

이론 문제 1

입자와 파동

이 문제는 입자와 파동의 운동을 다루는 세 부분으로 구성되어 있다:

Part A. 입자들의 비탄성 산란

Part B. 줄에서의 파동

Part C. 팽창하는 우주에서 파동

Part A. 비탄성 산란과 입자의 복합성

어떤 입자가 질량 중심에 대한 회전 및 진동과 같은 들뜰 수 있는 내부 자유도가 없으면 *기본적*이라고 한다. 그렇지 않으면 *복합적*이라고 한다.

입자가 복합적이라는 것을 결정하려면, 그 입자를 타겟으로 하고 *기본적인* 입자가 산란되도록 하는 산란 실험을 설계하면 된다. 만약 타겟 입자가 복합적이라면, 산란 실험은 스케일링, 즉 산란된 입자의 진행방향 운동량이 증가하거나, 산란 단면적이 운동량에 의존하지 않는 등 여러 중요한 특징을 보이게 된다.

타겟 입자에 기본 입자가 입사하는 산란 실험에서, 우리는 계의 총 병진 운동 에너지 손실을 Q 라고 나타낼 것이다. 여기서 기본적인든 복합적이든 입자의 *병진 운동 에너지* 는 질량 중심의 병진 운동과 관련된 운동 에너지로 정의한다. 따라서 우리는 다음과 같이 적을 수 있다.

$$Q = K_i - K_f$$

여기서 K_i, K_f 는 산란되는 쌍의 각각 산란 전후의 총 병진 운동 에너지이다.

Part A 에서, 문제를 풀기 위해 비상대론적인 고전역학을 이용하시오. 중력에 의한 모든 효과는 무시할 수 있다.

- (a) Fig. 1 에 나타나 있듯이, 질량 m 의 *기본적인* 입자가 x 축을 따라 x 방향의 운동량 $p_1 > 0$ 을 가지고 움직이고 있다. 질량 M 의 *정지한* 타겟에 의해 산란된 이후, 운동량은 $\vec{p}_2$ 가 된다.

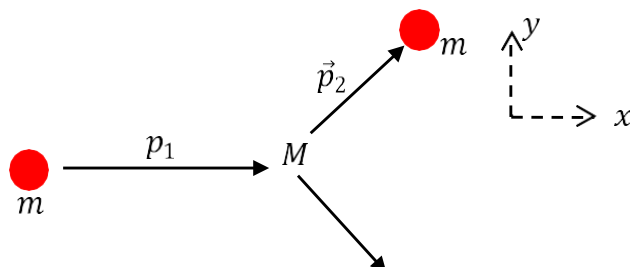


Fig. 1



$\vec{p}_2$ 에 대한 데이터로부터, 우리는 타깃 입자가 기본적인지 복합적인지 알 수 있다. 우리는 $\vec{p}_2$ 가 $x-y$ 평면 위에 존재한다고 가정하며, $\vec{p}_2$ 의 x, y 성분은 각각 p_{2x}, p_{2y} 라 하자.

(i) $m, M, p_1, p_{2x}, p_{2y}$ 로 Q 를 나타내시오. [0.2 점]

(ii) 만약 타깃 입자가 기본적이라면, 운동량 p_1, p_{2x}, p_{2y} 은 특정한 조건으로 관련되어 있다.

주어진 p_1 에 대해, 조건을 $p_{2x} - p_{2y}$ 평면에서 곡선으로 나타내시오. 곡선이 p_{2x} 축과 만나는 점들에 대해 p_{2x} 의 값을 명시하시오. 같은 도표에 $Q < 0, Q = 0, Q > 0$ 에 해당하는 $\vec{p}_2$ 의 영역을 표시하고, 각각이 어떠한 영역인지 나타내시오.

[0.7 점]

산란 전에 바닥 상태에 있는 정지한 복합적인 타깃에 대해, 허용된 $\vec{p}_2$ 에 해당되는 점들을 포함하는 Q 의 영역은 어디인가? [0.2 점]

(b) 이제, 질량이 각각 $\frac{1}{2}M$ 인 두 기본적인 입자로 이루어진 복합적 타깃을 생각하자. 두

입자는 질량을 무시할 수 있는 용수철로 연결되어 있다. Fig. 2를 보시오. 용수철의 힘 상수는 k 이고, 횡 방향으로 휘지 않는다. 처음에, 타깃은 질량 중심이 원점 O 에 있는 상태로 정지해 있으며, 용수철은 x 축에 대해 θ 만큼 기울어져 있으며 자연길이 d_0 인 상태이다. 문제를 간단히 하기 위해, 산란의 결과로 타깃에서 진동 및 회전 운동만 들뜰 수 있다고 하자.

질량이 m 인 입사하는 기본적인 입자는 산란 전후 각각 p_1, p_2 로 표시된 운동량을 가지고 x 축 방향으로 움직인다. 입자가 반발로 인해 뒤로 움직일 때는 p_2 가 음수임을 참고해라. 산란이 일어나려면 입사하는 입자가 타깃 입자 중 하나에 충돌하고 $p_2 \neq p_1$ 이어야 한다. 세 입자는 산란 전후에 모두 같은 평면에서 움직인다고 가정하자.

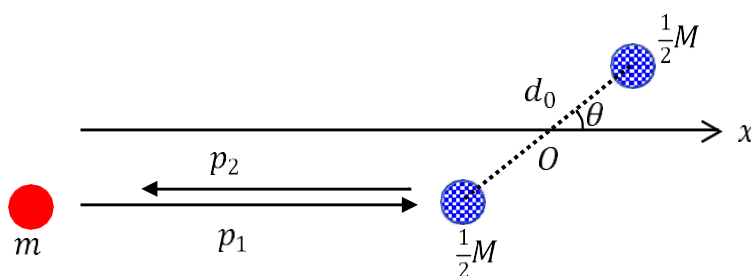


Fig. 2

(i) 만약 산란 이후 용수철의 최대 길이가 d_m 이라면, 비율 $x = (d_m - d_0) / d_0$ 를 $Q, \theta, d_0, m, k, M, p_1, p_2$ 로 나타내시오. [0.7 점]



(ii) $\alpha \equiv \sin^2 \theta$ 라 하자. 타깃의 배치 각도 θ 가 변할 수 있다면, 산란 단면적 σ 는 산란의 결과로 특정 결과가 나오게 되는 입사 방향과 수직한 평면 상에서의 타깃의 유효 단면적이 된다. 모든 결과가 같은 값 p_2 를 가지게 되면, α 의 값은 구간 $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$ 사이에 존재하며, 우리는 단면적의 단위를 잘 선택함으로써 σ 가 단순히 구간의 수치적인 길이 $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$ 이 되게 할 수 있는 것은 잘 알려져 있다. $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$ 은 p_2 에 의존하며, 그 결과 σ 도 p_2 에 의존한다. σ 가 p_2 에 의존하지 않게 되는 p_2 의 임계값을 p_c 라 하자.

k 가 매우 큰 상황에서 p_c 를 추정하시오. 답을 m, M, p_1 로 나타내시오. [1.1 점]

$M = 3m$ 이라 가정하고 k 가 매우 큰 상황에서, 주어진 p_1 에 대해 σ 를 p_2 의 함수로 그리시오. 그래프에서, σ 와 p_2 의 범위를 명시하시오. [1.1 점]

Part B. 줄에서의 파동

탄성이 있는 줄이 Fig. 3 에서처럼 두 고정된 끝 A, B 사이에서 늘어나 있다고 하자. 줄의 선 질량 밀도는 μ 이다. 줄에서 횡파의 전파 속도는 c 이다. 길이 $\overline{AB}$ 는 L 이다. 줄은 횡 방향으로 당겨져 중심에서 최대 높이 $h \ll L$ 인 삼각형 형태로 잡혀 있다. 시간 $t = 0$ 에서, 당겨진 줄은 정지상태에서 놓아진다. 중력에 의한 모든 영향은 무시할 수 있다.

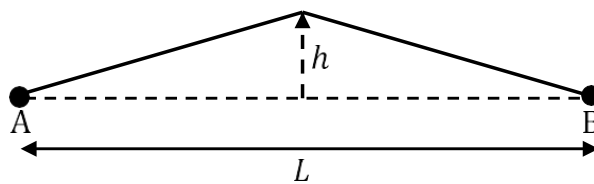


Fig. 3

(c) 줄에서 진동주기 T 를 계산하시오. [0.5 점]

시간 $t = T/8$ 에서 줄의 모양을 그리시오. 그림에서 줄의 모양을 정의하는데 필요한 길이와 각들을 명시하시오. [1.7 점]

(d) 진동하는 줄의 총 역학적 에너지를 μ, c, h, L 로 나타내시오. [0.8 점]



Part C. 팽창하는 우주

우주에서 광자는 정보를 전달하는데 중요한 역할을 하고 있다. 그러나, 이 광자로부터 정보를 얻기 위해서는 우주가 팽창하고 있다는 사실을 고려해야 한다. 이를 위해, 우리는 시간 t 에 의존하는 범우주적인 길이 인자 $a(t)$ 를 이용해서 길이와 거리를 표시한다. 이렇게 되면, 각각의 좌표계에서 정지해 있는 두 별 사이의 거리 $L(t)$ 는 $a(t)$ 에 비례한다:

$$L(t) = ka(t) \quad (1)$$

여기서 k 는 상수이고, $a(t)$ 는 우주의 팽창을 나타낸다. 우리는 특정 변수를 시간에 대해 미분한 것을 나타내기 위해 점을 위에 찍는다. 즉, $\dot{a}(t) = da(t)/dt$ 이고, $v(t) = \dot{L}(t)$ 이다. Eq. (1) 의 양변을 시간으로 미분하면 다음의 허블 법칙을 얻을 수 있다:

$$v(t) = H(t)L(t) \quad (2)$$

여기서 $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ 는 시간 t 에서의 허블 인자이다. 현재 시각 t_0 에서, 우리는

$$H(t_0) = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

여기서 $1 \text{ Mpc} = 3.0857 \times 10^{19} \text{ km} = 3.2616 \times 10^6 \text{ light-year}$ 이다.

우주는 무한히 넓고 다음과 같이 팽창한다고 하자.

$$a(t) \propto \exp(bt)$$

여기서 b 는 상수이다. 이러한 우주에서 허블 인자는 $H(t_0)$ 와 값이 같은 상수이다. 게다가, 우주 내에서 광자의 파장 λ 는 우주의 팽창에 의해 다음과 같이 비례적으로 증가한다.

$$\lambda(t) \propto a(t)$$

이제 국소적인 좌표계에서 정지해 있는 별에서 시간 t_e 에 라이먼 $-\alpha$ 계열의 광자가 방출되었으며, 관찰자도 국소적인 좌표계에서 정지해 있다고 하자. 이 광자들이 방출되었을 때, 파장은 $\lambda(t_e) = 121.5 \text{ nm}$ 이었다. 하지만, 시간 t_0 에 광자들이 우리에게 도달했을 때에는 파장이 145.8 nm 로 적색 편이 되었다.

- (e) 광자가 이동하면서, 우주는 계속 팽창하기 때문에 별은 계속 멀어진다. 진공에서 빛의 속력 c 는 변하지 않았다고 했을 때, 광자가 시간 t_e 에 방출되었을 때 별과 관찰자 사이의 거리 $L(t_e)$ 는 얼마였는가? 답을 Mpc 단위로 나타내시오. [2.2 점]
- (f) 현재 시각 t_0 일 때, 별이 멀어지는 속도 $v(t_0)$ 는 얼마인가? 답을 진공에서 빛의 속력 c 를 단위로 해서 나타내시오. [0.8 점]



부록

필요할 경우, 다음 식을 사용할 수 있다:

$$\int_a^b e^{\beta x} dx = \frac{1}{\beta} (e^{\beta b} - e^{\beta a})$$

이론 문제 2

저항이 있는 강한 전자석

저항이 있는 전자석은 구리와 알루미늄과 같은 일반적인 금속으로 만들어진 코일로 이루어진 전자석이다. 현대의 강한 저항이 있는 전자석은 30 T 이상의 강한 자기장을 안정적으로 공급할 수 있다. 이 코일들은 냉각 구멍이 많이 뚫려있는 얇은 원형의 구리 판 수백개를 쌓음으로써 만들어지며, 같은 패턴으로 절연체도 배치되어있다. 코일에 전압이 가해져 있으면, 전류가 판들을 따라 나선 궤도로 흐르며 자석의 중심에서 강한 자기장을 형성한다.

이 문제에서 많은 감은 수의 원통형 코일 (또는 솔레노이드) 강한 자기장을 만드는 자석으로 작용할 수 있는지 보는 것이다. Fig. 1 에서 보듯이, 자석의 중심은 O이다. 원통형 코일은 감은 횟수가 N 회인 구리 전선으로 이루어져 있으며 전류 I 는 전선의 단면적을 따라 균일하게 흐르고 있다. 코일의 평균 지름은 D 이고, 축 방향인 x 방향의 길이는 ℓ 이다. 전선의 단면은 폭 a , 높이 b 의 직사각형이다. 코일은 너무 촘촘히 감겨져 있어 각 회전을 포함하는 평면은 x 축에 수직하고 $\ell = Na$ 이다. Table 1 에는 코일의 물리적인 특성들이 나타나 있다.

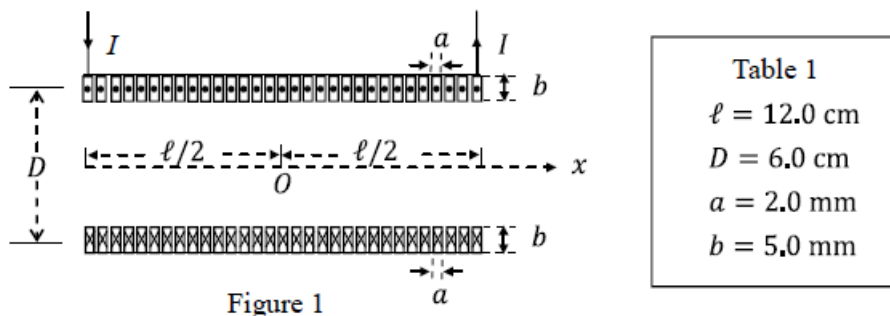


Figure 1

이러한 자석이 강한 자기장을 제공하는데 쓰이기 위해서는 두 가지 한계점을 고려해야 한다. 하나는 장을 만드는 전류에 작용하는 강한 로렌츠 힘을 견딜 수 있는 물리적인 견고함이다. 다른 하나는 전선에서 생성되는 막대한 줄열에 의해 온도가 많이 올라가면 안된다. 우리는 간략화된 모델을 통해 이러한 두 요소를 확인해볼 것이다.

이 문제의 끝 부분에 있는 부록에는 필요할 때 쓸 수 있는 몇몇 수학 공식과 물리량 데이터가 있다.

Part A. 코일 축 상의 자기장

$b \ll D$ 라고 가정하면 전선을 폭 a 의 얇은 끈으로 생각할 수 있다. O 는 x 좌표의 원점이다. 전류의 방향은 Fig. 1 에 나타나 있다.

- (a) 코일을 따라 정상전류 I 가 흐르고 있을 때, 코일의 축에서 자기장의 x 성분 $B(x)$ 를 x 의 함수로 구하시오. [1.0 점]
- (b) $B(0)$ 가 10.0 T 일 때, 코일에 흐르는 정상 전류 I_0 를 구하시오. 수치값을 계산할 때, Table 1 에 있는 데이터를 사용하시오. [0.4 점]

Part B. 전류의 상한값

Part B 에서 우리는 코일의 길이 ℓ 이 무한하고 $b \ll D$ 라고 가정하자. $x = 0$ 에 위치한 코일의 바퀴를 고려하자. 이 전선을 따라 흐르는 전류에 자기장이 로렌츠 힘을 가한다. 따라서, Fig. 2 에서 보듯이, 길이 Δs 의 전선 조각은 바퀴의 크기가 커지게 하는 수직 방향의 힘 ΔF_n 을 받게 된다.

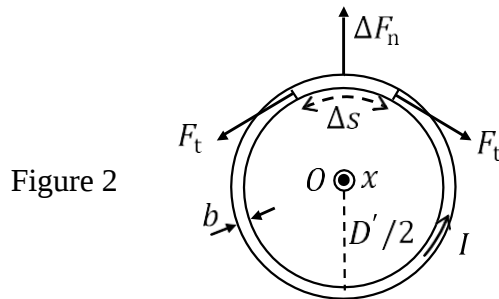


Figure 2

- (c) 전류가 I 일 때, 팽창한 코일의 평균 지름이 Fig. 2 에서 보듯이 D 보다 큰 D' 로 일정하다고 가정하자.
단위 길이당 밖으로 향하는 수직 방향의 힘 $\Delta F_n / \Delta s$ 를 구하시오. [1.2 점]
전선을 따라 작용하는 장력 F_t 를 구하시오. [0.6 점]
- (d) 팽창 과정 동안 코일의 가속도를 무시하자. 전선의 단위 팽창률 (즉, 인장력 방향 변형 또는 길이 변화 비율) 이 60 %이면 전선이 파괴되고, 인장력 방향 변형률 (즉, 변형되지 않은 전선의 단위 단면적 당 장력) 은 $\sigma_b = 455 \text{ MPa}$ 이다. 전선이 파괴될 때 전류를 I_b , 이 때의 중심 O에서 자기장을 B_b 라 하자.
 I_b 에 대한 표현식을 구하고, 값을 계산하시오. [0.8 점]
 B_b 에 대한 표현식을 구하고, 값을 계산하시오. [0.4 점]

Part C. 온도 상승 속도

- 전류 I 가 10.0 kA 이고, 코일의 온도 T 는 293 K 일 때, 코일 전선의 비저항, 정압비열, 질량 밀도는 각각 $\rho_e = 1.72 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, $c_p = 3.85 \times 10^2 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, $\rho_m = 8.98 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 이다.
- (e) 코일에서 열 발생을 나타내는 일률 밀도 (즉, 단위 부피당 일률) 에 대한 표현식을 구하고 값을 계산하시오. Table 1 에 있는 데이터를 이용하시오. [0.5 점]

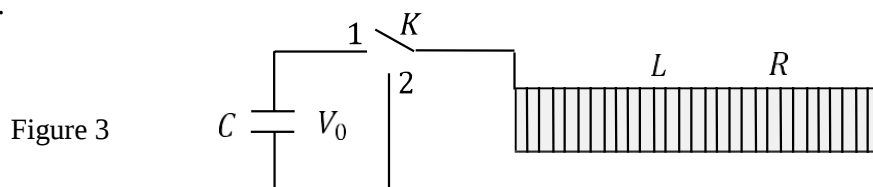
(f) 코일에서 시간에 따른 온도 변화를 $\dot{T}$ 라 하자. $\dot{T}$ 의 표현식을 구하고 값을 계산하시오.

[0.5 점]

Part D. 펄스 형 장을 만드는 자석

만약, 짧은 시간 동안에만 지속되는 강한 자석을 위해 큰 전류가 필요한 경우, 많은 줄열에 의한 온도 상승은 크게 줄어 들 수 있다. 이 아이디어는 펄스 형 장을 만드는 자석에서 사용되었다.

따라서, Fig. 3 에서 보듯이, 전기용량 C 의 축전기는 처음에 전압 V_0 에 의해 충전되어 코일을 따라 전류 I 가 흐르도록 한다. 회로에는 스위치 K 가 존재한다. 회로의 인덕턴스 L 과 저항 R 은 모두 코일에 의한 것이라고 가정하자. 코일의 모습과 크기는 Fig. 1 과 Table 1 에서 주어진 것과 동일하다. R, L, C 는 온도에 무관하고, 자기장은 $\ell \rightarrow \infty$ 인 무한 솔레노이드와 동일하다고 가정하자.



(g) 인덕턴스 L 과 저항 R 에 대한 표현을 구하시오.

[0.6 점]

L, R 의 값을 계산하시오. Table 1 에 주어진 데이터를 이용하시오.

[0.4 점]

(h) 시간 $t = 0$ 일 때, 스위치 K 는 1 에 연결되고 전류가 흐르기 시작한다. $t \geq 0$ 동안, 축전기의 (+) 극판의 전하량 $Q(t)$ 와 (+) 극판에 들어오는 전류 $I(t)$ 는 다음과 같다:

$$Q(t) = \frac{CV_0}{\sin \theta_0} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \theta_0) \quad (1)$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \left(\frac{-\alpha}{\cos \theta_0} \right) \frac{CV_0}{\sin \theta_0} e^{-\alpha t} \sin \omega t \quad (2)$$

여기서 α, ω 는 양의 상수이며, θ_0 는 다음과 같이 주어진다:

$$\tan \theta_0 = \frac{\omega}{\alpha}, \quad 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

만약 $Q(t)$ 를 새로운 변수 $t' \equiv (t + \theta_0 / \omega)$ 의 함수로 표현하면, $Q(t')$ 과 이를 시간으로 미분한 $I(t)$ 는 상수 배 차이만 나고 형태는 동일하다는 것을 명심하라. 따라서 $I(t)$ 의 시간 미분은 별도의 미분 과정 없이 쉽게 구할 수 있다.

α, ω 를 R, L, C 로 나타내시오.

[0.8 점]

C 가 10.0 mF 일 때, α, ω 의 값을 계산하시오.

[0.4 점]



- (i) $t > 0$ 일 때, $|I(t)|$ 의 최대값을 I_m 이라 하자. I_m 에 대한 표현을 구하시오. [0.6 점]
- $C = 10.0 \text{ mF}$ 일 때, I_m 이 문제 (d)에서 구한 I_b 를 넘지 않기 위한 축전기의 초기 전압 V_0 의 최대값 V_{0b} 는 얼마인가? [0.4 점]
- (j) 스위치 K 가 전류의 절댓값 $|I(t)|$ 가 I_m 이 되었을 때, 순식간에 1에서 2로 연결된다고 하자. $t = 0$ 에서부터 ∞ 까지 코일에서 손실된 총 에너지를 ΔE 라 하고, 그에 대응하는 코일이 온도 상승량을 ΔT 라 하자. 초기 전압 V_0 는 문제 (i)에서 구한 최대값 V_{0b} 라 가정하고, 전자기 에너지는 코일에서 열의 형태로만 손실된다고 하자.
- ΔE 에 대한 표현을 구하고 값을 계산하시오. [1.0 점]
- ΔT 에 대한 표현을 구하고 값을 계산하시오. ΔT 의 값은 R, L 이 상수라는 가정과 잘 맞아야 하는 것을 명심하시오. [0.4 점]

부록

1. $\int_0^L \frac{dx}{(D^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{D^2} \left\{ \frac{L}{(D^2 + L^2)^{1/2}} \right\}$
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
3. 진공의 투자율 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$

----- 끝 -----



이론 문제 3

액체에서 전자 및 기체 방울

이 문제는 액체 내에서 두 가지 종류의 방울을 다룬다. 이 문제는 두 개로 이루어져 있다:

Part A. 액체 헬륨 내의 전자 방울

Part B. 액체 내의 단일 기체 방울

Part A. 액체 헬륨 내의 전자 방울

액체 헬륨 내에 전자가 위치하는 경우, 전자는 액체 헬륨의 원자를 밀어내고 **전자 방울**을 형성한다. 이 방울은 오직 전자 그 자체만을 포함한다. 우리는 이 방울의 크기와 안정성에 대해 논할 것이다.

우리는 어떤 물리량 f 의 불확실도를 Δf 라고 할 것이다. 전자의 위치 벡터 $\vec{q} = (x, y, z)$ 와 운동량 벡터 $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 의 성분들은 하이젠베르크의 불확정성 원리 $\Delta q_\alpha \Delta p_\alpha \geq \hbar / 2$ 를 만족해야 하며, 여기서 $\hbar$ 는 플랑크 상수를 2π 로 나눈 것이며 $\alpha = x, y, z$ 이다.

우리는 전자 방울이 등방적이고, 액체 헬륨과의 경계면은 구면이라고 가정하자. 액체 헬륨은 온도가 0 K 근처로 유지되며, 표면장력은 $\sigma = 3.75 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 이고, 전자 방울에 의한 정전기적 반응은 무시할 수 있다.

액체 헬륨 내에 있는 평형 반지름이 R 인 전자 방울을 생각하자. 질량이 m 인 전자는 방울 내에서 운동 에너지 E_k 를 가지고 자유롭게 움직이면서 방울-액체 경계의 안쪽 면에 압력 P_e 를 가한다. 경계의 다른 쪽 면에 액체 헬륨에 의해 가해지는 압력은 P_{He} 이다.

(a) $P_{\text{He}}, P_e, \sigma$ 사이의 관계를 구하시오. [0.4 점]

E_k, P_e 사이의 관계를 구하시오. [1.0 점]

(b) 전자가 반지름 R 의 방울 내에 있을 때, 불확정성 원리에 부합하는 E_k 의 최솟값을 E_0 라 하자. E_0 를 R 의 함수로 추정하시오. [0.8 점]

(c) $E_k = E_0$ 이고, $P_{\text{He}} = 0$ 일 때, 방울의 평형 반지름을 R_e 라 하자.

R_e 에 대한 표현을 구하고 값을 계산하시오. [0.6 점]

(d) 평형 반지름 R 이 일정한 압력 P_{He} 하에서 안정하기 위해 R, P_{He} 가 만족해야 하는 조건을 구하시오. P_{He} 가 음수일 수 있다는 것을 명심하시오. [0.6 점]

(e) P_{He} 이 P_{th} 보다 작은 경우, 전자 방울이 평형을 이룰 수 없게 되는 임계값 P_{th} 가 존재한다. P_{th} 에 대한 표현을 구하시오. [0.6 점]

Part B. 액체 내의 단일 기체 방울 – 붕괴와 방사

이 문제에서 우리는 물과 같은 정상적인 액체를 다룰 것이다.

액체 내의 기체 방울이 진동하는 압력의 영향을 받고 있는 경우, 극적인 현상들을 볼 수 있다. 예를 들어, 크게 팽창하다가, 갑자기 수축에서 반지름이 작아지고, 붕괴가 끝날 때가 되면 순간적으로 빛을 방출한다. *Single-bubble sonoluminescence* 라고 불리는 이 현상에서, 기체 방울은 보통 팽창, 붕괴, 그리고 여러 번의 반발의 세 단계로 이루어진 순환을 따르게 된다. 아래에서 우리는 붕괴 단계에 초점을 맞출 것이다.

우리는 매 순간마다 방울은 구형이고 중심이 액체 내부에서 정지해 있다고 가정할 것이다. Fig 1 을 보시오. 방울의 크기가 줄어들 때, 압력, 온도, 밀도는 내부에서 균일하다. 방울이 포함되어 있는 액체는 등방적이고, 점성이 없으며, 비압축성이고, 방울에 비해 양이 매우 많다고 하자. 모든 중력과 표면 장력에 대한 효과는 무시하기 때문에 방울-액체 경계의 양쪽에서 압력은 **항상 같다고** 볼 수 있다.

● 방울-액체 경계의 지름 방향 운동

방울의 반지름 $R = R(t)$ 가 시간 t 에 따라 변하면, 방울-액체 경계가 지름 방향 속도 $\dot{R} \equiv dR / dt$ 로 움직인다. 비압축성 액체에 대한 연속 방정식에 의하면 방울의 중심에서 거리 r 떨어진 지점에서 액체의 지름 방향 속도 $\dot{r} \equiv dr / dt$ 는 방울의 부피 V 의 변화 속도와 다음과 같이 연관되어 있다.

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \dot{R} = 4\pi r^2 \dot{r} \quad (1)$$

이는 질량 밀도가 ρ_0 인 액체의 총 운동 에너지 E_k 가 다음과 같음을 시사한다.

$$E_k = \frac{1}{2} \int_R^{r_0} \rho_0 (4\pi r^2 dr) \dot{r} = 2\pi \rho_0 R^4 \dot{R}^2 \int_R^{r_0} \frac{1}{r^2} dr = 2\pi \rho_0 R^4 \dot{R}^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (2)$$

여기서 r_0 는 액체의 바깥쪽 표면의 반지름이다.

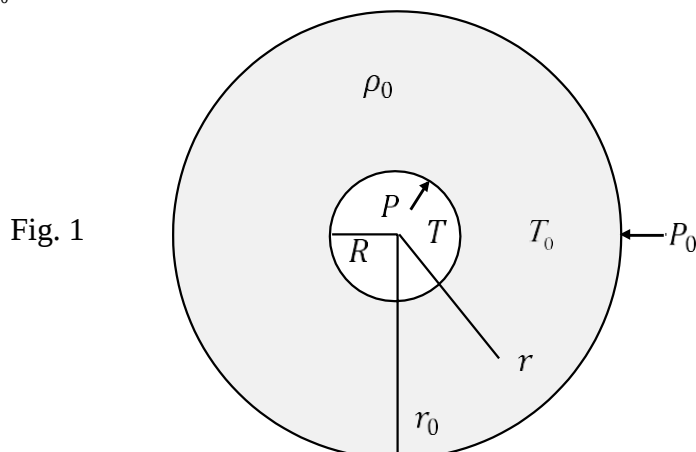


Fig. 1



- (f) 액체의 바깥쪽 표면에 일정한 주변 압력 P_0 가 작용한다고 하자. 방울의 반지름이 R 일 때, $P = P(R)$ 을 기체의 압력이라고 하자.

방울의 반지름이 R 에서 $R + dR$ 로 변할 때, 액체에 가해진 일 dW 를 구하시오. dW 를 P_0, P 로 나타내시오. [0.4 점]

일 dW 는 대응되는 액체의 총 운동 에너지의 변화량과 같아야 한다. $r_0 \rightarrow \infty$ 인 극한에서, 베르누이 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{2} \rho_0 d(R^m \dot{R}^2) = (P - P_0) R^n dR \quad (3)$$

Eq. (3) 에서 지수 m, n 을 구하시오. 필요한 경우 차원 분석을 이용하시오. [0.4 점]

● 기체 방울의 붕괴

여기서부터, 우리는 방울의 붕괴 단계만을 다룰 것이다. 액체의 질량 밀도는 $\rho_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 온도 T_0 는 300 K, 주변 압력 P_0 는 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 이다. 우리는 ρ_0, T_0, P_0 는 일정하고, 방울은 방울-액체 경계에서 질량의 교환 없이 **단열적으로** 붕괴한다.

방울은 이상 기체로 가득 차 있다. 기체의 비열비는 $\gamma = 5/3$ 이다. 온도 T_0 와 압력 P_0 하에서 방울의 평형 반지름을 $R_0 = 5.00 \mu\text{m}$ 이다.

이제 이 방울 시간 $t = 0$ 에 $R(0) = R_i = 7R_0, \dot{R}(0) = 0$ 이고, 기체 온도가 $T_i = T_0$ 인 상태로 붕괴 단계에 돌입한다. 앞선 단계에서 방울의 팽창에 의해, R_i 는 R_0 보다 훨씬 크며, 이 조건은 sonoluminescence 가 일어나기 위해 필요하다는 것을 명심하라.

- (g) 붕괴 단계 동안, 방울 안의 이상기체의 압력 $P \equiv P(R)$ 과 온도 $T \equiv T(R)$ 을 준정적 조건 하에서 R 의 함수로 구하시오. [0.6 점]

- (h) $\beta \equiv R / R_i, \dot{\beta} = d\beta / dt$ 라 하자. Eq. (3) 은 다음과 같은 형태의 보존 법칙을 시사한다.

$$\frac{1}{2} \rho_0 \dot{\beta}^2 + U(\beta) = 0 \quad (4)$$

$P_i \equiv P(R_i)$ 를 $R = R_i$ 일 때의 기체 압력이라 하자. 만약 우리가 $Q \equiv P_i / [(\gamma - 1)P_0]$ 을 도입하면, 함수 $U(\beta)$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$U(\beta) = \mu \beta^{-5} [Q(1 - \beta^2) - \beta^2(1 - \beta^3)] \quad (5)$$

계수 μ 를 R_i, P_0 로 나타내시오. [0.6 점]

- (i) R_m 을 붕괴 단계에서 방울의 최소 반지름이라 하고, $\beta_m \equiv R_m / R_i$ 라 정의하자. $Q \ll 1$ 이면, $\beta_m \approx C_m \sqrt{Q}$ 이다.

상수 C_m 을 구하시오. [0.4 점]



$R_i = 7R_0$ 일 때, R_m 를 구하시오. [0.3 점]

$\beta = \beta_m$ 일 때, 기체의 온도 T_m 을 구하시오. [0.3 점]

- (j) $R_i = 7R_0$ 라 하자. β_u 를 무차원 지름 방향 속력 $u \equiv |\dot{\beta}|$ 가 최대일 때 β 의 값이라 하자. β 가 β_u 근처의 값을 가질 때, 기체의 온도는 급격히 상승한다.

β_u 에 대한 표현을 구하고 값을 추정하시오. [0.6 점]

$\bar{u}$ 를 $\beta = \bar{\beta} \equiv (\beta_m + \beta_u) / 2$ 일 때 u 의 값이라 하자. $\bar{u}$ 를 계산하시오. [0.4 점]

β 가 β_u 에서 최솟값 β_m 까지 줄어드는데 걸리는 시간 Δt_m 에 대한 표현을 구하고 값을 추정하시오. [0.6 점]

● 붕괴하는 방울의 Sonoluminescence

방울이 일정한 복사율 a 를 가지는 흑체 복사체이고, 유효 슈테판-볼츠만 상수를 $\sigma_{\text{eff}} = a\sigma_{\text{SB}}$ 라 하자. 만약 붕괴 단계가 단열로 근사된다면, 복사율을 매우 작아서 $\beta = \bar{\beta}$ 일 때, 방출되는 일률은 구동력을 가하는 액체 압력에 의해 공급되는 일률 $\dot{E}$ 의 20 %라 하자.

- (k) 방울에 공급되는 일률 $\dot{E}$ 을 β 의 함수로 구하시오. [0.6 점]

a 의 상한값에 대한 표현을 구하고 그 값을 추정하시오. [0.8 점]

부록

1. $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
2. 전자의 질량 $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
3. 플랑크 상수 $h = 2\pi\hbar = 2\pi \times 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
4. 슈테판-볼츠만 상수 $\sigma_{\text{SB}} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

끝