음이 성립함을 명심하라.

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= -\vec{A}_2 \times \vec{A}_1 \\ \vec{A}_1 \cdot (\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) &= (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3 \\ \vec{A}_1 \times (\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) &= (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_3)\vec{A}_2 - (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2)\vec{A}_3 \end{aligned}$$

위에 있는 공식들을 계속 적용하면 보존 법칙을 유도하는 데 유용할 것이다.

아래 문제에서는 $\vec{B}$ 가 z 방향을 향한다고 한다.

(2) $\vec{B}$ 에 수직한 평면상에서의 운동

초기에 쌍극자의 질량중심이 원점에 정지해있고, $\vec{l}$ 은 x 축 방향을 가리키고 있으며, 쌍극자의 초기 각속도는 $\omega_0 \hat{z}$ 라 하자. ($\hat{z}$ 는 z 방향 단위벡터이다.)

- (a) ω_0 의 크기가 임계값 ω_e 보다 작으면, 쌍극자는 질량중심에 대해 1 바퀴를 다 못 돌게 된다. ω_e 를 구하시오.
- (b) 일반적으로 $\omega_0 > 0$ 인 경우, 질량중심이 x 축 방향으로 가는 최대 거리 d_m 은 얼마인가?
- (c) 막대의 장력은 얼마인가? 각속도 ω 의 함수로 나타내시오.

Theoretical Question 3

표면 원자의 열적 진동

이 문제에서는 면심입방구조(fcc)의 금속 결정에서 표면 원자들의 열적 진동을 탐구한다. Fcc의 단위 세포는 Fig. 3a에서 보듯이 각 꼭짓점과 각 면의 중심에 원자가 있다. 우리가 고려하는 격자에서는 각 세포에서 x , y , z 축의 원자의 좌표를 각각 $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$ 라고 하자. 격자 상수 a 는 $3.92 \text{ \AA}$ 이다. 즉, 한 변의 길이가 $3.92 \text{ \AA}$ 이다.

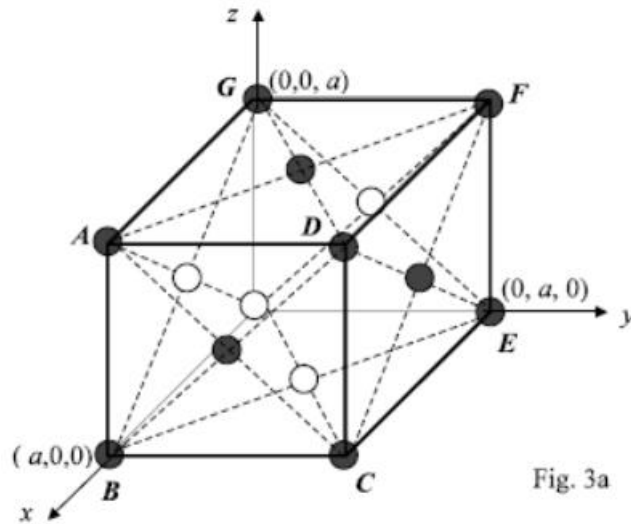


Fig. 3a

- (1) 저에너지 전자 회절 실험을 위해 ABCD를 포함하는 평면이 경계면이 되도록 결정을 잘랐다. 운동 에너지가 64.0 eV 인 조준된 전자빔이 입사각 ϕ_0 이 15.0° 가 되도록 평면에 입사하였다. ϕ_0 는 입사한 전자와 자른 단면의 법선이 이루는 각임을 명심하라. $\overline{AC}$ 와 단면의 법선을 포함하는 평면이 입사면이다. 편의를 위해, 모든 입사한 전자들은 가장 위에 있는 면의 표면 전자들에 의해 후방산란되었다고 가정하자.
 - (a) 입사하는 전자들의 물질파 파장은 얼마인가?
 - (b) 회절 이후, 입사면에서 벗어나지 않는 전자를 검출하기 위한 검출기가 설치되었을 때, 법선과 얼마의 각도를 이루는 곳에서 회절된 전자들을 관측할 수 있겠는가?
- (2) 표면 원자의 열적 진동이 단진동이라고 가정하자. 진동의 진폭은 온도가 높을수록 증가한다. 저에너지 전자 회절은 진동의 평균 진폭을 측정할 수 있는 방법이다. 회절된 빔의 세기 I 는 1 초당 산란되는 전자 수에 비례한다. 세기 I 와 표면 원자의 변위 $\vec{u}(t)$ 사이의 관계는 다음과 같다.

$$I = I_0 \exp\{-\langle [\vec{K}' - \vec{K}] \cdot \vec{u} \rangle^2\} \quad (1)$$

Eq. (1)에서 I, I_0 는 각각 온도 T 와 절대 영도에서의 세기이다. $\vec{K}, \vec{K}'$ 는 각각 입사한 전자와 회절된 전자의 파수 벡터이다. $\langle \rangle$ 는 시간 평균을 나타낸다. 입사의 파수 벡터 $\vec{K}$ 와 운동량 $\vec{p}$ 사이의 관계는 $\vec{K} = 2\pi\vec{p}/h$ 임을 명심하라. 여기서 h 는 플랑크 상수이다.

금속 결정에서 표면 원자의 진폭을 측정하기 위해 운동 에너지가 64.0 eV 인 조준된 전자빔이 입사각 ϕ_0 이 15.0° 가 되도록 평면에 입사하였다. 검출기는 반사된 전자 중 특정

전자만을 검출하도록 설치되었다. 탄성 충돌한 전자만 검출되었다고 하자. Fig. 3b 에 온도 T에 따른 $\ln(I/I_0)$ 의 그래프가 그려져 있다.

진동하는 원자의 표면의 법선 방향인 $\hat{x}$ 방향 총 에너지는 $k_B T$ 라 하자. 여기서 k_B 는 볼츠만 상수이다.

(a) 표면 원자의 법선 방향 진동의 진동수를 계산하시오.

(b) 300 K 에서 표면 원자의 법선 방향의 rms 변위, 즉 $(\langle u_x^2 \rangle)^{1/2}$ 를 계산하시오.

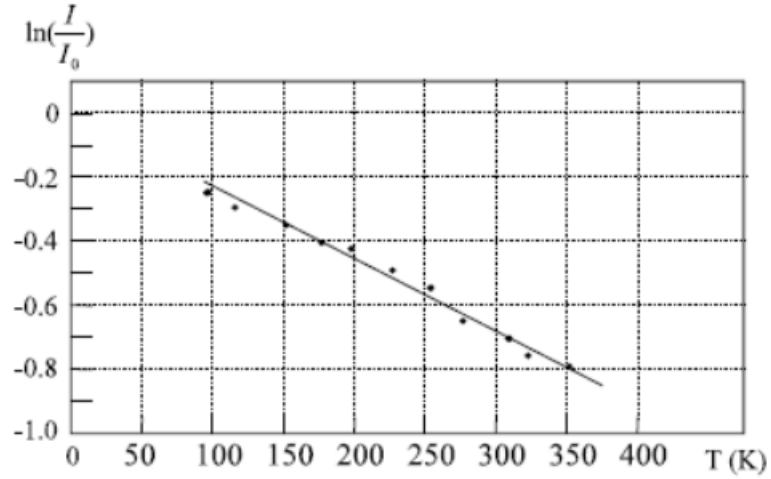


Fig. 3b

아래의 데이터가 주어졌다:

금속의 원자량 $M = 195.1$

볼츠만 상수 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

전자의 질량 $= 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

전자의 전하량 $= 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$

플랑크 상수 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$