



THEORETICAL COMPETITION

9th Asian Physics Olympiad

Ulaanbaatar, Mongolia (April 22, 2008)

이론 문제 1. 티 세레모니와 거품의 물리학

티 세레모니는 아시아의 전통이다. 이 차의 준비 과정에서 중요한 단계 중 하나는 거품이 내부에 생길 때까지 신선한 물을 끓이는 것이다. 거품은 일상 생활에서 친숙하고 물리, 화학, 약학, 기술에서 중요한 역할을 차지하고 있다. 그럼에도 불구하고, 그들은 자주 놀랍고 예상치 못한 거동을 보여주며, 아직 이해되지 않은 부분이 많다.

상온에서 순수한 물은 기체로 포화되어 있다. 온도가 상승하면서, 용해된 기체의 압력 P_{ab} 가 증가하고, 용해된 공기는 방출되며, 공기 방울 (ABs) 이 차 주전자의 바닥과 벽에서 나타난다. (Fig. 2) 주전자 벽과 순수한 물 사이의 부착력은 충분히 강하고, AB는 반지름 R_{ab} 의 잘린 구의 형태이며, 잘린 부분은 반지름이 $r_{ab} \ll R_{ab}$ 이다. 열을 더 많이 가하면 AB 들은 팽창하고, 특정 크기가 되면 바닥에서 떨어지면서 (Fig. 3), 물 표면까지 올라가고, 표면에서 터진다. 증기 방울 (VBs) 는 바닥에서 물의 온도가 임계값 $T_w^0 \approx T_{crit}^0 = 100^\circ\text{C}$ 에 도달해서 포화 증기압이 외부 압력보다 커지게 되면 생성된다. 증기 생성은 10배 증가하고, VB 들은 팽창하고, 바닥에서 떨어진다. VB는 증기로만 이루어져 있다고 볼 수 있다. 물이 충분히 가열되어 있다면, 상승하는 VB는 계속 팽창하면서 표면에 도달하고 터진다. 그렇지 않고, 상층의 물의 온도가 충분히 높지 않고 연직방향의 큰 온도 기울기가 존재한다고 하자. VB가 상대적으로 차가운 물 층에 도달하게 되면 부피가 작아지면서 붕괴하게 된다. (Fig. 4) 이는 공기가 빠져나가는 것을 유도하며, 강한 진동이 발생하고 고려할 만한 양의 용해된 공기가 미세 공기 방울 (MAB) 형태로 방출된다. 이는 초음속 진동을 발생시킬 수 있다.

끓음 과정에서 방울의 성장 과정의 주요 단계는 다음과 같다:

- AB의 바닥과 벽에서의 생성과 성장, VB로의 변화
- VB의 바닥에서 떨어지는 것과 상승, 그들의 물 내부 또는 표면에서의 소멸
- 물 내부에서 MAB의 생성과 표면으로의 상승

이러한 이론적인 설명은 최근 실험과 잘 일치한다. 특히, 끓는 물에 대한 소음 분석 실험

(NAE, Ural State University, Ekaterinburg) 이 실행되었다. 광대역 증폭기와 연결된 매우 민감한 마이크는 전기 차 주전자에서 나오는 세 가지 소음의 근원을 알아내었다.

1. 끓기 전 AB가 바닥에서 떨어짐 ($\nu_1 \sim 100 \text{ Hz}$ 의 진동 발생)
2. 물 내부에서 VB의 붕괴 ($\nu_2 \sim 1 \text{ kHz}$ 의 진동 발생)
3. 물 표면 아래에서 MAB의 생성 ($\nu_3 \sim 35 \text{ kHz to } 60 \text{ kHz}$ 의 진동 발생)

힌트:

1) 직선 경로를 따라 작은 방울이 상승하면 층류 – 물이 부드럽게 층을 이루면서 흐른다. (Fig. 1을 보시오.) 가 관찰됨이 잘 알려져 있다. 이 경우, 느린 속도 v_{lam} 로 움직이는 입자에 작용하는 저항력은 스토크스 식에 의해 다음과 같다:

$$F_A = 6\pi\eta_w R_b v_{lam}$$

이와 다르게, 상대적으로 큰 방울이 표면으로 올라가는 경우, 주변의 물의 흐름이 방해를 받게 되며, 방울 뒤에 빈 공간이 생기면서 난류가 관찰된다. (Fig. 1을 보시오.) 이러한 경우, 상승하는 방울의 운동 에너지의 일부가 저항력에 의해 손실된다.

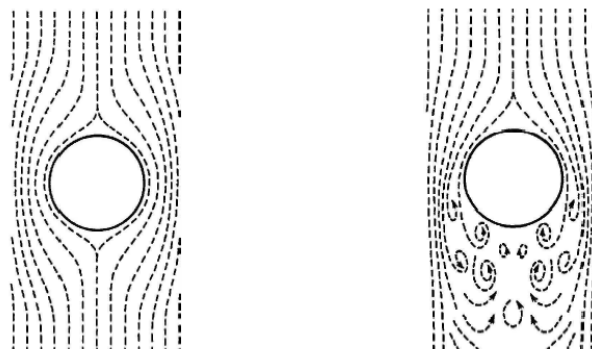


Fig 1. Laminar and turbulent types of flow for rising air bubbles in water

2) 액체의 표면이 볼록 (오목) 한 형태이면, 분자간 상호작용에 의해 표면장력이 작용하게 된다. 이 압력은 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$$

여기서 σ -표면장력 (단위 = N/m), 표면에서 단위 길이당 작용하는 힘, R -표면의 곡률 반경 이다.

3) 고유 지속 시간이 “ t ”인 짧은 과정의 경우, 역수인 $\nu = \frac{1}{t}$ 는 고유 진동수라고 볼 수 있다. 소음 진동수를 계산할 때 이 정의를 사용하시오.

유용한 데이터:

$P_0 = 1.016 \cdot 10^5$ [Pa] - 대기압

$\rho_w = 10^3$ [kg/m³] - 물의 밀도

$\rho_{\text{vapor}} = 0.017$ [kg/m³] - $T = 293$ K 에서 증기 밀도 ($T = 373$ K 에서 0.596 [kg/m³])

$P_{\text{vapor}} = 0.023 \cdot 10^5$ [Pa] - $T = 293$ K 에서 증기 압력 ($T = 373$ K 에서 $1.016 \cdot 10^5$ [Pa])

$g = 9.81$ [m/s²] - 중력 가속도

$\mu_{\text{air}} = 0.029$ [kg/mol] - 공기의 분자량

$R = 8.31$ [J/mol/K] - 기체 상수

$\sigma = 0.0725$ [N/m] - 물의 표면 장력

$\eta_w = 0.3 \cdot 10^{-3}$ [Pa · s] - 물의 점성 계수

$H = 10$ cm - 차 주전자에서 물의 깊이



Fig. 2. Bubbles in teakettle

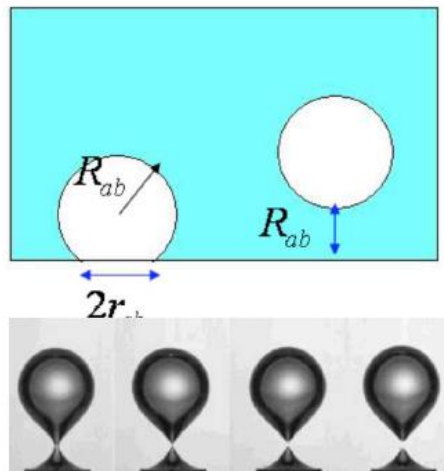


Fig. 3. Air bubble detaching from the bottom

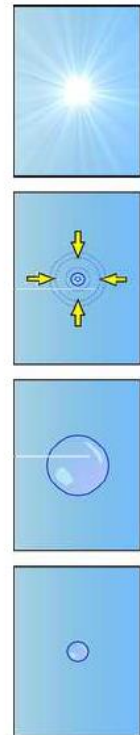


Fig. 4. Vapor bubble collapsing

문제 (총 10 점):

물이 바닥이 평평한 유리 차 주전자 안에서 대기압 하에 끓고 있는 상황을 생각하자. 주전자의 바닥은 균일하게 데워지며, 연직 방향의 온도 기울기가 존재하고, 방울들이 생성되고 성장한다. (Fig.2)

Q1. 깊이가 H 인 물 내부에서 높이 $h < H$ 인 곳에서 AB 가 성장할 수 있는 압력 조건을 구하시오. $2\pi\sigma r_{ab} \gg P_{\text{extern}}\pi r_{ab}^2$ 을 이용하시오. [$P_{ab}, P_0, R_{ab}, \rho_w, g, \sigma, h, H$ 로 나타내시오.] (1.0 점)

Q2. AB 가 차 주전자의 바닥에서 떨어질 조건을 구하시오. (Fig. 3) $r_{ab} \ll R_{ab}$ 을 이용하시오. [$r_{ab}, R_{ab}, \rho_w, \sigma$ 로 나타내시오.] (1.5 점)

Q3. 차 주전자의 바닥에서 반지름이 R_b 인 AB 를 생각하자. 물이 끓으면, 방울은 증기로 포화되고 반지름이 증가하게 된다. $\xi = m_{\text{air}} / m_{\text{vapor}}$ 를 주어진 온도 T 에서 방울 내부의 공기 질량과 포화된 증기 질량의 비라고 하자. 이 비를 상온 $T = 20^\circ\text{C}$ ($R_b = 0.5\text{mm}$) 와 끓는점 $T = 100^\circ\text{C}$ ($R_b = 1\text{mm}$) 에서 계산하시오. [$\mu_{\text{air}}, T, P_0, P_{\text{vapor}}, R_b, \rho_w, \rho_v, \sigma, H$ 로 나타내시오.] (1.5 점)

Q4. NAE 데이터와 뉴턴 법칙을 이용해서 바닥으로부터 R_{ab} 만큼 떨어진 AB 의 반지름을 추정하시오. (Fig. 3) AB 에 (주변을 둘러싸고 있는 물 층을 고려한) 더해지는 질량은 물 방울의 절반이라고 가정하시오. (1.0 점)

Q5. AB 가 상승하기 바로 직전, 연결하는 목 부위가 매우 좁을 때, AB 바닥의 반지름을 계산하시오. (Fig. 3 를 보시오.) [R_{ab}, ρ_w, σ 로 나타내시오.] Q4 에서 구한 반지름을 이용해 계산하시오. (1.5 점)

Q6. NAE 데이터를 이용해 붕괴하는 VB 의 반지름을 (Fig. 4) 이 과정에서 반지름 방향 압력이 약 3 kPa 이라고 가정하고 추정하시오. (1.2 점)

Theoretical Question 1, 9th Asian Physics Olympiad (Mongolia)

Q7. 이전에서 VB 에 대해 계산한 결과를 이용해 유도된 기체 방출에 의해 생성된 MAB 의 반지름을 계산하시오. (0.5 점)

Q8. 층류에 대한 스토크스 법칙을 이용해서, 전형적인 AB 의 상승속도를 구하시오. $[R_{ab}, \rho_w, \eta_w$ 로 나타내시오.] $H = 10 \text{ cm}$ 일 때 상승 시간을 계산하시오. (0.6 점)

Q9. 난류가 흐를 때, VB 의 평균 상승 속도를 구하시오. $[R_{ab}, \rho_w, \eta_w$ 로 나타내시오.] $H = 10 \text{ cm}$ 일 때 상승 시간을 계산하시오. (1.2 점)

문제 2: 이온 결정, 유카와 퍼텐셜과 파울리 원리

많은 원자들은 이온화 에너지가 매우 낮아서 최외곽 전자를 쉽게 잃게 된다. 반대로, 다른 원자들은 쉽게 전자를 받는다. 둘을 합치면, 이 양이온과 음이온은 안정한 이온 구조로 결합할 수 있다. 많은 고체들은 원자들이 매우 일정하고, 주기적인 패턴을 가지고 정렬되어 있는 이온 결정이다. 이러한 이상적인 결정에서 같은 기본 단위 구조를 계속 반복된다.

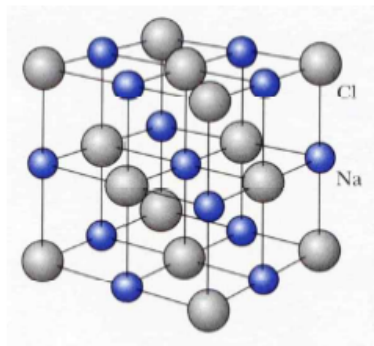


Fig.1

염화나트륨 (NaCl) 의 면심입방구조
원자 중심간 간격은 r_0 로 일정하다.

이온 결정의 결합 에너지는 이온들의 정전기적 퍼텐셜 에너지가 대부분을 차지한다.

거리 R 만큼 떨어져 있는 두 전하 q_1, q_2 에 작용하는 전기적 상호작용은 쿨롱 퍼텐셜에 의해 다음과 같이 정의된다:

$$V_C(R) = k \frac{q_1 q_2}{R}$$

여기서 $k = 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9 [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2]$ 는 쿨롱 상수이다. 음의 힘은 인력을 의미한다. 힘은 두 전하를 연결하는 선을 따라 작용한다. NaCl 결정의 경우, 두 이온은 모두 단위 전하 $\pm e$ 를 가지며, 선택한 전하에 작용하는 여러 다른 주변 이온들을 모두 고려해야 한다. 무한한 크기의 결정에 대해 모든 양이온과 음이온을 고려하면, $V_{att}(r) = \alpha \cdot V_C(r)$ 형태의 **인력** 퍼텐셜 에너지를 얻게 되며, 여기서 r 은 가장 가까운 이온 사이의 거리이고 $\alpha = 1.74756$ 은 마델룽 상수이며, [E.Madelung, Phys. Zs, 19 (1918) p542] 결정 내부 단일 이온의 에너지를 결정하는데 사용된다.

인력 퍼텐셜 에너지 외에도 파울리 배타 원리와 결정 격자에서 전자 껍질의 겹침으로 인한 **척력** 퍼텐셜 에너지도 있다. 쿨롱 형태의 인력과는 달리, 이 척력 퍼텐셜 에너지는 매우 좁은 구간에서만 작용한다.

이러한 척력 퍼텐셜을 기술하는 두 가지 다른 모델이 있다.

Model #1. 척력 퍼텐셜을 합리적으로 근사하는 방법은 지수 함수를 이용하는 것이다:

$$V_{rep1}(r) = \lambda \cdot e^{-r/\rho}, \quad (\lambda, \rho > 0)$$

이는 선택한 이온과 전체 결정 격자 사이의 척력 상호작용을 기술한다. 여기서 λ 는 결합 세기이고, ρ 은 작용 범위를 나타내는 변수이다.

Model #2. 척력 퍼텐셜을 근사하는 다른 좋은 방법은 음의 지수이다.

$$V_{rep2}(r) = b / r^n, \quad (b > 0)$$

여기서 b 는 결합 세기, n 은 2 보다 큰 정수이다. (보른 지수) 이러한 변수들은 전체 결정과의 반발을 고려한 것이다.

당연하지만, 물리적인 변수 값과 모델 퍼텐셜은 결정 격자의 종류에 따라 달라진다.

상온과 대기압 하에서 몇몇 이온 결정에 대해 격자 상수 r_0 와 해리 에너지 E_{dis} (격자를 이온들로 분리시키기 위해 필요한 에너지) 에 대한 실험값이 Table 1 에 주어져 있다.

결정	r_0 [nm]	E_{dis} [kJ/mol]
NaCl	0.282	+764.4
LiF	0.214	+1014.0
RbBr	0.345	+638.8

표 1

NaCl과 구조가 같은 이온 결정들의 성질
[C.Kittel, "Introduction to Solid State Physics",
N.Y., Wiley (1976) p.92] (1 몰에는 아보가드로수
만큼의 이온쌍이나 원자가 존재한다.)

문제 (총 10 점):

Q1. Fig 1 에 있는 입방 격자의 중심에 위치한 이온에 대해 쿨롱 퍼텐셜 $V_{C0}(r)$ 을 구하시오. 가장 가까운 이온들과만 상호작용한다고 가정하시오. (거리 $r = \sqrt{3}r_0$ 까지 포함) 이 근사에서 마델룽 상수 α_0 를 구하시오.

(1.5 점)

Q2. Model #1 을 사용해서 이온 당 알짜 퍼텐셜 에너지 $V_1(r)$ 을 구하시오. $r = r_0$ 일 때, 평형식을 구하고, 그 때 알짜 퍼텐셜 에너지 $V_1(r_0)$ 를 구하시오. [α, r_0, ρ 로 나타내시오.] 정확한 마델룽 상수 α 를 사용하시오.

(1.5 점)

Q3. 실험값을 이용해서 작용 범위를 나타내는 변수 ρ 를 구하시오. $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} [1/\text{mol}]$ 을 이용하시오.

(2.0 점)

Q4. Model #2 을 사용해서 이온 당 알짜 퍼텐셜 에너지 $V_2(r)$ 을 구하시오. $r = r_0$ 일 때, 평형식을 구하고, 그 때 알짜 퍼텐셜 에너지 $V_2(r_0)$ 를 구하시오. [α, r, r_0, n 로 나타내시오.] 정확한 마델룽 상수 α 를 사용하시오.

(2.0 점)

Q5. (Table 1 에 있는) 실험값을 이용해서 NaCl 에 대한 보어 지수 n 을 추정하시오. 평형 상태에서 전체 알짜 퍼텐셜 에너지에 쿨롱 상호작용과 파울리 배타 원리 (척력) 이 각각 얼마나 기여하는지 구하시오.

(1.5 점)

Q6. Na 원자의 이온화 에너지 (원자에서 전자 1 개를 떼는데 필요한 에너지) 는 $+5.14 \text{ eV}$, Cl 원자의 전자 친화도 (원자가 전자 1 개를 받는데 필요한 에너지) 는 -3.61 eV 이다. NaCl 결정에서 (원자를 격자 내부에 잡아두는) 원자 당 전체 결합 에너지를 추정하시오. 실험값은 $E_{\text{exp}} \approx -3.28 [\text{eV}]$ 이다. 단위 사이 변환 규칙: $1[\text{eV}] = 1.602 \cdot 10^{-19} [\text{J}]$ [eV 로 나타내시오.]

(1.5 점)



THEORETICAL COMPETITION

9th Asian Physics Olympiad

Ulaanbaatar, Mongolia (April 22, 2008)

문제 3. 초광속 물체는 어떻게 보일까?

물체가 빛의 속도보다 빠르게 움직일 수 있을까? 물체가 진공에서 움직이고 있다면 답은 “아니오”이다. 하지만 굴절률 n 의 광학적으로 밀한 매질에서 빛의 위상 속도를 생각한다면 답은 “예”가 될 수도 있다. ($n = c/u$, 여기서 u 는 매질 내에서 빛의 속도, c 는 진공에서 빛의 속도이다.)

v 가 물체의 속도일 때, $u < v < c$ 이면 그 물체는 초광속이다. 초광속 물체의 잘 알려진 예시 중 하나는 체렌코프 복사를 만드는 대전된 입자이다.

이 문제를 통해 우리는 분산이 없는 광학 물질 내부에서 속도가 v 로 일정한 초광속 물체를 다룰 것이다. u 는 매질 내에서 빛의 속도이다.

문제를 간단하게 하기 위해, 우리는 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ 와 $\cos \theta = u/v$, $\tan \theta = \sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}$ 로 주어지는 각 θ 를 이용할 것이다.

1. 방사하는 초광속 입자

Fig.1에서 보듯이, 방사하는 입자가 일정한 속도 v 로 x 축을 따라 움직이고 있다. ($v > u$)

관찰자 M 은 x 축으로부터 거리 d 만큼 떨어진 곳에 위치한다.

우리는 관찰자로부터 가장 가까운 점을 x 축 위의 원점 O 라고 할 것이다. 입자가 실제로 점 $x = 0$ 을 지나는 때를 $t = 0$ 로 놓는다.

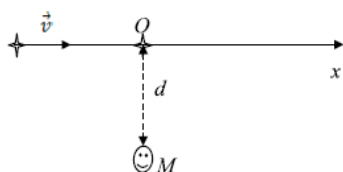


Figure 1

- (1) 시간 t' 에 방출된 빛이 시간 t 에 관측된다고 하자. t 를 d, t', u, v 로 나타내시오.
(1.0 점)
- (2) 시간 $t = t_0$ 일 때, 관찰자는 위치 x_0' 에서 물체를 처음으로 관측한다. 겉보기 위치 x_0' 과 이 첫번째 관측 시간 t_0 를 d, v, θ 로 나타내시오.
(2.0 점)
- (3) 임의의 시간 t 에 대해 겉보기 위치(들) x' 을 구하시오. 답을 v, θ, t, t_0 로 나타내시오.
(2.0 점)
- (4) 임의의 시간 t 에 대해 겉보기 속도(들) $v'(t)$ 을 구하시오. v, θ, t, t_0 로 나타내시오.
(2.0 점)
- (5) 입자가 처음 관측되는 순간의 겉보기 속도(들) v' 을 구하시오.
(0.2 점)
- (6) 원점 O 로부터 무한히 떨어진 지점의 입자의 겉보기 속도(들) v' 을 구하시오. 답을 v, u 로 나타내시오.
(0.2 점)
- (7) 겉보기 속도 v' - 시간 t 의 그래프를 그리시오. 겉보기 속도의 극한값을 명시하시오.
(1.0 점)
- (8) 겉보기 속도가 빛의 속도보다 클 수 있는가? 즉, $v' > c$ 일 수 있는가?
(0.2 점)

2. 방사하는 선형 물체

x 축 방향으로 빛의 방사하고 움직이는 선형 물체를 고려하자. 물체의 정지 좌표계에서 물체의 길이는 L 이다.

A. 평행한 움직임

이 파트에서 우리는 Fig. 2 처럼 선형 물체가 x 축을 따라 가로 방향으로 움직인다고 하자.

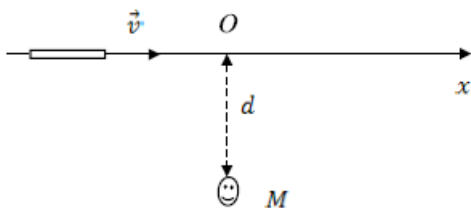


Figure 2

(9) 물체의 앞부분이 처음으로 보이기 시작하는 때로부터 전체 물체가 다 보이는 때까지 걸리는 시간을 L, γ, v 로 나타내시오,

(0.3 점)

(10) 물체가 전부 보일 때, 겹보기 길이(들)을 d, L, θ, γ 로 나타내시오.

(0.4 점)

B. 수직하 운동

이 파트에서 우리는 Fig. 3 처럼 선형 물체가 x 축을 따라 수직하게 움직인다고 하자. 관찰자는 x 축의 원점에 위치해 있다. ($d = 0$) 물체는 x 축에 대해 대칭이다.

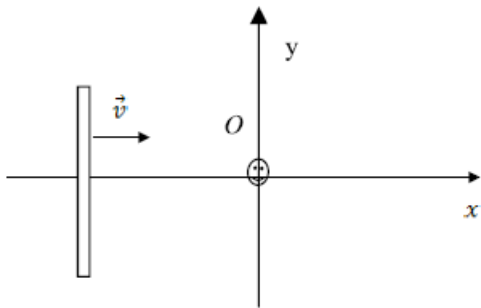


Figure 3

(11) 주어진 시간 t 에 대해, 이 물체의 겹보기 모양은 타원 또는 타원의 일부분(들)임을 보이시오.

(0.7 점)

아래 양들을 구하고 v, θ, t 로 나타내시오.

(12) 주어진 시간 t 에 대해, 타원의 중심의 위치 x_c 를 v, θ, t 로 나타내시오.

(0.5 점)

(13) 주어진 시간 t 에 대해, 타원의 장반경과 단반경을 v, θ, t 로 나타내시오.

(0.5 점)