

이론 시험 – 문제 1

무중력 상태에서 질량 측정하기

지구를 중심으로 돌고 있는 우주선 안은 무중력 상태이기 때문에 우주인의 무게를 측정한 뒤 질량을 알아내는 일반적인 장치를 사용할 수 없다. Skylab 2와 몇몇 다른 우주선들은 용수철의 한 쪽 끝에 붙어있는 의자로 이루어진 체 질량 측정 장비를 탑재하고 있다. 용수철의 다른 쪽 끝은 우주선의 고정된 점에 붙어있다. 용수철의 축은 우주선의 질량중심을 지나간다. 용수철의 용수철 상수는 $k = 605.6 \text{ N/m}$ 이다.

1. 우주선이 고정되어 있을 때, (사람이 타지 않은) 의자는 주기 $T_0 = 1.28195 \text{ s}$ 로 진동한다.

의자의 질량 m_0 를 계산하시오. [2 점]

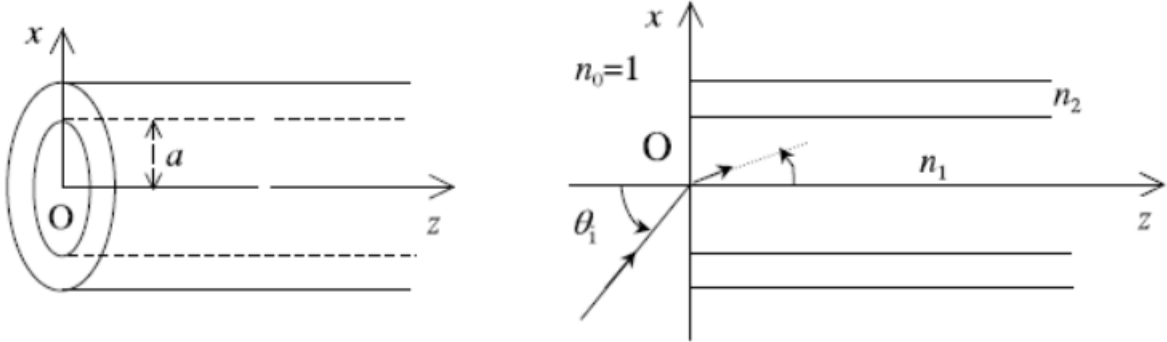
2. 우주선이 지구 주위를 돌고 있을 때, 우주선은 자기 자신을 의자에 묶고 의자 진동의 주기 T' 을 측정한다. 그는 $T' = 2.33044 \text{ s}$ 라는 값을 얻고, 그의 질량을 대략적으로 계산한다. 그는 약간의 의심을 품고 그의 질량의 참값을 찾으려고 노력한다. 그는 (사람이 타지 않은) 의자의 진동 주기를 다시 특정하고 $T_0' = 1.27395 \text{ s}$ 임을 알아낸다.

우주인 질량의 참값과 우주선의 질량은 각각 얼마인가? [4 점]

참고: 용수철의 질량은 무시 가능하며 우주인은 떠 있는 상태이다.

이론 시험 – 문제 2

광섬유



광섬유는 반지름 a 의 축에서부터 거리 a 로 갈 수록 굴절률이 $n = n_1$ 에서 $n = n_2$ 로 ($1 < n_2 < n_1$) 점차 변하는 투명한 물질로 이루어진 원통형 코어로 이루어져 있다. 굴절률은 아래 관계를 따라서 변한다.

$$n = n(x) = n_1 \sqrt{1 - \alpha^2 x^2}$$

여기서 x 는 코어 축으로부터 거리, α 는 상수이다. 코어는 굴절률이 n_2 로 일정한 물질로 구성된 클래딩으로 둘러싸여있다. 섬유 밖은 굴절률 n_0 의 공기이다.

O는 섬유 끝의 중심, Oz는 섬유의 축이라 하자.

$n_0 = 1.000, n_1 = 1.500, n_2 = 1.460, a = 25 \mu\text{m}$ 임이 주어져 있다.

1. 단색 평면광이 점 O에서 입사각 θ_i 로 광섬유에 입사하며, 입사면은 평면 xOz이다.

a. 광섬유 내부 빛의 경로 상에 있는 각 점에 대해 굴절률 n 과 광선과 Oz 축 사이의 각도 θ 사이에는 $n \cos \theta = C$ 라는 관계가 성립하며, 여기서 C 는 상수이다. C 를 n_1, θ_i 로 나타내시오. [1.0 점]

b. 1.a.에서 알아낸 결과와 삼각함수 사이의 관계 $\cos \theta = (1 + \tan^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}$ 을 이용해서 x' 에 대한 식을 유도하시오. 여기서 $\tan \theta = \frac{dx}{dz} = x'$ 은 점 (x, z) 에서 경로에 접하는 직선의 기울기이다. α 를 n_1, n_2, a 로 완전하게 표현하시오. 앞에서 구한 식의 양변을 z 로 미분함으로써 이계도함수 x'' 에 대한 식을 구하시오. [1.0 점]

c. 위의 식을 만족시키는 x 를 z 의 함수로 나타내는 표현, 즉 $x = f(z)$ 를 구하시오. 이것은 광섬유 내부 빛이 경로를 나타내는 식이다. [1.0 점]

d. 광섬유를 서로 다른 두 입사각 θ_i 를 가지고 입사하는 광선들에 대해 하나의 완전한 주기 동안의 경로를 그리시오. [1.0 점]

2. 빛이 광섬유 내부에서 진행한다.

a. 빛이 광섬유 코어 내부에서 계속 진행하는 최대 입사각 θ_{iM} 을 구하시오. [1.5 점]

b. $\theta_i \neq 0$ 일 때, 경로가 Oz 축과 교차하는 점의 z 좌표에 대한 표현을 구하시오. [1.5 점]

3. 빛은 (무시 가능한 폭의) 매우 짧은 펄스 형태로 신호를 전달하기 위해 사용된다.

a. 입사각이 $\theta_i \neq 0, \theta_i \leq \theta_{iM}$ 일 때, 빛이 점 O로부터 Oz와 처음으로 만나는 점까지 진행되는 데 걸리는 시간 τ 를 계산하시오.

첫 번째 교차점의 z좌표와 τ 사이의 비는 광섬유를 따라 이동하는 광 신호의 전파 속력이라고 부른다. 이 속력이 θ_i 에 따라 단조적으로 변한다고 가정하자.

(v_M 이라 불리는) 이 속력을 $\theta_i = \theta_{iM}$ 일 때에 대해 계산하시오.

(v_0 라 불리는) 빛이 축 Oz를 따라 진행하는 속력을 계산하시오.

두 속력을 비교하시오.

[3.25 점]

b. 신호가 담겨있는 광선은 점 O에 $0 \leq \theta_i \leq \theta_{iM}$ 이고 서로 다른 입사각 θ_i 를 가지고 수렴하는 광선이다. 거리 $z = 1000$ m에서 두 개의 연속된 펄스가 분리된 상태 (즉, 두 펄스가 겹치지 않는) 가 되기 위한 펄스 신호의 최대 반복 진동수를 계산하시오.

[1.75 점]

중요

1. 빛의 파동성은 이 문제에서 고려하지 않는다.

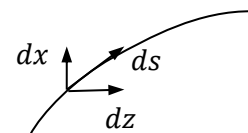
2. 광섬유의 색 분산은 무시한다.

3. 진동에서 광속은 $c = 2.998 \times 10^8$ m/s이다.

4. 아래 식들을 사용할 수 있다.

- xOz 평면에서 작은 곡선 요소의 길이 ds 는 아래와 같다.

$$ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$$



- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \text{Arc sin } \frac{bx}{a}$

- $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2b^2} + \frac{a^2 \text{Arc sin } \frac{bx}{a}}{2b^3}$

- $\text{Arc sin } x$ 는 사인 함수의 역함수이다. 이 함수의 값은 사인 값이 x 인 각 중 더 작은 값이다. 다른 말로, $y = \text{Arc sin } x$ 이면 $\text{sin } y = x$ 이다.

이론 시험 – 문제 3

두 가지 기체로 이루어진 계의 압축과 팽창

실린더가 움직일 수 있는 분리막 NM 에 의해 두 부분으로 나누어져 있다. 왼쪽 부분은 실린더의 벽과 분리막 NM 에 의해 막혀있다. (Figure 1) 이 부분은 1 몰의 수증기를 포함하고 있다. 오른쪽 부분은 분리막 NM 과 움직일 수 있는 피스톤 AB 에 의해 막혀있다. 이 부분은 1 몰의 질소 (N_2) 기체를 포함하고 있다.

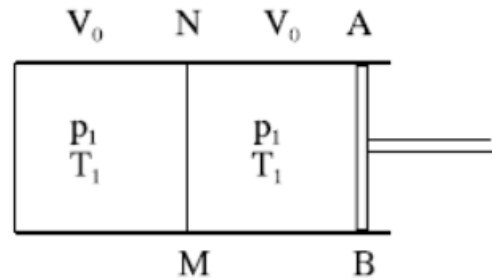


Figure 1

처음에 양쪽 부분에 있는 기체의 부피와 온도는 동일하다. 분리막 NM 은 열 전도성이 좋다. 분리막의 열용량은 매우 작으므로 무시할 수 있다.

액체 상태의 물이 차지하는 부피는 같은 온도, 같은 양의 수증기가 차지하는 부피에 비해 무시 가능한 수준이다.

증발열 L 은 단위 질량의 물질은 액체 상태에서 같은 온도의 기체 상태로 변환하는데 필요한 열로 정의된다. 물의 경우 $T_0 = 373\text{ K}$ 에서 $L = 2250\text{ kJ/kg}$ 이다.

1. 피스톤과 실린더 벽이 열 전도성이 좋고, 분리막 NM 이 마찰 없이 미끄러질 수 있다고 가정하자. 실린더 안의 기체들의 초기 상태는 다음과 같다:

압력 $P_1 = 0.5\text{ atm}$, 총 부피 $V_1 = 2V_0$, 온도 $T_1 = 373\text{ K}$

피스톤 AB는 정준적인 등온 과정을 따라 천천히 기체를 압축하면서 최종 부피가 $V_F = V_0 / 4$ 가 되도록 한다.

a. $P(V)$ 곡선을 그리시오. 이 곡선은 온도 T_1 의 두 기체의 총 부피 V 에 따른 압력 P 의 의존성을 나타낸다. 곡선에서 중요한 점들의 좌표를 계산하시오. [1.5 점]

기체 상수: $R = 8.31\text{ J/mol} \cdot \text{K}$ 또는 $R = 0.0820\text{ L} \cdot \text{atm/mol} \cdot \text{K}$

$1\text{ atm} = 101.3\text{ kPa}$

압력 $P_0 = 1\text{ atm}$ 에서 물은 온도 $T_0 = 373\text{ K}$ 에서 끓는다.

b. 기체가 압축되는 과정에서 피스톤이 한 일을 계산하시오. [1.0 점]

$$\int \frac{dV}{V} = \ln V$$

c. 이 과정에서 외부에서 전달된 열을 계산하시오. [1.5 점]

2. 분리막 NM과 실린더 벽 사이에 마찰이 있다는 것을 제외하면 1. 와 모든 조건이 동일하다. 마찰 때문에 분리막의 두 면에 작용하는 압력의 차이가 0.5 atm 이상일 때만 움직인다고 가정하자. (정지 마찰 계수와 운동 마찰 계수는 동일하다고 가정하자.)

- a. 일정한 온도 T_1 에서 오른쪽 부분의 압력 P 를 두 기체의 총 부피 V 의 함수로 나타내는 $P(V)$ 곡선을 그리시오. [1.5 점]
- b. 기체를 압축할 때 피스톤이 한 일을 계산하시오. [0.5 점]
- c. 기체의 부피가 $V_F = V_0 / 4$ 가 되었을 때, 피스톤 AB는 서서히 오른쪽으로 움직이면서 정준적인 등온 과정에 따라 두 물질(물과 질소) 모두 초기 부피 $2V_0$ 로 팽창시킨다. 문제 2.a의 도표에 이 과정을 나타내는 곡선을 이어서 그리시오.

2번을 위한 힌트

아래와 같은 표를 만들고 문제 2.a와 2.c.에서 요구된 곡선을 그리는데 이용하시오.

상태	왼쪽 부분 부피 압력		오른쪽 부분 부피 압력		총 부피	피스톤 AB에 작용하는 압력
초기	V_0	0.5 atm	V_0	0.5 atm	$2V_0$	0.5 atm
2						
3						
.						
.						
.						
.						
.						
최종					$2V_0$	

3. 실린더의 벽과 피스톤이 열을 전달하지 않는 물질이고, 분리막 NM은 고정되어 있으며 열 전도가 가능하며, 기체들의 초기 상태는 1과 동일하다고 하자. 피스톤 AB는 오른쪽으로 서서히 움직이면서 왼쪽 부분의 물이 응결되기 시작할 때까지 오른쪽 부분의 부피를 증가시킨다.

- a. 오른쪽 부분의 최종 부피를 계산하시오. [3 점]

- b. 이 팽창 과정에서 기체가 한 일을 계산하시오. [1 점]

질소의 등압 열용량과 등적 열용량의 비 $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ 는 $\gamma_1 = \frac{7}{5}$ 이며, 물은 $\gamma_2 = \frac{8}{6}$ 이다.

온도 구간 353 K에서 393 K까지 아래 근사적인 식을 사용할 수 있다:

$$P = P_0 \exp \left[-\frac{\mu L}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

여기서 T 는 압력 P 하에서 물의 끓는점, μ 는 물의 몰 질량이며 P_0 , L , T_0 는 앞에서 주어졌다.