

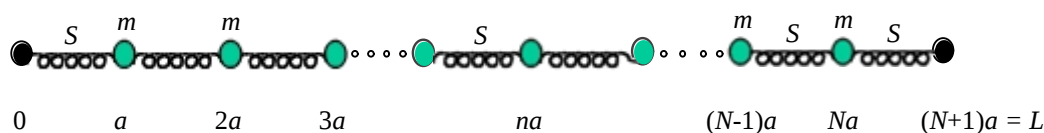
제 3회 APhO
싱가포르
이론 시험
2002년 5월 8일 수요일

아래 내용을 먼저 읽으시오:

1. 시험은 5시간 동안 진행된다. 총 3문제가 있다.
2. 주어진 펜만 사용하시오.
3. 주어진 용지의 앞면만 사용하시오. X표가 있는 면은 사용하지 마시오.
4. 각 문제의 답은 다른 종이에 적어야 한다.
5. 각 문제에 대해서 사용 가능한 **빈 연습지** 외에 얻은 결과들을 요약해야 하는 **답안지**가 있다. **수치값은 주어진 데이터에 맞도록 유효숫자 개수를 맞춰야 한다. 단위를 써야 한다는 것을 잊지 마라.**
6. 문제 풀이에 필요하다고 생각되거나 채점 받고 싶은 내용은 빈 연습지에 적으시오. 최대한 수식, 숫자, 기호, 그림을 많이 이용하시오. 글자는 가능한 적게 적으시오.
7. 사용한 모든 종이의 위에 **국가와 학생 번호**를 입력하시오. 각 문제마다 사용한 연습지에 **문제 번호, 각 종이의 번호**, 문제마다 사용하고 채점 받고 싶어하는 **총 연습지의 개수**를 적으시오. 사용한 연습지의 첫 부분에 문제 번호와 해당되는 section의 이름을 적는 것이 유용하다. 만약 채점 받고 싶지 않는 연습지가 있다면, 종이 전체에 큰 X표를 그리고 종이 개수에 포함하지 마시오.
8. 시험이 끝나면 모든 용지를 다음 순서로 정리하시오. 각 문제마다 답안지를 맨 위에, 그 다음에 사용한 연습지, 그 다음으로는 채점 받고 싶지 않는 연습지를 놓으시오. 사용하지 않은 연습지와 문제지는 가장 아래에 두시오. 각 문제에 해당되는 종이들을 맞는 문제 번호가 적힌 봉투에 넣고, 책상 위에 모든 것을 놓고 가시오. 시험장 밖으로 어떤 종이도 가지고 나갈 수 없습니다.

이론 문제 1 (선형 결정 격자의 진동)

매우 많은 개수 N 의 ($N \gg 1$) 움직일 수 있는 질량 m 의 동일한 점 입자가 $N+1$ 개의 직선 체인에 있고, 이들은 서로 용수철 상수 S 의 질량이 없는 동일한 용수철을 통해 연결되어 있으며 끝의 입자는 두 개의 움직일 수 없는 입자에 부착되어 있다. 그림을 참고하시오. 이 체인은 1차원 결정에 대해 진동 모드를 알아보는 모델로 이용될 것이다. 체인이 운동할 때, 체인의 종 방향 진동은 모드라고 불리는 고유 진동수를 가진 단순 진동의 중첩으로 볼 수 있다.



(a) n 번째 입자의 운동 방정식을 구하시오. [0.7 점]

(b) 파트 (a)에서 구한 운동 방정식을 풀기 위해 아래 시험해를 쓰자.

$$X_n(\omega) = A \sin nka \cos (\omega t + \alpha)$$

여기서 $X_n(\omega)$ 는 n 번째 입자의 평형 위치로부터 변위, ω 는 진동 모드의 각진동수, A, k, α 는 상수이다. k, ω 는 각각 파수와 모드의 진동수이다. 각각의 k 에 대해 대응되는 ω 가 있다. ω 가 k 에 어떻게 의존하는지, k 의 허용된 값, ω 의 최대값을 구하시오. 체인의 진동은 이 모든 진동 모드의 중첩이다. 유용한 공식들:

$$(d/dx) \cos \alpha x = -\alpha \sin \alpha x, (d/dx) \sin \alpha x = \alpha \cos \alpha x, \alpha = \text{constant}$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

[2.2 점]

플랑크에 의하면 진동수가 ω 인 광자의 에너지는 $\hbar\omega$ 이며, 여기서 $\hbar$ 는 플랑크 상수를 2π 로 나눈 것이다. 아인슈타인은 여기서 더 나아가 진동수 ω 인 진동 모드도 같은 에너지를 가진다고 가

정하였다. 진동 모드는 입자가 아니라, 전체 체인의 단순 진동 형태라는 것을 명심하라. 이 진동 모드는 광자와 유사한 점이 있고, 포논이라고 불린다. 우리는 이제 남은 문제들에서 이 아이디어의 결과를 따라갈 것이다. 결정은 직선 체인에 있는 매우 많은 ($\sim 10^{23}$) 원자들로 이루어져 있다고 가정하자.

- (c) 주어진 허용된 ω (또는 k)에 대해 포논은 임의의 개수만큼 존재할 수 있다. 이는 진동수 ω 인 특정 진동 모드의 평균 에너지 $\langle E(\omega) \rangle$ 를 계산하는 것을 가능하게 한다. $P_p(\omega)$ 는 진동수 ω 에 포논이 p 개 존재할 확률이라고 하자. 그렇게 되면 원하는 평균값은 다음과 같다.

$$\langle E(\omega) \rangle = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p \hbar \omega P_p(\omega)}{\sum_{p=0}^{\infty} P_p(\omega)}$$

포논은 이산적이지만 그 수가 매우 많고, 큰 p 에 대해서 P_p 가 매우 작으므로 무시할 수 있는 오차 수준에서 $p = \infty$ 까지 더할 수 있도록 해준다. 확률 P_p 는 볼츠만 분포에 의해서 다음과 같다.

$$P_p(\omega) \propto \exp(-p \hbar \omega / k_B T)$$

여기서 k_B 는 볼츠만 상수, T 는 결정의 절대온도이며 일정하다고 가정한다. 비례상수는 p 에 의존하지 않는다. 진동수 ω 인 포논들의 평균 에너지를 계산하시오. 아마도 유용할 공식: $(d/dx) e^{f(x)} = (df/dx) e^{f(x)}$

[2 점]

- (d) 우리는 이제 결정의 전체 에너지 E_T 를 계산할 것이다. 파트 (c)에서 우리는 진동수가 ω 인 진동 모드의 평균 에너지 $\langle E(\omega) \rangle$ 를 계산하였다. E_T 를 구하기 위해서 우리는 $\langle E(\omega) \rangle$ 에 단위 진동수 ω 당 모드의 수를 곱한 뒤, $\omega = 0$ 에서 $\omega_{\max}$ 까지 모두 더해야 한다. 가능한 파수 범위에서 Δk 의 구간을 잡자. N 이 매우 크고 연속된 허용된 k 값 사이의 간격보다 Δk 가 훨씬 작은 경우, 구간 Δk 에서 발견될 수 있는 모드의 수는 얼마인가?

[1 점]

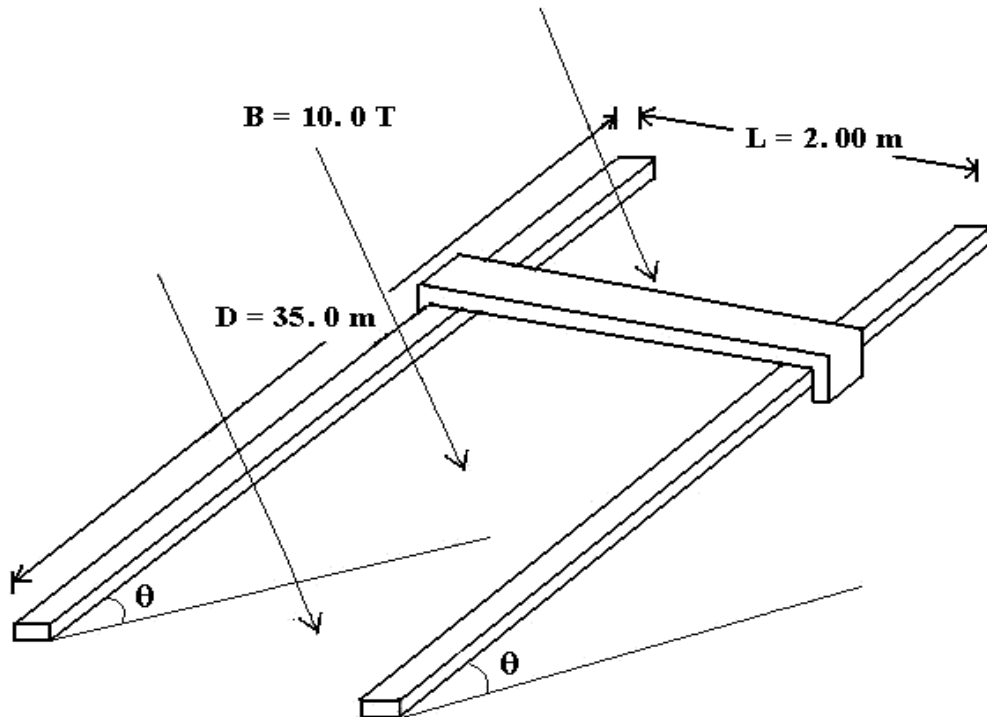
(e) (a)와 (b)에서 얻은 결과를 이용하기 위해, Δk 를 $(dk/d\omega)d\omega$ 로 근사하고 더하는 것을 ω 에 대한 적분으로 바꾸어라. (이제부터는 변수를 k 보다는 ω 로 쓰는 것이 더 편하다.) 이 근사를 적용하였을 때 총 모드 수를 구하시오. 또한, E_T 에 대한 표현을 구하되, 계산하지는 마시오. 다음 적분이 유용할 것이다: $\int_0^1 dx/\sqrt{1-x^2} = \pi/2$ [2.2 점]

(f) 결정의 등적 몰 열용량 C_V 는 다음과 같다: $C_V = dE_T/dT$ (T 는 절대 온도) 우리가 고려한 결정에서 매우 높은 온도와 매우 낮은 온도에서 C_V 의 T 에 대한 의존성을 결정하여라. (예를 들어, 상수인지, 또는 구간 내에서 온도에 대해 선형 아니면 거듭제곱인지 결정하여라.) 매우 높고, 낮은 온도에서의 경향을 나타내는 $C_V - T$ 그래프를 정성적으로 작성하시오. [1.9 점]

이론 문제 2 (레일건)

P에 있는 준태와 Q에 있는 상커는 깊은 사랑에 빠져있다. 이 두 장소 사이에는 폭 $w = 1000\text{ m}$ 의 도랑이 있다. 수업에서 레일건에 관련된 이론을 배운 준태는 도랑을 넘기 위해 자신을 발사하는 장치를 만들기로 하였다. 그는 경사각 θ 를 바꿀 수 있는 경사로를 만들어서 $L = 2.00\text{ m}$ 만큼 떨어져 있는 평행한 두 개의 금속 레일을 놓았다. (각 레일의 길이는 $D = 35.0\text{ m}$ 이다.) 그는 레일의 끝에 2424 V DC 전원 공급 장치를 연결하였다. 준태가 막대가 레일에서 미끄러질 때 안전하게 매달릴 수 있도록 전도체 막대가 금속 레일에서 자유롭게 미끄러지도록 설치되어있다.

한 기술 좋은 공학자 판호는 레일이 있는 평면에 수직한 방향으로 $B = 10.0\text{ T}$ 를 만들 수 있는 장치를 제작하였다. 준태의 질량은 70 kg 이다. 전도체 막대의 질량은 10 kg 이고, 저항은 $R = 1.0\ \Omega$ 이다.





준태는 제작을 마치고 정상 작동하는지 확인하자마자 그는 상커로부터 Q에 11초 내로 오지 못하면 그녀의 아버지 학수가 그녀를 돈 많은 현민에게 시집보내려고 한다는 전화를 받았다.

준태는 바로 도량을 넘어 Q로 자신을 발사하였다.

아래 과정들을 통해서 그가 시간 내에 도착하는 것이 가능한지 여부와 가능하다면 θ 의 범위가 어때야 하는지를 구하여라.

(a) 레일에 평행한 방향으로 준태의 가속도에 대한 표현을 구하여라. [3 marks]

(b) 다음 위치에서 소요되는 시간을 θ 의 함수로 구하여라.

- i. 레일 위에서, t_s
- ii. 공중에서, t_f

[3 marks]

(c) 총 시간 $T = t_s + t_f$ 를 경사각 θ 의 함수로 그려라.

[1.5 marks]

(d) 이 장치의 관련된 변수 값들을 고려해서, 그가 설정해야 하는 경사각의 범위를 구하여라. 필요하다면 다른 그래프를 그려라. [2.5 marks]

다음 가정을 사용하라:

- 1) 전화가 끝난 시점과 모든 준비(θ 를 설정하는 등)를 결정하는 시점 사이의 소요 시간은 무시 가능하다. 이는 $t = 0$ 에 준태가 매달려 있는 상태로 막대가 움직이기 시작할 때, 발사가 시작되는 것으로 본다는 얘기이다.
- 2) 준태는 금속 레일의 임의의 위치에서 발사를 시작할 수 있다.
- 3) 경사면의 높은 쪽 끝과 Q는 같은 높이에 위치하며, 둘 사이 거리는 $w = 1000$ m이다.
- 4) 착륙이나 감전 등에 관한 안전 사항은 고려하지 않는다.
- 5) 금속 레일의 저항, 전원 공급 장치의 내부 저항, 전도체 막대와 레일 사이의 마찰력, 공기 저항은 모두 무시 가능하다.
- 6) 중력가속도는 $g = 10 \text{ m/s}^2$ 로 하자.

Some Mathematical notes:

1. $\int e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a}$

2. $\frac{dx}{dt} = a + bx$ 의 해는 $x(t) = \frac{a}{b}(e^{bt} - 1) + x(0)e^{bt}$ 이다.

이론 문제 3 (웨이퍼 제작)

웨이퍼 제작은 실리콘으로 반도체 칩을 만드는 것이다. 현대 기술에는 적어도 20개의 단계가 있다. 우리는 그 중 얇은 막 침적 과정에 집중할 것이다.

웨이퍼 제작 과정에서 다양한 물질들은 실리콘 웨이퍼 표면에 얇은 막의 형태로 침적된다. 침적 과정을 진행하기 전, 표면은 매우 깨끗해야 한다. 산소나 다른 원소의 존재는 오염된 층을 형성할 수 있다. 이 층의 형성 속도는 기체 분자가 표면을 때리는 단위 시간당 충돌 횟수에 의해서 결정된다. 단위 부피당 기체 분자의 개수를 n 이라고 하면, 단위 면적당 단위 시간당 충돌 횟수는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{4} n \bar{v}$$

여기서 $\bar{v}$ 는 기체 분자의 평균 속력이다.

(a) 기체 분자들이 맥스웰-볼츠만 분포를 따른다고 가정하자.

$$W(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-Mv^2/(2RT)}$$

여기서 $W(v)dv$ 는 속력이 v 와 $v + dv$ 사이인 분자의 비율이며, M 은 기체의 몰 질량, T 는 기체의 온도, R 은 기체 상수이다. 기체의 평균 속도는 다음과 같음을 보여라.

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v W(v) dv = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

[1.5 marks]

(b) 기체들이 낮은 압력 P 에서 이상기체처럼 거동한다고 가정하자. 단위 시간당 충돌 횟수는 다음과 같음을 보여라.

$$J = \frac{P}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

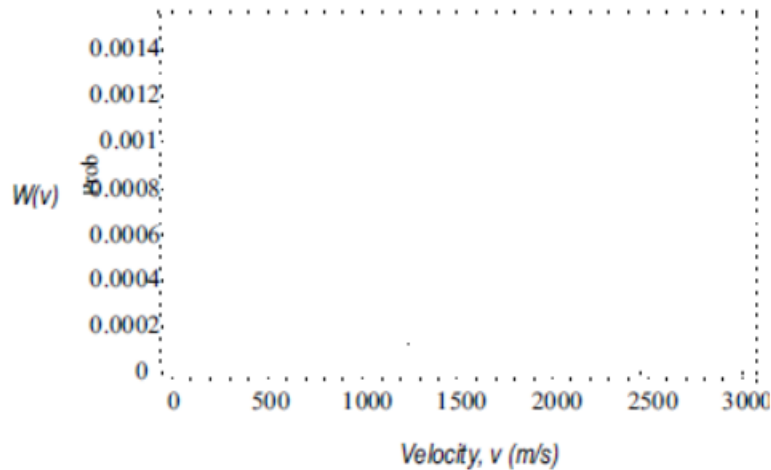
여기서 m 은 기체 분자의 질량, T 는 기체의 온도이다.

[1.5 marks]

- (c) 진공 상태에서 산소의 잔류 압력이 133 Pa이고, 산소 분자를 반지름이 약 3.6×10^{-10} m 인 구라고 가정하면, 300 °C에서 단분자의 산소 층이 침적되는데 얼마나 걸릴지 추정하시오. 실리콘 웨이퍼에 충돌하는 모든 산소 분자는 침적된다고 가정하시오. 또한, 산소 층의 산소 분자들은 서로 붙어있는 상태로 정렬 되었다고 가정하시오.

[1.7 marks]

- (d) 실제로는 모든 산소 분자가 실리콘과 반응하는 것은 아니다. 이는 반응하는 분자들이 반응을 하기 위해 가져야 할 총 에너지인 활성화 에너지 개념을 이용해서 알아볼 수 있다. 물리적으로 이 활성화 에너지는 실리콘과 산소 사이의 새로운 결합이 형성되기 위해서는 실리콘 원자 사이 화학 결합이 끊어져야 한다는 것을 의미한다. 반응에 필요한 활성화 에너지가 1 eV라고 가정하고, 위에서 언급한 온도에서 단분자 산소 층이 침적되는데 걸리는 시간을 추정하시오. 파트 (a)의 맥스웰 분포 아래쪽의 면적이 1이라는 것을 이용할 수 있다.



[2.8 marks]

- (e) 이 과정에서 깨끗한 실리콘 웨이퍼는 굴절률 $\mu = 1.40$ 인 투명한 고분자 (photo-resist) 층으로 고르게 코팅된다. 이 층을 두께를 측정하기 위해 조준된 파장 $\lambda = 589 \text{ nm}$ 단색 평면광이 웨이퍼를 비춘다. 특정한 photo-resist 층의 최소 두께 d 에 대해 빛이 면에 수직하게 입사하는 경우, 반사광에서 상쇄 간섭이 일어난다. d, μ, λ 사이의 관계를 유도하시오. 주어진 데이터를 이용해서 d 를 계산하시오. 이 문제에서 실리콘은 굴절률이 1.40보다 큰 매질로 가정할 수 있으며 다중 반사는 무시한다.

[2.5 marks]

다음 데이터가 유용할 것이다:

산소의 몰 질량은 32 g mol^{-1} 이다.

볼츠만 상수, $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

아보가드로 수, $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

유용한 공식: $\int x^3 e^{-kx^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-kx^2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{x^2}{k} \right)$

Name :

3rd APHO

국가:	문제 번호:	채점자 전용
학생 번호:	페이지 번호: 총 페이지 수:	

종이의 이쪽 면만 사용하시오.

답안지: 이론 문제 1 (선형 격자 결정의 진동)

(a) n 번째 입자의 운동 방정식:

(b) 체인의 진동 모드의 각진동수는 다음 식에 의해 주어진다:

파수 k 의 허용된 값은 다음과 같다:

ω 의 최댓값:

(c) 진동수가 ω 인 포논의 평균 에너지는 다음과 같다:

(d) 파수 구간 Δk 에는 얼마나 많은 허용된 모드가 있는가?

(e) 격자의 총 모드 수:

격자의 총 에너지 E_T 는 다음 식으로 주어진다:

(f) C_V – 절대 온도 T 그래프는 아래와 같다.

$T \ll 1$ 에서 C_V 는 다음과 같은 의존성을 보인다:

$T \rightarrow \infty$ 일 때, C_V 는 다음과 같은 의존성을 보인다:

Name :

3rd APHO

국가:	문제 번호:	채점자 전용
학생 번호:	페이지 번호: 총 페이지 수:	

종이의 이쪽 면만 사용시오.

답안지: 이론 문제 2 (레일건)

- a) 레일과 평행한 방향의 준태의 가속도

$dv/dt =$

- b) 소요된 시간을 구하시오.

- a. 레일에서 소요된 시간, t_s

$t_s =$

- b. 공중에서 소요된 시간, t_f

$t_f =$

- c) (채점자가 풀이에 있는 표의 값과 그래프를 참조할 것이다.)

- d) 각도 범위:

Name :

3rd APHO

국가:	문제 번호:	채점자 전용
학생 번호:	페이지 번호: 총 페이지 수:	

종이의 이쪽 면만 사용하시오.

답안지: *이론 문제* 3 (웨이퍼 제작)

(c) 한 층을 침적하기 위해 필요한 시간

(d) 새로 구한 한 층 침적에 걸리는 시간:

(e) d, λ 사이의 관계:

d 의 값: