

이론 문제 1

원자의 레이저 냉각

이 문제에서 우리는 레이저를 이용한 원자의 냉각 메커니즘을 고려할 것이다. 이 분야의 연구는 온도가 낮은 원자들로 이루어진 양자 기체의 성질을 이해하는 데에 있어 많은 진전이 이루어지게 하였으며 1997년과 2001년에 노벨상을 받은 분야이다.

이론적 배경

바닥 상태의 에너지가 E_g , 들뜬 상태의 에너지가 E_e 인 간단한 두 준위 모델의 원자를 생각하자. 에너지 차는 $E_g - E_e = \hbar\omega_0$ 이며, 레이저의 각진동수는 ω , 레이저의 이조(진동수 차이)는 $\delta = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$ 이다. 모든 원자의 속력은 $v \ll c$ 라고 가정하며, 여기서 c 는 빛의 속력이다. v/c , δ/ω_0 와 같은 크기가 작은 변수는 항상 1차까지만 계산하면 된다. 자발적 붕괴에 의한 들뜬 상태 E_e 의 에너지 폭은 $\gamma \ll \omega_0$ 이다. 즉, 들뜬 상태에 있는 원자에 대해 단위 시간 당 바닥 상태로 돌아갈 확률이 γ 라는 것이다. 원자가 바닥 상태로 돌아갈 때, 임의의 방향으로 진동수가 ω_0 근방인 광자를 방출한다.

양자역학에 의해 원자가 약한 세기의 레이저에 쏘이게 되면 단위 시간 당 원자를 들뜨게 할 수 있는 확률은 원자의 정지 좌표계에서 레이저의 진동수 ω_a 에 다음과 같이 의존한다.

$$\gamma_p = s_0 \frac{\gamma/2}{1 + 4(\omega_a - \omega_0)^2 / \gamma^2} \ll \gamma$$

여기서 $s_0 \ll 1$ 은 원자의 성질과 레이저의 세기에 의존하는 인자이다.

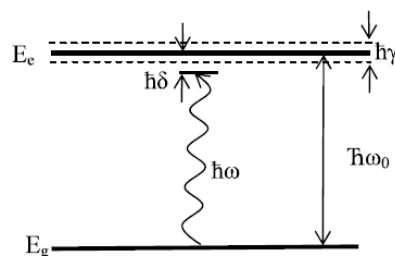


Fig 1. Note that shown parameters are not in scale.

이 문제에서 나트륨 원자들로 이루어진 기체의 성질을 탐구할 때는 원자 간의 상호작용을 무시한다. 레이저의 세기는 충분히 약해서 들뜬 상태에 있는 원자의 수는 바닥 상태에 있는 것보다 훨씬 작다. 또한 중력도 무시할 수 있으며, 실제 실험에서 이는 자기장을 걸어줌으로써 해결할 수 있다.

수치 값들

플랑크 상수	$\eta = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
볼츠만 상수	$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
나트륨 원자의 질량	$m = 3.81 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$
사용되는 전이의 진동수	$\omega_0 = 2\pi \cdot 5.08 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$
들뜬 상태의 폭	$\gamma = 2\pi \cdot 9.80 \cdot 10^6 \text{ Hz}$
원자의 밀도	$n = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$

문제

- a) [1 점] 원자가 양의 x 방향의 속도 v_x 를 가지고 움직이며 진동수 ω 의 레이저는 음의 x 방향으로 진행한다고 하자. 원자의 정지 좌표계에서 레이저의 진동수는 얼마인가?
- b) [2.5 점] 원자가 양의 x 방향의 속도 v_x 를 가지고 움직이고 있고, 동일한 두 레이저 빔이 x 방향을 따라 서로 다른 방향에서 비춘다고 하자. 레이저의 진동수는 ω , 레이저 세기 변수는 s_0 이다. 원자에 작용하는 평균 힘 $F(v_x)$ 에 대한 표현을 구하시오. 작은 v_x 에 대해 이 힘은 $F(v_x) = -\beta v_x$ 로 쓸 수 있다. β 에 대한 표현을 구하시오. 원자의 속력이 감소한다면 $\delta = \omega - \omega_0$ 의 부호는 무엇인가? 원자의 운동량이 광자의 운동량보다 훨씬 크다고 가정하시오.

이후 문제에서 우리는 원자의 속도가 충분히 작아 평균 힘에 대한 선형 근사식을 사용할 수 있다고 가정한다.

- c) [2.0 점] 만약 양과 음의 x, y, z 총 6개의 방향에서 레이저를 쏘면, $\beta > 0$ 인 경우 원자에는 저항력이 작용하며 평균 에너지가 감소하게 된다. 이 말은 곧 평균 에너지를 통해 정의되는 기체의 온도가 감소한다는 의미이다. 위에서 주어진 원자의 밀도를 사용해서 양자적인 효과 때문에 원자를 점 입자로 볼 수 없게 되는 온도 T_Q 를 수치적으로 추정하시오.

이후 문제에서 우리는 온도가 T_Q 보다 훨씬 높으며 파트 c)에서 설명한 것처럼 x, y, z 방향을 따라 6개의 레이저가 사용된다고 가정한다.

파트 b)에서 우리는 원자에 작용하는 평균 힘을 계산했다. 하지만, 광자의 양자적인 특성 때문에 각 흡수 및 방출 과정에서 원자의 운동량은 반동 과정에 의해 임의의 방향으로 특정 이산적인 값을 가지고 변하게 된다.

- d) [0.5 점] 한 번의 흡수 또는 방출 과정으로 인한 원자의 운동량 변화의 제곱 $(\Delta p)^2$ 을 수치적으로 결정하시오.
- e) [3.5 점] 반동 효과에 의해 충분한 시간이 지난 후 기체의 평균 온도는 절대 영도가 되지 않고 특정 유한한 값으로 수렴하게 된다. 원자의 운동량의 변화는 단계 당 변화량 $\sqrt{\langle \Delta p^2 \rangle}$ 을 가지고 운동량 공간에서 random walk를 하면서 저항력에 의해 냉각되는 것으로 생각할 수 있다. 정상 상태의 온도는 두 가지 다른 과정의 복합적인 영향에 의해 결정된다. 정상 상태의 온도 T_d 는 다음과 같은 형태임을 보여라:

$$T_d = \eta \gamma \left(x + \frac{1}{x} \right) / (4k_B). \quad x \text{ 를 결정하시오. } T_d \text{ 가 } \langle \Delta p^2 \rangle / (2k_B m) \text{ 보다 훨씬 크다고 가정하시오.}$$

참고사항: 벡터 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ 가 서로 통계적으로 독립이면 그들의 합의 제곱 평균값은 다음과 같다.

$$\langle (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n)^2 \rangle = \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + \dots + \mathbf{P}_n^2$$

- f) [0.5 점] 반동 효과에 의해 가능한 최소 온도의 값을 수치적으로 구하시오. 어떠한 δ / γ 값에 대해 이 온도가 가능해 지는가?

이론 문제 2

미끄럼 마찰에 의해 감쇠되는 진동자

이론적 배경

역학에서 우리는 계의 모든 질점들의 좌표와 운동량(또는 속도)가 축인 가상적인 공간인 위상 공간을 많이 사용한다. 위상 공간의 점은 이미징 포인트라고 불린다. 각 이미징 포인트는 계의 특정 상태를 결정한다.

역학적인 계가 변화를 겪게 되면 대응되는 이미징 포인트도 위상 궤적이라 불리는 위상 공간의 특정 궤적을 따라가게 된다. 위상 궤적에서 변화의 방향을 나타내기 위해 화살표를 사용할 수도 있다. 주어진 역학계의 가능한 모든 위상 궤적들을 모두 모은 것을 계의 위상 portrait 라고 한다. 이 위상 portrait 를 분석하면 계의 중요한 정성적인 동역학적 성질들을 운동 방정식을 명시적으로 풀지 않고 알 수 있게 된다. 많은 경우에서 이 위상 공간의 사용은 역학 문제를 푸는데 가장 적합한 방법이다.

이 문제에서 우리는 계의 자유도가 1, 즉 계의 운동이 하나의 좌표로만 기술되는 계를 분석하기 위해 위상 공간을 사용할 것이다. 이 경우 위상 공간은 이차원 평면이다. 위상 궤적은 이 평면 위의 운동량의 좌표에 대한 의존성에 의해 결정되는 곡선이며, 또한 반대로 좌표의 운동량에 대한 의존성에 의해서도 결정된다.

예시로 다음은 x 축을 따라 양의 방향으로 움직이는 자유 입자의 위상 궤적이다. (Fig.1)

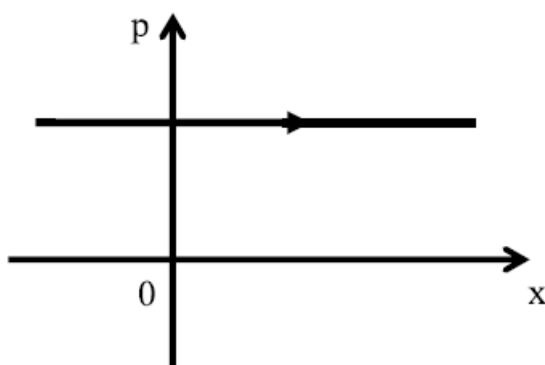


Fig. 1. Phase trajectory of a free particle.

문제

A. 위상 Portraits (3.0)

A1. [0.5 점] $x = -L/2$ 와 $x = L/2$ 에 위치한 완벽히 반사하는 두 개의 평행한 벽 사이에서 자유롭게 움직이는 물질의 위상 궤적을 그리시오.

A2. 조화 진동자, 즉 질량이 m 인 질점이 훅의 법칙 $F = -kx$ 을 따르는 힘을 받을 때의 위상 궤적을 그리시오.

a) [0.5 점] 위상 궤적의 식과 매개변수들을 구하시오.

b) [0.5 점] 조화 진동자의 위상 궤적을 그리시오.

A3. [1.5 점] 질량이 m 인 질점이 질량이 없는 길이 L 의 한쪽이 고정된 강체 막대에 연결되어 있다. (중력가속도는 g 이다.) 막대와 연직선 사이의 각도 α 를 계의 좌표로 쓰는 것이 편리하다. 위상 평면은 좌표가 $(\alpha, d\alpha/dt)$ 인 평면이다. 임의의 각 α 에서의 이 진자의 위상 portrait 를 탐구하고 그리시오. 이 계는 몇 가지의 정성적으로 다른 위상 궤적 K 를 가지는가? 각 경우에 대해 적어도 하나씩의 전형적인 궤적을 그리시오. 이렇게 다른 종류의 위상 궤적을 결정하는 조건을 찾으시오. (평형점은 위상 궤적으로 보지 마시오.) 공기 저항은 무시한다.

B. 미끄럼 마찰에 의해 감쇠되는 진동자 (7.0)

운동에서 저항을 고려할 때, 우리는 보통 두 가지 종류의 마찰력을 다룬다. 하나는 저항력으로, 속도에 의존하며(점성 마찰) $F = -\gamma v$ 로 정의된다. 예시로는 기체나 액체 내에서 물체의 운동이다. 다른 하나는 마찰력으로, 속력에 의존하지 않는다. 이는 $F = \mu N$ 로 정의되며, 접촉하고 있는 물체의 상대 속도의 반대 방향으로 작용한다. (미끄럼 마찰) 예시로는 물체가 다른 물체의 표면 위에서 운동하는 것이다.

두 번째 경우의 좀 더 구체적인 예시로, 한쪽 끝이 고정된 용수철에 달려 있는 물체가 수평 평면 상에 있는 상황을 고려하자. 물체의 질량은 m , 용수철 상수는 k , 물체와 표면 사이 마찰 계수는 μ 이다. 물체는 좌표 x 를 가지고 일직선 상에서 움직인다. ($x=0$ 은 용수철이 늘어나지 않은 상태이다.) 정지 마찰 계수와 운동 마찰 계수는 동일하다고 가정하자. 처음 물체의 위치는 $x = A_0$ ($A_0 \gg 0$) 이고 정지해 있다.

B1. [1.0 점] 미끄럼 마찰에 의해 감쇠되는 조화 진동자의 운동 방정식을 적으시오.

B2. [2.0 점] 이 진동자의 위상 궤적을 그리고 평형점들을 찾으시오.

B3. [1.0 점] 물체가 용수철이 늘어나지 않는 위치에 정확히 멈추는 것이 가능한가? 만약 아니라면, 물체가 멈출 수 있는 범위의 길이를 구하시오.

B4. [2.0 점] 한 번의 진동 동안 양의 x 방향으로의 최대 변위의 감소량 ΔA 를 계산하시오. 연속된 두 번의 양의 방향 최대 변위에 도달한 시점 사이의 시간은 얼마인가? t_n 이 n 번째 양의 방향 최대 변위에 도달한 시간일 때, 최대 변위 $A(t_n)$ 을 구하시오.

B5. [1.0 점] 시간에 따른 좌표의 의존성, $x(t)$ 를 그림으로 그리고, 물체의 진동 횟수 N 을 추정하시오.

참고사항:

반경이 a, b 이고 중심이 원점이 타원의 방정식은 아래와 같다:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

이론 문제 3

이 문제는 연관되지 않은 4 개의 파트로 이루어져 있다.

- A. [2.5 점] 태평양의 마리아나 해구의 깊이는 $H = 10920 \text{ m}$ 이다. 바다의 표면에서 바닷물의 밀도는 $\rho_0 = 1025 \text{ kg/m}^3$, 부피 탄성률은 $K = 2.1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, 중력가속도는 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 이다. 깊이에 따른 온도와 중력가속도의 변화, 대기압은 무시하시오.

A1) 깊이 x 에서 밀도 $\rho(x)$ 와 압력 $P(x)$ 사이의 관계를 구하시오.

A2) 마리아나 해구 바닥에서의 압력 $P(H)$ 의 수치값을 계산하시오. 이 문제를 풀기 위해 연차근사를 사용할 수 있다.

참고사항: 유체는 매우 작은 압축성을 가진다. 압축성 상수는 다음과 같이 정의된다.

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_{T=\text{const}}$$

부피 탄성률 K 는 κ 의 역수이다: $K = 1/\kappa$

- B. [2.5 점] 가벼운 움직일 수 있는 피스톤이 용기를 두 부분으로 나누고 있다. 용기는 주위로 고립되어 있다. 하나의 부분은 $m_1 = 3 \text{ g}$ 의 온도 $T_{10} = 300 \text{ K}$ 인 수소가 들어있고, 다른 부분은 $m_2 = 16 \text{ g}$ 의 온도 $T_{20} = 400 \text{ K}$ 인 산소가 들어있다. 수소와 산소의 몰 질량은 각각 $\mu_1 = 2 \text{ g/mol}$, $\mu_2 = 32 \text{ g/mol}$ 이며, $R = 8.31 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$ 이다. 피스톤은 산소와 수소 사이에서 열을 약하게 전달하며, 계의 온도는 평형을 이루게 된다. 모든 과정은 정준적이다.

B1) 계의 최종 온도 T 는 얼마인가?

B2) 최종 압력 P_f 와 초기 압력 P_i 사이의 비는 얼마인가?

B3) 산소에서 수소로 전달된 총 열량 Q 는 얼마인가?

- C. [2.5 점] 두 개의 동일한 도체판 α, β 가 각각 전하량 $-Q, +q$ 로 대전되어 있고($Q > q > 0$) 작은 거리를 두고 평행하게 놓여있다. 다른 질량이 m 이고, 전하량이 $+Q$ 인 동일한 판 γ 는 판 β 에서 거리 d 만큼 떨어진 곳에 기존의 판들과 평행하게 놓여있다. (fig 1을 보시오.) 판의 표면적은 S 이다. 판 γ 는 정지 상태에서 놓아지며 자유롭게 움직일 수 있지만 판 α, β 는 고정되어 있다. 판 β, γ 사이의 충돌은 탄성적이라고 가정하고, 중력과 가장자리 효과는 무시하시오. 전하가 판 β, γ 사이에 재분배되는 시간은 충돌 하는 동안 충분하다고 가정하시오.

C1) 판 β 와 충돌하기 전 판 γ 에 작용하는 전기장 E_1 을 구하시오,

C2) 충돌 이후 각 판의 전하량 Q_β, Q_γ 는 얼마인가?

- C3) 충돌 이후 판 γ 가 판 β 로부터 거리 d 인 위치에 있을 때, 판 γ 의 속력 v 를 구하시오.

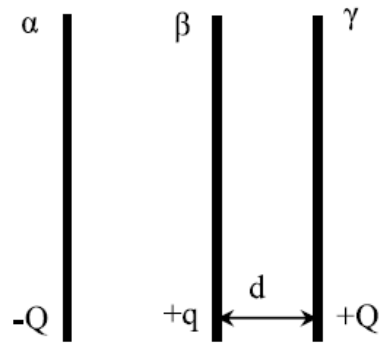


Fig. 1

- D. [2.5 점] 굴절능이 각각 D_1, D_2 인 두 얇은 렌즈가 서로 거리 $L = 25 \text{ cm}$ 를 두고 떨어져 있으며 두 광축은 서로 일치한다. 이 계는 렌즈 D_1 에 더 가까운 광축 위의 위치에 배율 $\Gamma' = 1$ 의 정립실상을 만든다. 두 렌즈의 위치를 교환하면 배율 $\Gamma'' = 4$ 의 정립실상을 만든다.

D1) 렌즈의 종류는 무엇인가? 답안지에 수렴렌즈는 $\ll + \gg$ 로, 발산렌즈는 $\ll - \gg$ 로 표시하시오.

D2) 굴절능의 차이 $\Delta D = D_1 - D_2$ 는 얼마인가?