

이론 문제 1: Shockley-James 역설

1905 년, 알버트 아인슈타인은 뉴턴 역학과 맥스웰의 전자기학 사이의 불일치를 해결하기 위해 특수 상대성 이론을 제안한다. 이 이론에 대한 정확한 이해는 많은 역설들을 해결하는데 도움을 주었다. 당시의 토론은 대부분 전자기파의 진행에 초점이 맞추어져 있었다.

이 문제에서, 우리는 다른 종류의 역설을 해결할 것이다. W.Shockley 와 R.P. James 에 의해 1967 년에 제시된 간단한 전하계에 대해서 운동량 보존을 이해하는 데에는 상대론적 분석이 필요하다. 만약 점전하가 자화 정도가 변하는 자석 주변에 위치한 경우, 전하에는 유도된 전기장에 의한 힘이 작용하지만, 자석은 아무런 반응이 없는 것처럼 보인다. 이 과정은 전자기파 방사 (그리고 이에 실려가는 운동량) 은 무시할 수 있을 정도로 느리다고 하자. 그렇게 되면, 우리는 겉보기 상으로는 반발이 없는 대포를 얻게 된다.

이 계를 분석하는 과정에서, 우리는 상대론적 역학을 이용할 것이며, 이 때문에 내부 구조가 존재하는 물체는 정지해 있는데도 불구하고 영이 아닌 역학적 운동량을 가질 수 있다.

Part I: 점전하에 작용하는 충격량에 대한 이해 (3.3 점)

반지름 r 의 전류 고리에 전류 I_1 이 흐르고, 반지름 $R \gg r$ 의 큰 고리가 앞의 고리와 동심이고 같은 평면 상에 있는 상황을 생각하자.

- (1 점) 고리 2 (더 큰 고리) 를 따라 흐르는 전류 I_2 가 고리 1 에 자속 Φ_{B1} 을 만든다. 비율 $M_{21} = \Phi_{B1} / I_2$ 을 구하시오. 이는 상호 유도 계수라고 불리는 값이다.
- (0.8 점) $M_{12} = \Phi_{B2} / I_1$ 이라고 주어졌다고 했을 때, 작은 고리에 흐르는 전류의 변화 $\dot{I}_1 = dI_1 / dt$ 에 의해 큰 고리에 유도되는 총 EMF ε_2 를 구하여라. *힌트: 유도되는 EMF 는 고리를 통과하는 자속의 변화와 동일하다.*
- (0.5 점) 파트 (b)에서 구한 EMF 는 유도 전기장의 접선 방향 성분에 의한 것이다. 반지름 R 에서의 접선 방향 전기장 E 에 대한 표현을 전류의 변화 $\dot{I}_1$ 의 함수로 구하시오.

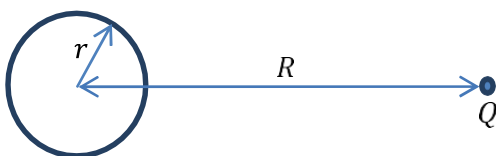


Figure 1: 원형 고리와 점전하 Q

우리는 이제 큰 전류 고리를 제거하고, Figure 1 처럼 거리 R 떨어진 곳에 매우 큰 점전하 Q 를 놓을 것이다. 점전하는 문제와 관련된 시간 간격 동안 매우 조금만 움직인다고 가정할 수 있다.

- d. (1 점) 작은 고리에 흐르는 전류가 초기값 $I_1 = I$ 에서부터 최종값 $I_1 = 0$ 로 변할 때, 점전하가 받는 총 접선 방향 충격량 Δp 를 구하시오.

Part II: 전류 고리의 반발에 대한 이해 (4.4 점)

우리는 이제 고리의 반발의 원리를 다른 모양의 고리를 이용해 이해 해볼 것이다.

- e. (1.1 점) 길이 l , 단면적 A 의 중성 절연체로 이루어진 벽이 있는 속이 빈 관을 따라 전류 I 가 흐르는 상황을 고려하자. 전류는 관 내부의 균일하게 분포된 개수 밀도가 n 인 정지 질량 m , 전하량 q 의 대전 입자에 의한 것이다. 대전 입자들이 관 내부를 따라 같은 속도로 움직인다고 가정하자. 특수 상대론적 효과를 고려해서, 관 내부 대전 입자들의 총 운동량 p 를 구하시오.
- f. (3.3 점) 변의 길이가 l 인 사각형 전류 고리를 고려하자. 고리에서 거리 $R \gg l$ 떨어진 곳에, 점전하 Q 가 있다; Figure 2 를 보시오. 관에는 전류 I 가 흐른다. 우리는 파트 (e)에서처럼 전류 고리를 중성 관으로 볼 것이다. 전하 운반자들은 관 내부를 따라 자유롭게 움직일 수 있으며, 벽과 탄성적으로 충돌하고 코너에서도 탄성적으로 충돌하며 직각으로 회전한다. 전하 운반자 사이 모든 상호작용은 무시하시오. 주어진 구간에서 모든 전하 운반자들은 관을 따라 모두 같은 속도로 움직인다고 가정하자. 또한 관은 매우 무겁고, 관의 운동은 무시할 수 있다고 가정하자. 관 내부 전하 운반자들의 총 운동량 p_{hid} 를 구하시오. 이는 “숨겨진 운동량”이라고 불린다.

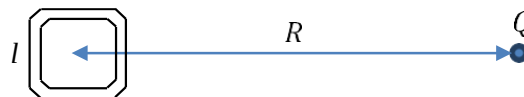


Figure 2: 사각 전류 고리와 점전하 Q

전류가 멈추게 되면, 이 운동량은 고리에 전달되면서 고리는 점전하 Q 가 받는 충격량과 부호만 다른 충격량을 받게 된다. 이것이 바로 우리가 찾고 있던 없어진 반발이다. (초기 상태에 전자기장에 저장된 운동량도 있다는 것을 명심하라; 이는 계 전체의 총 운동량의 보존에 중요하다.)

Part III: 결과 요약 (2.3 점)

- g. (0.8 점) 전류 고리는 주로 자기 모멘트 $\mu = IS$ 로 특징지어지며, 여기서 I 는 전류, S 는 고리의 면적이다. 파트 (d)의 답을 μ, r, R, Q 로 나타내시오. 마찬가지로 파트 (f)의 답도 μ, I, R, Q 로 나타내시오. 전기적인 상수와 자기적인 상수 사이에는 다음과 같은 관계가 성립함을 명심하라:

$$\frac{4\pi k}{\mu_0} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

여기서 c 는 빛의 속력이다.

- h. (1.5 점) 좀 더 현실적인 모델에서, 전류 고리는 전도성 전선이며, 점전하 Q 에 의한 장은 전도체 내부로 들어갈 수 없다. 우리는 전선 내부의 전하 운반자에 의해 전류가 흐른다고 가정할 것이다. 아래의 명제들의 참 거짓을 따지고, 답안지의 맞는 곳에 동그라미를 그리시오. **Note:** 명제의 참 거짓을 결정하지 않을 수는 있지만, 만약 잘못 결정하는 경우, 파트 (h)에 배정된 모든 점수를 얻지 못하게 된다.
- A. (0.5 점) 전류 고리의 운동량은 0 이다.
- B. (0.5 점) 고리에 흐르는 총 전류가 I 에서 0 으로 바뀌는 동안, 전하 운반자들은 감속하며, 전선의 전도성 물질에 유도된 전류가 흐르도록 한다. 이 유도된 전류에 의해, 점전하 Q 는 충격을 받지 않게 된다.
- C. (0.5 점) 외부 전하에 의해 유도된 전선의 표면 전하들이 전류가 I 에서 0 으로 줄어들면서 전기력을 느끼게 된다. 이러한 과정에 의해, 전류는 파트 (f)에서 구한 것과 같은 충격을 받게 된다.

이론 문제 2: 삐걱거리는 문

삐걱거리는 현상은 매우 흔하며, 문, 장롱, 칠판 위에서 삐걱거리는 분필, 바이올린 연주, 새 신발, 자동차 브레이크, 그 외 일상에서 볼 수 있는 여러 다른 계에서 볼 수 있다. 여기 이스라엘에서는, 비슷한 현상이 몇 십 년의 주기를 가지고 발생하는 강진의 원인이 된다. 이들은 사해의 단층에서 기인하며, 이는 지각에서 알려진 가장 깊은 갈라짐 위에 존재한다.

삐걱거림의 물리적인 메커니즘은 탄성과 함께 정지 마찰 계수와 운동 마찰 계수 사이의 차이에서 비롯된다. 이 문제에서, 우리는 이 메커니즘을 탐구하고, 열리는 문에 대해 적용할 것이다.

Part I: 일반적인 모델 (7.5 점)

다음 계를 고려하자. (Figure 1 을 보시오.):

질량 m 의 박스가 용수철 상수 k 의 긴 이상적인 용수철에 달려있으며, 용수철의 다른 쪽 끝은 일정한 속도 u 로 당겨지고 있다. 박스와 바닥 사이 정지 마찰 계수와 운동 마찰 계수는 각각 μ_s, μ_k ($\mu_k < \mu_s$) 이다.

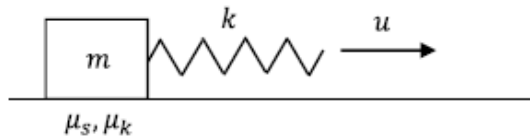


Figure 1: 삐걱거림에 대한 일반적인 모델

우리는 이 계가 왜 두 가지 운동을 보이는지 이해할 것이다.

1. 운동 마찰만 작용한다. 이는 **순수한 미끄러짐** 모드로 알려져 있다.
 2. 운동 마찰과 정지 마찰이 번갈아 작용한다. 이는 **부착-미끄러짐** 모드로 알려져 있다. 부착-미끄러짐 운동은 자주 들을 수 있는 삐걱거리는 소리의 원천이다.
- a. (1 점) 초기 시간 $t = 0$ 일 때, 박스가 바닥 위에서 속도 v_0 로 미끄러지고, 용수철의 탄성력이 운동 마찰력과 정확히 평형을 이루는 상황을 고려하자. $0 < v_0 < u$ 라고 가정하자. **용수철의 늘어난 길이** x 는 시간의 함수 t 로 진동할 것이다.
- a1. (0.6 점) 이 진동의 주기 T_0 와 진폭 A 를 구하시오.
 - a2. (0.4 점) 용수철의 늘어난 길이 $x(t)$ 의 그래프를 $0 < t < 3T_0$ 의 구간에서 그래프를 정성적으로 그리시오.
- b. (1.2 점) 이제, $t = 0$ 에 박스가 정지해 있는 상태에서 초기 용수철의 늘어난 길이 x 는 파트 (a)와 동일한 상황을 고려하자. **바닥에 대한** 박스의 속도 $v(t)$ 의 그래프를 $0 < t < 3T$ 의 구간에서 정성적으로 그리시오. 여기서 T 는

$x(t)$ 의 (새로운) 진동 주기이다. v 가 양수인 것은 오른쪽으로 움직이고 있다는 것을 의미한다. 그래프에 수평선 $v = u$ 를 대략적으로 그리시오.

- c. (0.5 점) 파트 (b)에서 주어진 초기 조건에 대해, 충분한 시간이 지난 후 용수철의 늘어난 길이의 시간 평균값 $\bar{x}$ 를 구하시오.
- d. (2.4 점) 파트 (b)의 조건 하에서, $x(t)$ 의 진동 주기 T 를 구하시오.

일반적으로, 부착-미끄러짐 운동은 높은 구동 속도 u 에서 멈추게 된다. 우리는 이 현상에 대한 한 가지 가능한 메커니즘을 논할 것이다.

- e. (2.4 점) 각 주기 T 에 대해, 작은 양의 에너지가 용수철에서 추가적인 메커니즘에 의해 열로 손실된다고 하자. $\eta = |AA/A|$ 를 주기 당 순수 미끄러짐 운동에 의해 손실되는 진폭의 비라고 하자. $\eta \ll 1$ 인 경우, 더 높은 속도에서는 주기적인 부착-미끄러짐이 불가능해 지는 임계 구동 속도 u_c 를 구하시오.

파트 (e)의 결과는 파트 II에 필요하지 않다.

Part II: 삐걱거리는 문에 적용 (2.5 점)

문 경첩은 속이 비어있고, 양쪽이 열려 있는 반지름 r , 높이 h , 두께 Δr 의 금속 실린더이다. 실린더의 아래쪽 끝은 벽에 부착된 금속 밀판 위에 놓여있다. (접촉면은 반지름 r 의 고리이다.) Figure 2를 보시오. 실린더와 밀판 사이의 정지 마찰 계수와 운동 마찰 계수는 각각 μ_s, μ_k ($\mu_k < \mu_s$)이다. 실린더의 위쪽 끝은 문에 붙어 있으며, 이 부분은 변형되지 않는다고 볼 수 있다. 전형적인 문은 두세 개의 경첩에 달려 있지만, 문의 무게는 주로 한 곳에만 집중되어 있으며, 이것이 바로 삐걱거릴 경첩이다. 이 경첩의 실린더는 금속 밀판을 질량이 M 인 전체 문의 무게로 누르고 있다.

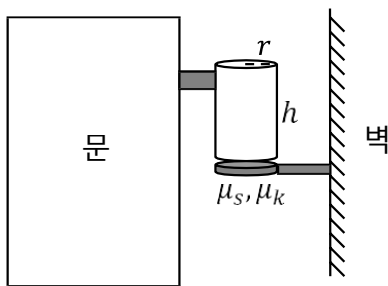


Figure 2: 문의 간략한 도면

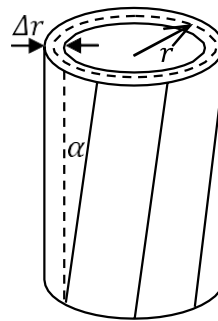


Figure 3: 비틀린 경첩 실린더

실린더는 완벽한 강체가 아니기 때문에 전체적인 모양은 유지하면서 접선 방향으로 비틀릴 수 있으며, 이러한 경우, 수직 방향 선 요소는 작은 각 α 만큼 기울어져 있게 된다. Figure 3을 보시오. 밀판의 작은 면적 요소 dS 에 작용하는 탄성력은 다음과 같이 주어진다:

$$dF = G\alpha dS$$

여기서 G 는 층밀리기 탄성률이라 불리우는 양이다. $r = 5\text{ mm}$, $h = 3\text{ cm}$, $\Delta r = 1\text{ mm}$, $\mu_s = 0.75$, $\mu_k = 0.55$, $G = 8 \cdot 10^{10}\text{ Pa}$, $M = 30\text{ kg}$, $g = 9.8\text{ m/s}^2$ 을 이용하시오. $\Delta r \ll r$ 의 근사를 이용할 수 있다.

- f. (1 점) 문을 평형 상태 (토크가 0) 에서부터 매우 느리게 회전시킨다. 작은 회전 각에 대해, 비틀림 상수 $\kappa = \tau / \theta$ 에 대한 표현을 구하시오. 여기서 τ 는 문을 각 θ 만큼 돌리기 위해 필요한 토크이다.
- g. (1.5 점) 매우 낮은 각속도에서, 부착에서 미끄러짐으로 전이가 일어날 때, 펄스 형태의 소리가 발생한다. 이 펄스 형태의 소리의 진동수가 가청 범위인 $f = 20\text{ Hz}$ 가 되는 문의 각속도 Ω 를 구하시오. 순수한 미끄러짐 운동의 진동수 f_0 는 훨씬 높다고 가정하시오: $f_0 \gg f$. 표현 식과 수치값을 구하시오.

이론 문제 3: 생일 풍선

그림은 생일 파티에서 많이 쓰이는 긴 고무 풍선이다. 부분적으로 팽창한 풍선은 다른 반지름의 두 부분으로 나뉘는 경우가 많다. 이 문제에서 우리는 이 현상을 이해하기 위해 간략한 모델을 사용할 것이다.



Figure 1: 부분적으로
팽창한 생일 풍선

(끝 부분을 제외하고) 긴 균일한 실린더 형태의 입으로 부는 부분이 있는 풍선을 고려하자. 모든 과정은 상온에서 등온으로 가정할 것이다. 임의의 순간에, 풍선 내부의 압력 P 는 대기압 P_0 보다 약간 크며, 이 때문에 공기는 비압축성 유체로 취급할 수 있다. 중력과 풍선의 무게는 무시할 수 있다. 팽창은 느리고 준정적이다. 파트 (a)-(d)에서, 풍선은 길이 전체를 따라 균일하게 팽창해 있다. 팽창 전 풍선의 반지름과 길이를 각각 r_0, L_0 라 하자.

- a. (1.8 점) 풍선은 입으로 부는 곳이 잡혀 있고, 다른 쪽 끝은 자유롭게 매달려 있다. 길이 방향 (풍선의 축과 평행한 방향) 표면장력 σ_L 과 횡 방향 (풍선의 원형 단면과 접하는 방향) 표면장력 σ_t 사이의 비율 σ_L / σ_t 를 구하시오. 고무막의 표면장력은 단위 길이의 경계 당 이웃한 부분이 서로 가하는 힘이다.

훅의 법칙은 작은 장력에 대해 현실 세계의 탄성을 선형 근사한 것이다. 풍선의 길이는 L_0 로 일정하고, 표면장력 σ_t 는 팽창비 r / r_0 에 다음과 같이 의존한다고 하자:

$$\sigma_t = k \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \quad (1)$$

- b. (1 점) 이 가정 하에서, 풍선 내의 압력 P 가 풍선의 부피 V 에 어떻게 의존하는지에 대한 표현을 구하시오. $P - P_0$ 를 V 의 함수로 그래프를 작성하시오. 훅의 탄성 근사에서 최대 팽창 압력 $P_{\max}$ 는 얼마인가?

실제로는, 팽창비 r / r_0 가 크기 때문에 (Figure 1 에서 5 정도의 전형적인 값을 관찰할 수 있다.), 우리는 고무의 비선형적 거동과 풍선의 길이 변화를 고려해야 한다. 이 효과들은 파트 (b)에서 예측된 것보다 더 높은 팽창 압력을 가능하게 한다. 전형적인 풍선에서, $\sigma_t(r)$ 의 그래프는 세 부분으로 이루어져 있다:

1. 작은 팽창비에 대해, $\sigma_t(r)$ 은 훅의 법칙을 따라 증가한다.
2. $(r - r_0) \sim r_0$ 일 때, 풍선의 길이 L 은 증가하기 시작하며, $\sigma_t(r)$ 은 매우 느리게 증가하는 긴 평평한 곳에 도달하게 된다.
3. 어느 정도 큰 팽창비에 대해, 고무는 팽창에 저항하기 시작하며, 이 때문에 $\sigma_t(r)$ 이 급격히 증가한다.

이 거동은 Figure 2 에 묘사되어 있다.

- c. (1.3 점) Figure 2 에 따라 거동하는 균일하게 팽창된 풍선에 대해 압력차 $P - P_0$ 를 V 의 함수로 정성적으로 그리시오. 그래프에서 모든 극점을 표시하시오. $r = 1\text{cm}$ 와 $r = 2.5\text{cm}$ 에 해당되는 점들도 표시하시오. 이 점들에서 $P - P_0$ 의 값을 10 % 정확도로 구하시오.

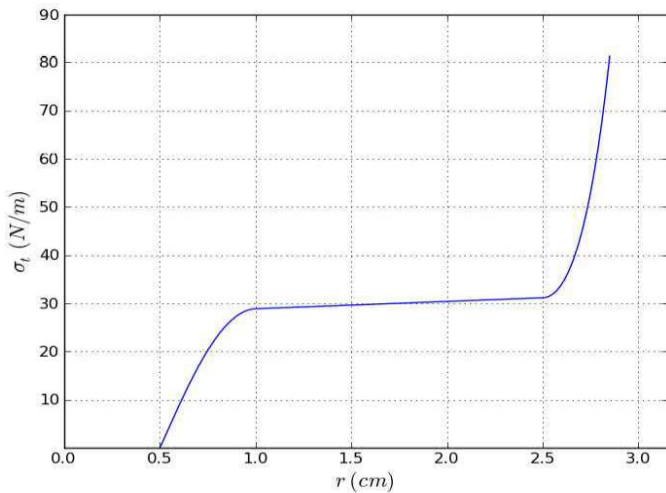


Figure 2: 현실적인 풍선에 대한 $\sigma_t(r)$

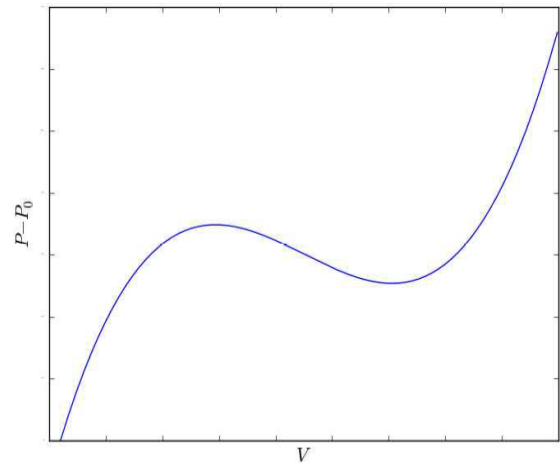


Figure 3: 식 (2)의 그래프

파트 (c)에서 알아낸 거동에 의한 결과를 탐구하기 위해, 우리는 균일하게 팽창한 풍선에 대해 $P(V)$ 를 삼차 함수로 근사할 것이다:

$$P - P_0 = a((V - u)^3 - b(V - u) + c) \quad (2)$$

여기서 a, b, c 는 양의 상수이다. 부피 u 는 풍선의 팽창하지 않은 상태의 부피 V_0 보다 크고, c 는 충분히 커서 함수 (2)는 물리적인 범위인 $V > V_0$ 에서 항상 양수라고 하자. Figure 3 를 보시오.

풍선은 조절 가능한 압력 P 의 큰 공기 저장소에 연결되어 있다. 하나의 P 값에 대해 여러 개의 V 값이 대응될 수 있다. 만약 풍선이 팽창 압력에서 섭동을 받게 되면 (외력에 의한 국소적 팽창 등), 풍선은 다른 부피의 상태로 전이할 수 있다. 이 현상은 전체 계를 구성하는 풍선, 대기와 공기 저장소의 압력이 P 로 일정할 때, 전이하는 것이 에너지적으로 이득인 경우 일어나게 된다. 만약 압력이 P_0 에서 서서히 증가하고, 각 단계마다 충분한 섭동이 존재한다면, 이러한 폭발적인 부피 전이는 두 상태 사이의 전이에 필요한 에너지가 0 이 되는 특정 압력 P_c 에서 일어나게 된다. 이 압력 이상에서, 작은 부피에서 큰 부피 영역으로 전이하는 것은 에너지를 방출하며, 반대로 마찬가지로이다. 이러한 종류의 불연속은 자연에서 많이 발견할 수 있으며, “상 전이”로 알려져 있다.

- d. (2.3 점) 식 (2)를 고려해서, P_c 의 값, 전이 전의 풍선 부피 V_1 과 전이 후의 부피 V_2 를 구하시오. 답을 a, b, c, u 를 이용해서 나타내시오.

생일을 맞은 아이와 같은 좀 더 현실적인 팽창시키는 존재는 위에서 설명한 순간적인 부피 변화에 필요한 충분한 공기를 공급할 수 없다. 그 대신, 공기는 풍선으로 서서히 공급되며, 풍선의 압력보다 부피를 효과적으로 조절하게 된다. 이 경우, 새로운 종류의 거동이 가능해진다. 계의 총 에너지를 줄일 수 있게 되면, (충분한 섭동 하의) 풍선은 길이가 서서히 변하는 서로 다른 반지름의 두 원통형 부분으로 나뉘게 된다. 나뉘는 경계는 에너지를 요구하지만, 이를 무시할 수 있다. 우리는 또한 경계 층의 길이를 무시할 것이다. (이 가정은 매우 긴 풍선에 대해 유효하다.)

- e. (1 점) 압력차 $P - P_0$ 를 V 의 함수로 나뉘를 고려해서 정성적인 그래프를 그리시오. 축에 압력 $P_c - P_0$ 와 부피 V_1, V_2 를 표시하시오.
- f. (1.4 점) 풍선이 두 부분이 공존하는 부피 범위에 있다. 더 얇은 부분의 길이 L_{thin} 을 총 공기 부피 V 의 함수로 구하시오. 답을 V_1, V_2 와 더 얇은 부분의 반지름 r_1 으로 나타내시오.
- g. (1.2 점) 풍선이 두 부분이 공존하는 부피 범위에 있다. 단위 길이의 얇은 부분을 두꺼운 부분으로 바꾸기 위해 풍선에 가해져야 하는 잠열 $\Delta W / \Delta L_{thin}$ 을 구하시오. 답을 P_c, V_1, V_2 와 더 얇은 부분의 반지름 r_1 으로 나타내시오.