

Physics Competition

이론 시험



아래 내용을 먼저 읽으시오:

이론 시험의 제한 시간은 5시간 입니다.

1. 주어진 펜만 사용하시오.
2. 종이의 한쪽 면만 사용하시오.
3. 각 문제 마다 다른 종이를 사용하시오.
4. 각 문제에 대해 작성할 수 있는 **연습지** 외에 얻은 결과들을 요약해서 정리해야 하는 **답안지**가 있습니다. 수치값은 주어진 데이터에 따라 알맞은 유효 숫자까지 표현해야 합니다.
5. 문제의 풀이에 필요하다고 생각되는 내용은 연습지에 작성하시오. **글은 최대한 적게 사용하고** 답을 주로 식, 숫자, 그림, 도표를 이용해서 나타내시오.
6. 각 답안지의 맨 위에 있는 박스에 ID 태그에 적힌 학생 코드를 적고, 연습지에도 학생 코드, 문제 번호, 각 종이의 번호 (**Page n. from 1 to N**), **각 문제당** 사용하고 채점 받고 싶은 총 연습지의 개수 (**Page total N**) 을 적으시오. 만약 채점 받고 싶지 않은 연습지를 사용했다면, 종이 전체에 큰 X표를 그리고 페이지 수를 세는데에 포함하지 마시오.
7. 시험이 끝나면 각 문제의 모든 종이를 **다음 순서로** 정리하시오:

(a) 답안지

(b) 사용한 연습지 (순서대로)

(c) 채점 받고 싶지 않은 연습지

(d) 사용하지 않은 연습지와 문제지

종이들을 제공된 봉투에 모두 넣고 탁자 위에 모든 것을 놓고 가시오. 시험장 밖으로 **어떠한** 종이라도 가지고 나가는 것은 금지되어 있습니다.

이론 문제 1

액체로 채워진 구의 앞뒤로 구르는 운동 (10 점)

구형 그릇의 바닥에서 앞뒤로 구르는 액체로 채워진 구를 생각하자. 구는 주기적으로 자신의 병진 및 회전 운동 방향을 바꾼다. 안에 들어있는 액체의 점성에 의해 구의 운동은 매우 복잡하고 다루기 어려울 것이다. 하지만, 여기서 제시된 간략화된 모델은 이 문제를 푸는데 도움이 될 것이다.

질량 m , 반지름 r 의 얇은 강체 구각이 질량 M 의 $\mathbf{w}$ 라고 하는 액체로 꽉 채워져 있다고 하자. $\mathbf{w}$ 는 보통의 경우 이상적인 액체처럼 (즉, 점성이 없이) 행동하다가 외부에서 영향이 가해지면 (예를 들어 전기장을 가하면) 같은 부피의 고체 상태로 즉시 바뀌게 되고, 가해진 영향이 없어지면 즉시 액체 상태로 돌아오는 특별한 성질을 가지고 있다. 이 외부 영향은 구에 어떠한 힘이나 토크를 가하지 않는다. 이 액체로 채워진 구각은 (편의를 위해 앞으로는 ‘구’라고 부를 것이다.) 반지름 R 의 ($R > r$) 구형 그릇 바닥에서 그림에서 나타낸 것처럼 미끄러짐 없이 앞뒤로 구르게 된다. 구는 연직 평면 (그림이 그려진 평면)에서만 움직인다고 가정하자. 다음 세 가지 경우에 대해 구의 움직임을 탐구하시오.

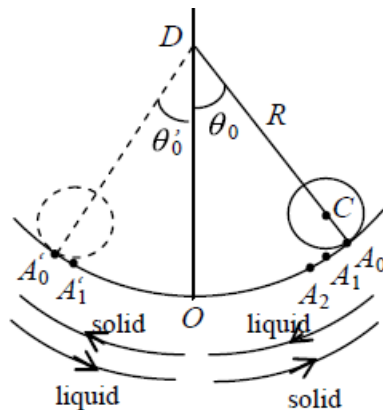
1. $\mathbf{w}$ 가 이상적인 고체 상태이고 $\mathbf{w}$ 가 구각의 안쪽 벽에 매우 가까이 닿아있어 구는 총 반지름이 r 이고 구각의 안쪽 벽과 $\mathbf{w}$ 의 경계면에서 밀도가 급격히 변하는 고체 구로 볼 수 있다.

- (1) 구의 중심 C 를 지나는 축에 대한 구의 관성 모멘트 I 를 계산하시오. (자세한 풀이 과정을 보여주어야 한다.

(1.0 점)

- (2) 구가 작은 진폭을 가지고 구형 그릇 바닥에서 미끄러짐 없이 앞뒤로 구르는 운동의 주기 T_1 을 구하시오.

(2.5 점)



2. $\mathbf{w}$ 는 이상적인 액체처럼 거동하며 $\mathbf{w}$ 와 구각 사이에는 마찰이 없다. 구가 작은 진폭을 가지고 구형 그릇의 바닥에서 미끄러짐 없이 앞뒤로 구르는 운동의 주기 T_2 를 계산하시오. (2.5 점)

3. $\mathbf{w}$ 가 이상적인 고체 상태와 이상적인 액체 상태 사이에서 계속 변환된다. 시간 $t=0$ 에서 구는 정지 상태에 있고 직선 CD 는 직선 OD 와 각도 θ_0 ($\theta_0 \ll 1\text{rad}$) 을 이루며, 여기서 D 는 구형 그릇의 중심이다. 구는 그림에서 보듯이 그릇의 안쪽 벽과 점 A_0 에서 접촉한다. 구를 놓으면 정지 상태에서 왼쪽으로 구르기 시작한다. 구가 A_0 에서부터 평형 위치 O 까지 이동하는 동안 $\mathbf{w}$ 는 이상적인 액체처럼 거동한다. 구가 점 O 를 지나가는 순간 $\mathbf{w}$ 는 갑자기 고체 상태로 변하며 구가 왼쪽의 최대 높이 지점 A_0' 에 도달할 때까지 구의 안쪽 벽에 붙는다. 구가 A_0' 에 도달하면, $\mathbf{w}$ 는 갑자기 다시 액체 상태로 돌아간다. 그러면, 구는 오른쪽으로 구르고, 구가 다시 평형 위치 O 를 지나가는 순간 고체 상태로 변하며 구의 안쪽 벽에 붙게 된다. 구가 오른쪽의 최대 높이 지점 A_1 에 도달하면, $\mathbf{w}$ 는 다시 한 번 액체 상태가 된다. 이 전체 과정이 계속 반복된다. 구는 주기적으로 오른쪽과 왼쪽으로 구르지만 시간이 지나면서 각 진폭은 감소한다. 구의 운동 방향은 그림에 구부러진 화살표로 표현되어 있으며, 대응되는 $\mathbf{w}$ 의 상태도 “solid”, “liquid”라는 단어로 표현되어 있다. 앞뒤로 구르는 과정에서 구와 그릇의 안쪽 벽 사이의 어떠한 미끄러짐도 없다고 가정하자. (또는 그릇의 바닥이 충분한 마찰력을 제공할 수 있다고 하자.) 구가 오른쪽, 왼쪽으로 구르는 주기 T_3 와 구가 오른쪽의 최대 높이 지점 A_n 을 n 번째 도달했을 때 (그림에는 A_2 만 표현되어 있다.) 직선 CD 와 연직선 OD 사이의 각인 구 중심의 각 진폭 θ_n 을 구하시오. (4.0 점)

이론 문제 2

2A. 이상한 물질의 광학적 성질 (7 점)

매질의 광학적 성질은 비유전율 (ϵ_r) 과 비투자율 (μ_r) 에 의해 지배된다. 물이나 유리와 같이 광학적으로 투명한 일반적인 물질의 경우, ϵ_r, μ_r 은 모두 양수이며, 공기에서 진행하던 빛이 이러한 물질의 표면에 비스듬히 입사하면 스넬의 법칙에 따라 굴절 현상이 일어난다. 1964년에 러시아의 과학자 V. Veselago는 ϵ_r, μ_r 가 모두 음수인 물질은 많은 놀랍고 믿을 수 없을 만한 광학적 성질을 가진다는 것을 엄밀하게 증명하였다. 21세기 초, 이러한 물질들은 몇몇 연구실에서 성공적으로 구현되었다. 최근 이러한 이상한 물질에 대한 연구는 첨단 연구 분야가 되었다. 이후에 나오는 문제들을 푸는 과정에서 우리는 이러한 이상한 물질의 기본적인 광학적 성질에 대한 기초적인 이해를 할 수 있을 것이다. ϵ_r, μ_r 이 모두 음수인 물질은 다음과 같은 중요한 성질을 가지는 것을 명심해야 한다. 빛이 매질 속에서 거리 Δ 만큼 진행하게 되면, 일반적인 ϵ_r, μ_r 이 모두 양수인 매질이라면 빛의 위상이 $\sqrt{\epsilon_r \mu_r} k \Delta$ 만큼 증가하지만, 이러한 물질 내에서는 오히려 빛의 위상이 감소하게 된다. 여기서 k 는 빛의 파수 벡터이며, 제곱근을 계산할 때는 항상 양수를 취한다. 아래 주어진 문제들에서 공기의 비유전율과 비투자율은 모두 1이라고 가정한다.

- (1) 공기에서 진행하던 광선이 비유전율이 $\epsilon_r < 0$, 비투자율이 $\mu_r < 0$ 인 이상한 물질의 표면에 도달하면 위에서 설명한 성질에 의해서 Fig.2-1에서 그려진 굴절광의 방향이 합리적임을 보이시오. (1.2 점)

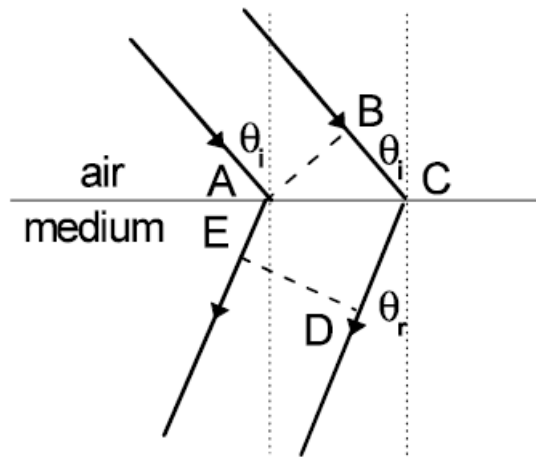


Fig. 2-1

(2) Fig. 2-1에서 굴절각 θ_r (굴절광이 공기와 물질의 경계면의 법선과 이루는 각) 과 입사각 θ_i 사이의 관계를 구하시오. (0.8 점)

(3) 이상한 물질에서 진행하던 광선이 물질과 공기의 경계면에 도달하면, Fig.2-2에서 그려진 굴절광의 방향이 합리적임을 보이시오. (1.2 점)

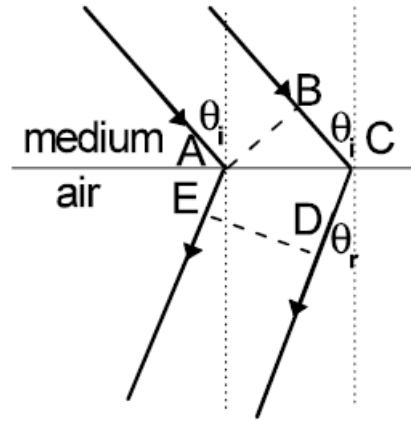


Fig. 2-2

(4) Fig. 2-2 에서 굴절각 θ_r (굴절광이 공기와 물질의 경계면의 법선과 이루는 각) 과 입사각 θ_i 사이의 관계를 구하시오. (0.8 점)

2. Fig. 2-3 에서 보듯이 $\epsilon_r = \mu_r = -1$ 인 이상한 광학 물질로 이루어진 두께 d 의 판이 공기 중에 놓여있고, 판 앞의 거리 $\frac{3}{4}d$ 인 곳에 점광원이 놓여있다. 점광원에서 출발하는 세 광선에 대해서 정확한 광선 경로를 그리시오. (힌트: 이 문제에서 주어진 조건 하에서 이상한 물질과 공기의 경계면에서 반사는 일어나지 않는다.) (1.0 점)

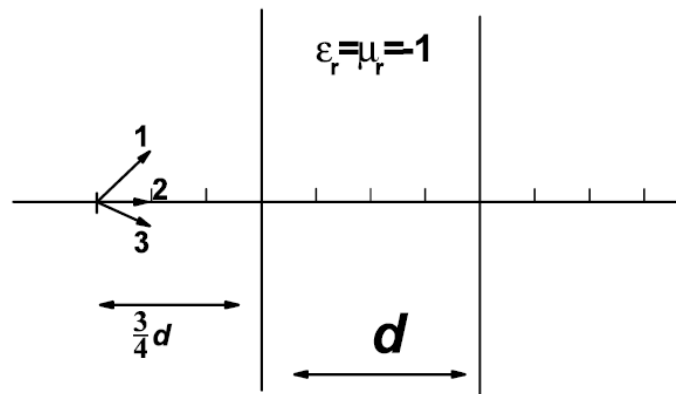


Fig. 2-3

3. Fig. 2-4 에서 보듯이 평행판 공진 공동이 거리 d 만큼 떨어진 두 평행 판에 의해 형성되어 있다. 광학적으로 Plate 1 이라 써있는 판은 이상적인 반사체 (반사율이 100%) 이며, Plate 2 라고 써있는 나머지 판은 부분적으로 반사한다. (그러나 반사율이 높은 편이다.) Plate 1 에 가까이 있는 광원에 의해 평면파가 생긴다고 가정하면, 공동 내부에서 빛은 두 판에 의해 여러 번 반사된다. Plate 2 가 이상적인 반사체가 아니기 때문에, 일부 빛은 Plate 2 에 도달할 때 마다 새어 나오게 되며 (Fig. 2-4 에 그려진 광선 1, 2, 3), 일부는 다시 반사된다. 이 빛들의 위상이 동일하다면 서로 보강 간섭을 하여 공명을 하게 된다. 양쪽의 판에서 반사될 때 빛의 위상이 π 만큼 변한다고 가정하자. 이제 $\epsilon_r = \mu_r = -0.5$ 인 이상한 광학 물질로 만들어진 두께 $0.4d$ 의 판을 두 판에 평행하게 공동 내부에 넣는다. 공동의 나머지 공간은 공기로 채어져 있다. 빛이 판에 수직한 방향으로 진행하는 경우만 생각하고 (Fig. 2-4 에 그려진 광선 경로는 그림일 뿐이다.), 이 공동에서 공명 조건을 만족하는 모든 파장을 계산하시오. (힌트: 이 문제에서 주어진 조건 하에서 이상한 물질과 공기의 경계면에서 반사는 일어나지 않는다.) (1.0 점)

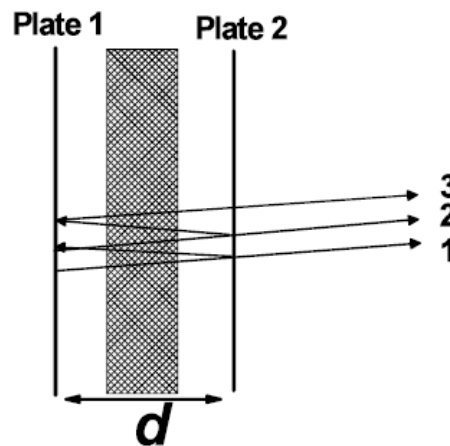


Fig. 2-4

4. $\epsilon_r = \mu_r = -1$ 인 이상한 광학 물질로 이루어진 반지름 R 의 무한 원통의 중심이 Y 축 위에 있으며 Fig. 2-5 에 XOY 평면으로 자른 단면이 그려져 있다. X 축 위에 있는 레이저 광원에서 (광원의 위치는 좌표 x 로 기술된다.) Y 방향으로 좁은 레이저 빛을 내보낸다. 광원에서 내보낸 광신호가 실린더 반대쪽에 있는 무한 수신 평면에 도달할 수 없는 x 의 범위를 구하시오. (1.0 점)

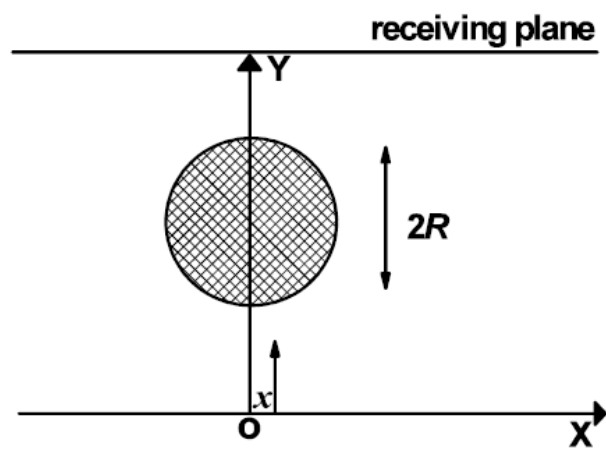


Fig. 2-5

2B. 외부 전기장 내에 있는 유전체 구 (3 점)

점성이 작은 액체에 여러 개의 작은 유전체 입자를 넣음으로써 우리는 서스펜션 형태의 계를 얻을 수 있다. 이 계에 외부 전기장이 가해지면, 분산되어 있는 유전체 구들은 유도 전기 쌍극자 모멘트가 생기면서 편극된다. 매우 짧은 시간 동안, 이 편극된 구들은 쌍극자-쌍극자 상호작용을 통해 응집되면서 전체 계의 유효 점성은 매우 커지게 된다. (이 계는 근사적으로 고체로 볼 수 있다.) 이러한 종류의 상 변화는 “전기유변 효과”라고 불리며, 이 계는 “전기점성 유체”라고 불린다. 이러한 효과는 실용적으로는 브레이크를 만드는데 이용될 수 있는데, 이는 이러한 상 변화에 걸리는 시간이 일반적인 메커니즘에 비해 몇 배는 더 짧기 때문이다. 아래에 있는 여러 문제들을 풀면서, 우리는 전기유변적인 상 전이의 본질적인 메커니즘을 이해할 수 있는 간략한 모델을 이용할 것이다.

1. 유체 내에 반지름 a 의 동일한 유전체 구들이 많이 들어있다고 했을 때, 각 구의 전기 쌍극자 모멘트가 $\vec{p}$ 이며, 이는 다른 구들의 영향이 아닌 외부 전기장 $\vec{E}_0$ 에 의해서만 유도된 것이다. (**참고사항:** $\vec{p} \parallel \vec{E}_0$)

(1) 두 개의 동일한 유전체 구가 유체 내에 존재하고 중심을 이은 선이 외부 전기장 방향과 각 θ 를 이루도록 (Fig. 2-6을 보시오.) 접촉하고 있을 때, 접촉하고 있는 두 개의 작은 유전체 구의 쌍극자-쌍극자 상호작용에 의한 에너지를 p, a, θ 로 나타내시오. (**참고사항:** 계산을 할 때, 편극된 구는 전기 쌍극자가 구의 중심에 놓여있는 것으로 볼 수 있다.) (0.5 점)

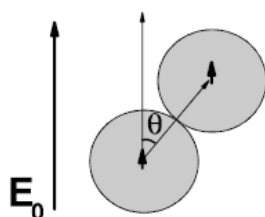


Fig. 2-6

- (2) Fig. 2-7 에 그려진 세 배치에 대해서 쌍극자-쌍극자 상호작용 에너지를 계산하십시오. (0.75 점)

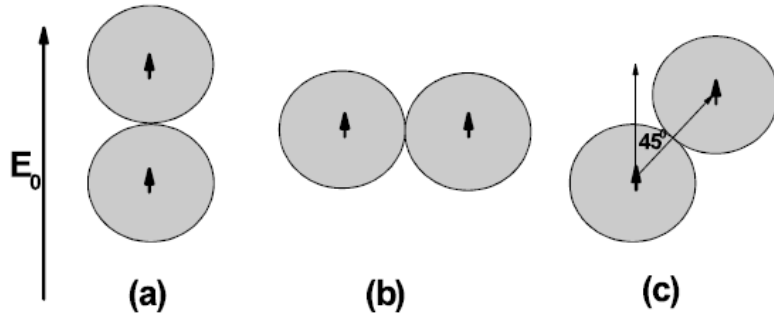


Fig. 2-7

(3) 어떤 배치가 가장 안정한 것인지 판별하시오. (0.25 점)

(참고사항: 계산을 할 때, 편극된 구는 전기 쌍극자가 구의 중심에 놓여있는 것으로 볼 수 있으며, 쌍극자-쌍극자 상호작용의 에너지는 p, a 로 표현될 수 있다.)

2. 문제 1에서 주어진 가정들을 바탕으로 유체 내에 동일한 세 개의 구가 있다고 하자.

(1) Fig. 2-8에 그려진 세 배치의 쌍극자-쌍극자 상호작용의 에너지를 계산하시오.

(0.9 점)

(2) 어떤 배치가 가장 안정한지 판별하시오.

(0.3 점)

(3) 어떤 배치가 가장 불안정한지 판별하시오.

(0.3 점)

(참고사항: 계산을 할 때, 편극된 구는 전기 쌍극자가 구의 중심에 놓여있는 것으로 볼 수 있으며, 쌍극자-쌍극자 상호작용의 에너지는 p, a 로 표현될 수 있다.)

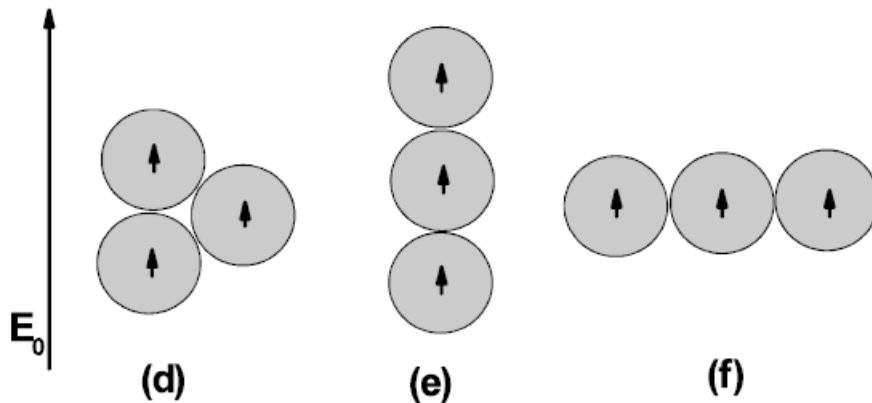


Fig. 2-8

이론 문제 3

3A. 일정 부피 자유 전자 기체의 비열에 각 전자가 평균적으로 기여하는 정도 (5 점)

1. 고전 역학에 의하면, 금속 내의 전도 전자는 이상 기체와 같이 자유 전자 기체를 이루게 된다. 열적 평형 상태에서 그들의 평균 에너지는 온도와 관계 있기 때문에 각 전자들은 비열에 기여하게 된다. 일정 부피 자유 전자 기체의 비열에 각 전자가 평균적으로 기여하는 정도는 다음과 같이 정의된다.

$$c_v = \frac{d\bar{E}}{dT} \quad (1)$$

여기서 $\bar{E}$ 는 각 전자의 평균 에너지이다. 하지만, 일정 부피 하에서 비열은 온도에 무관한 상수이다. $\bar{E}$ 와 일정 부피 하에서 비열에 각 전자가 평균적으로 기여하는 정도인 c_v 를 계산하여라.

(1.0 점)

2. 실험적으로 일정 부피 하에서 전도 전자의 비열은 온도에 의존하며, 상온에서 실험값은 고전적인 예측보다 지수가 2 정도나 낮은 값이 나온다. 이는 전자들이 고전 통계를 따르지 않고 양자 통계를 따르기 때문이다. 양자 이론에 의하면, 금속 물질에서 전도 전자들의 상태 밀도 (단위 부피, 단위 에너지당 전자가 존재할 수 있는 상태의 수) 는 전자의 에너지 E 의 제곱근에 비례하며, 그렇게 되면 부피 V 의 금속에서 dE 의 에너지 범위에 들어있는 상태의 수는 다음과 같다.

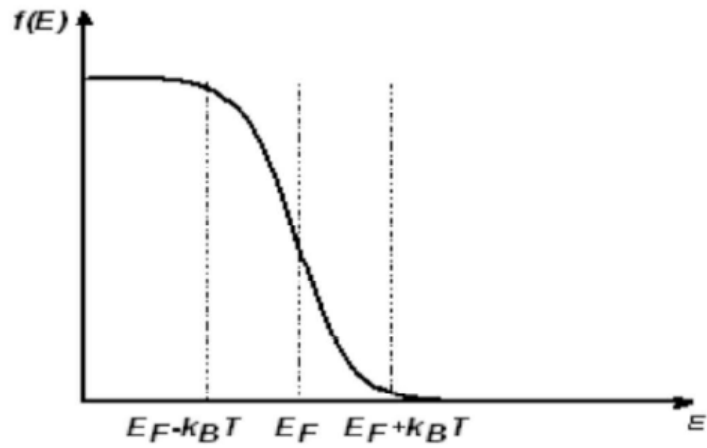
$$dS = C V E^{1/2} dE \quad (2)$$

여기서 C 는 규격화 상수이며, 계의 총 전자 수에 의해 결정된다.

에너지 E 인 상태에 전자가 채워질 확률은 다음과 같다.

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)} \quad (3)$$

여기서 $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ 은 볼츠만 상수이며 T 는 절대 온도, E_F 는 페르미 에너지이다. 상온에서 E_F 는 금속 물질에 대해 몇 eV 정도이다. ($1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$) $f(E)$ 는 아래 그림에서 표현된 것과 같은 페르미 분포 함수라고 불리는 함수이다.



(1) $f(E)$ 를 이용해서 상온에서의 c_v 를 계산하시오. (3.5 점)

(2) 양자 이론에 의한 결과가 고전적인 결과와 다른 합리적인 이유를 대시오. (0.5 점)

참고사항: 계산에서 온도에 따른 페르미 에너지 E_F 의 변화는 무시하시오. 즉, E_F^0 를 0 K 에서 페르미 에너지라고 할 때, $E_F = E_F^0$ 라고 가정하시오. 한편, 페르미 분포는 E_F 주변의 길이 $2k_B T$ 인 범위에서 선형적으로 감소하고 나머지에서는 0 또는 1 인 함수로 간략화 할 수 있다. 즉, 다음과 같이 할 수 있다.

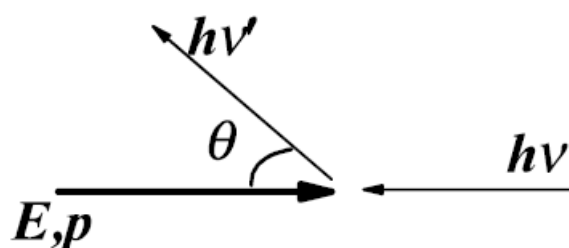
$$f(E) = \begin{cases} 1 & E < E_F - k_B T \\ \text{선형적으로 감소하는 함수} & E_F - k_B T < E < E_F + k_B T \\ 0 & E > E_F + k_B T \end{cases}$$

상온에서 $k_B T \ll E_F$ 이며, 그 때문에 계산은 간편해 진다. 한편, 총 전자 수는 0 K 에서 계산해도 된다.

3B. 역 콤프턴 산란 (5 점)

상대론적인 고에너지 전자와 충돌함으로써, 광자는 고에너지 전자로부터 에너지를 얻을 수 있다. 즉, 충돌에 의해 광자의 에너지와 진동수가 증가하는 것이다. 이는 역 콤프턴 산란이라고 불린다. 이러한 현상은 천체물리학에서 매우 중요하며, 그 예로 이 현상이 우주에서 X 선과 γ 선이 만들어지는 메커니즘을 제공해 준다는 것을 들 수 있다.

1. 총 에너지가 E 인 고에너지 전자 (이 전자의 운동 에너지는 정지 질량 에너지보다 크다.) 와 진동수 ν 의 저에너지 광자 (이 광자의 에너지는 전자의 정지 질량 에너지보다 작다.) 가 서로 반대방향으로 움직이다가 충돌한다. 아래에 그려진 그림처럼, 충돌에 의해 광자는 산란되며, 산란된 광자는 원래 입사 방향과 각 θ 를 이루는 방향으로 진행한다. (산란된 전자는 그림에 표시되어 있지 않다.) 산란된 광자의 에너지를 계산하고, E, ν, θ 와 전자의 정지 질량 에너지 E_0 로 나타내시오. 산란된 광자의 에너지가 최대인 θ 와 그 최대 에너지를 계산하시오. (2.4 점)



2. 입사한 전자의 에너지 E 가 정지 질량 에너지 E_0 보다 훨씬 크다고 가정하자. 즉, $E = \gamma E_0$, $\gamma \gg 1$ 이다. 반면, 입사 광자의 에너지는 E_0 / γ 보다 훨씬 작다. 산란된 광자의 최대 에너지에 대한 근사적인 표현을 구하시오. $\gamma = 200$, 입사 광자의 파장 $\lambda = 500 \text{ nm}$ 라고 했을 때, 근사적인 최대 에너지와 그에 대응되는 산란된 광자의 파장을 계산하시오.

Parameters: 전자의 정지 질량 에너지 $E_0 = 0.511 \text{ MeV}$, 플랑크 상수 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$, 여기서 c 는 진공에서 빛의 속력이다.

(1.2 점)

3. (1) 에너지 E 의 상대론적인 고에너지 전자와 광자가 서로 반대 방향으로 움직이다가 충돌한다. 광자가 전자로부터 최대의 에너지를 얻을 수 있는 입사 광자의 에너지를 구하시오. 이 때, 산란된 광자의 에너지도 구하시오. (0.7 점)

(2) 에너지 E 의 상대론적인 고에너지 전자와 광자가 서로 수직한 방향으로 움직이다가 충돌한다. 광자가 전자로부터 최대의 에너지를 얻을 수 있는 입사 광자의 에너지를 구하시오. 이 때, 산란된 광자의 에너지도 구하시오. (0.7 점)