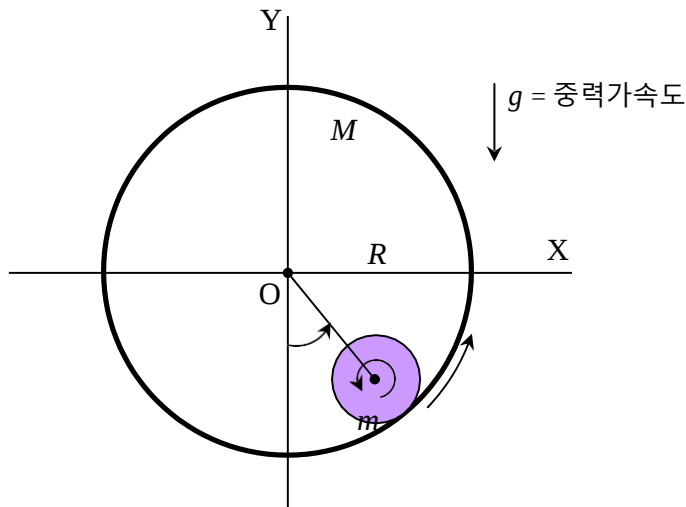


구르는 실린더들

거친 안쪽 표면의 반지름이 R , 질량이 M 인 얇은 벽을 가진 실린더가 고정된 수평축 OZ 를 중심으로 회전할 수 있다. Z 축은 종이에 수직하며 종이를 뚫고 나오는 방향이다. 다른 더 작은 질량 m , 반지름 r 의 균일한 강체 실린더가 미끄러짐 없이 (문제 1.8 제외) OZ 에 평행한 자신의 축을 중심으로 M 의 안쪽 표면을 따라 구른다.



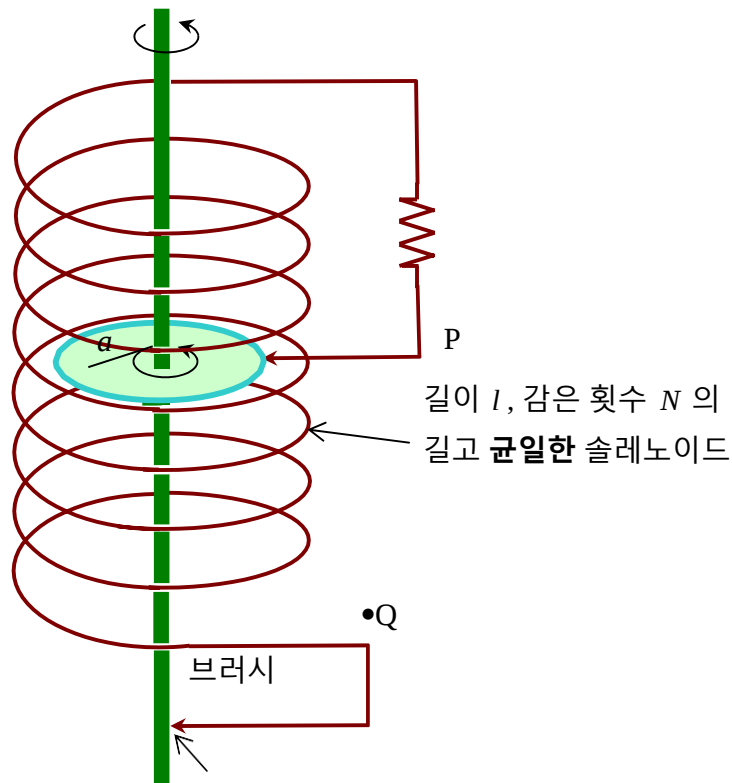
- 1.1) M 의 회전은 m 이 가장 아래 지점에서 정지해 있는 시간 $t=0$ 일 때 정지 상태에서부터 시작된다. 이후 시간 t 일 때, m 의 질량 중심의 각변위는 θ 이며, 그 때 M 은 ϕ 라디안만큼 회전한 상태이다. m 은 자신의 중심축을 중심으로 (음의 Y 축과 같은) 고정된 선에 대해 얼마의 (ψ 라고 표현한) 각만큼 회전하였는가? 답을 θ, ϕ, R, r 로 나타내시오. (0.8 점)
- 1.2) m 의 자신의 중심축에 대한 각가속도 $\frac{d^2}{dt^2}\psi$ 는 얼마인가? 답을 R, r 와 θ, ϕ 의 도함수를 이용해 나타내시오. (0.2 점)
- 1.3) m 의 질량중심에 대한 각가속도 $\frac{d^2}{dt^2}\theta$ 에 대한 식을 유도하고, $m, g, R, r, \theta, \frac{d^2}{dt^2}\phi$ 와 m 의 중심축에 대한 관성 모멘트 I_{CM} 을 이용해서 나타내시오. (1.8 점)



- 1.4) M 이 일정한 각속도로 회전할 때, m 의 작은 진동의 주기는 얼마인가? R, r, g 로만 답을 나타내시오. (1.3 점)
- 1.5) 문제 1.4 에서 평형 위치에서의 θ 의 값은 얼마인가? (0.2 점)
- 1.6) M 이 일정한 각속도 α 로 회전할 때, m 의 평형 위치는 얼마인가? 답을 R, g, α 로 나타내시오. (0.7 점)
- 1.7) 이제 M 은 구속 없이 자유롭게 중심축 OZ 에 대해 회전 (진동) 할 수 있으며, 이 때 m 은 M 의 안쪽 표면에서 순수한 구름 운동을 하면서 작은 진폭으로 진동하고 있다. 이 진동의 주기를 구하시오. (2.5 점)
- 1.8) M 이 각속도 Ω 로 일정하게 회전하고 있고, m 은 자신의 질량 중심에 대해 문제 1.5 에서 구한 평형 위치에서 (구르면서) 회전하고 있다고 하자. 그 때, M 이 갑자기 멈춘다고 하자. m 이 굴러서 M 의 원통 표면의 최고점에 도달하기 위한 최소 각속도 Ω 는 얼마인가? m 과 M 사이의 마찰계수는 충분히 커서, M 이 멈춘 후 m 은 매우 짧은 시간 동안만 미끄러진 후 다시 구르기 시작한다고 하자. (2.5 점)

Self-excited 자기장 다이나모

반지름 a 의 금속 원판이 가는 축에 끼여 있으며 인덕턴스가 L 인 긴 솔레노이드 내부에서 일정한 각속도 ω 로 회전하고 있으며, 솔레노이드의 두 끝은 그림과 같이 브러시 접촉으로 회전하는 원판에 연결되어 있다. 회로의 총 저항은 R 이다. 작은 자기장 섭동은 점 P, Q 사이의 유도 기전력을 키우는 것의 씨앗이 될 수 있다.



- 2.1) 회로에 흐르는 전류, $i(t)$ 에 대한 미분 방정식을 구하시오. 답을 L, R , 그리고 점 P, Q 사이 유도 기전력 ($\mathcal{E}$)로 나타내시오. (1.0 점)
- 2.2) 자기장 (B)를 i, N, l , 그리고 진공의 투자율 μ_0 로 나타내시오. 원판과 축에 의해 생기는 자기장은 무시하시오. (1.5 점)
- 2.3) 유도 기전력 ($\mathcal{E}$)을 μ_0, N, a, l, i , 그리고 각속도 ω 로 나타내시오. (2.0 점)
- 2.4) 문제 2.1에서 구한 방정식을 풀어 임의의 시간 t 에 흐르는 전류를 초기 전류 $i(0)$ 와 다른



변수들로 나타내시오.

(1.5 점)

2.5) 전류가 증가하게 되는 각속도의 최솟값은 얼마인가? 답을 R, μ_0, N, a, l 로 나타내시오.

(2.0 점)

2.6) 일정한 각속도 ω 를 유지하기 위해, 시간 t 에 축에 가해져야 하는 토크는 얼마인가?

(2.0 점)

라이덴프로스트(Leidenfrost) 현상

이 문제의 목적은 아래에 있는 매우 뜨거운 판으로부터 열이 전달되지 않도록 하는 매우 얇은 증기층 위에 있는 (반구형) 액체 방울의 수명을 계산하는 것이다.

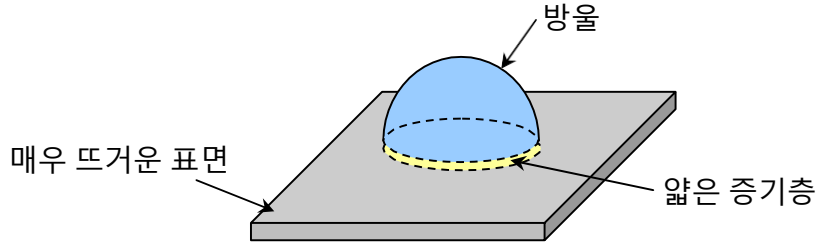


Figure 1

우리는 여기서 방울 밑에 있는 증기의 흐름은 층류이고, 점성 계수가 η , 열전도율이 κ 인 뉴턴 유체처럼 거동한다고 하자. 액체의 기화열은 l 이다. 또한 뉴턴 유체에서 층밀리기 변형력 $\frac{F}{A} = \eta \times$ 층밀리기 변형률 $\frac{dv}{dz}$ 이며, 여기서 v 는 흐름의 속도, z 는 흐름에 수직한 방향이고, F 의 방향은 면적 A 의 접선 방향이다.

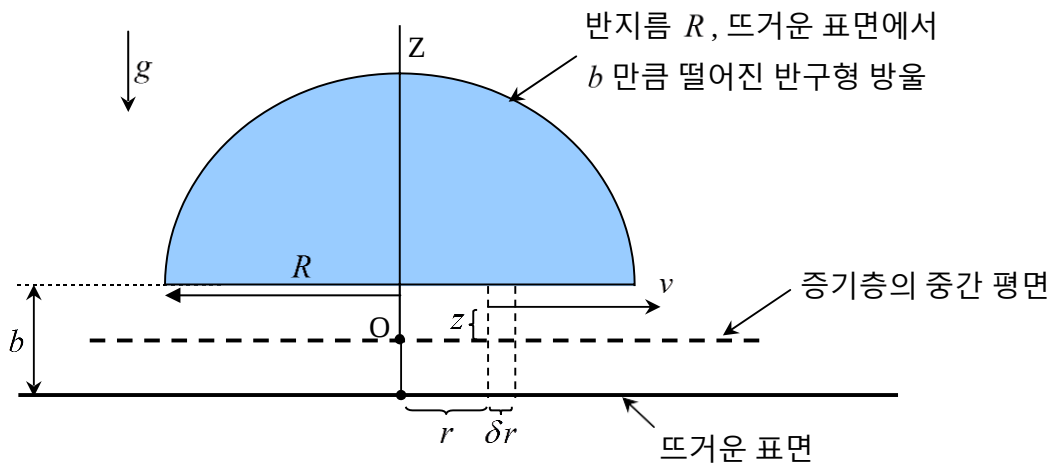


Figure 2

v 는 중간 평면에서 높이 z 인 지점에서 반지름 방향의 증기 속도이다. 증기 내부에서 압력 P 는 중심 O 에 가까워수록 커야 한다. 이 때문에 증기가 밖으로 흘러 나가고, 증기는 방울을 중력에 의해 떨어지지 않도록 잡아준다. 열 및 역학적 평형 상태에서 증기층의 두께는 b 이다.

뉴턴 유체인 증기에 대해 우리는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\frac{d}{dz} v = \frac{z}{\eta} \frac{d}{dr} P$$

3.1) $v(z) = \frac{z^2}{2\eta} \frac{d}{dr} P + C$ 임을 보이시오.

여기서 C 는 적분 상수이다.

(0.5 점)

3.2) Figure 2 를 참고해서, 경계조건 $z = \pm \frac{b}{2}$ 에서 $v = 0$ 을 이용해 C 를 $\eta, \frac{d}{dr} P, b$ 로 나타내시오.

(0.5 점)

3.3) r 로 정의되는 원통 표면으로 흘러 나가는 증기의 부피 흐름률을 계산하시오. (Hint: 원통은 방울 아래에 있고, 반지름 r , 높이 b 이다.)

(1.0 점)

3.4) 밀도 ρ_v 의 증기의 생성이 뜨거운 표면에서 방울로 전달되는 열의 흐름에 의한 것이라고 할 때, 압력 $P(r)$ 을 구하시오. 대기압은 P_a 로 나타내고, ΔT 는 뜨거운 표면과 방울 사이의 온도 차이라고 하자. 계는 정상 상태에 도달하였다고 가정하자.

(2.0 점)

3.5) 방울의 무게와 방울의 아래 위 압력차에 의한 알짜힘이 평형을 이룬다고 하고 b 를 계산하시오. 방울의 밀도는 ρ_0 이다.

(2.0 점)

3.6) 이제, 전체 기화 속도는 얼마인가?

(2.0 점)

3.7) 방울이 반구형을 유지한다고 할 때, 방울의 수명은 얼마인가?

(2.0 점)
