

낙하하는 자석에 작용하는 저항력

맴돌이 전류에 대한 명확하고 자세한 토론은 영국 물리학자 Sir James H. Jeans (1877-1946) 의 유명한 책 *The mathematical theory of electricity and magnetism* (1925) 에 의해 처음 제공되었다. 이 문제는 전자기에 기반하고 있다.



James H. Jeans
(1877-1946)

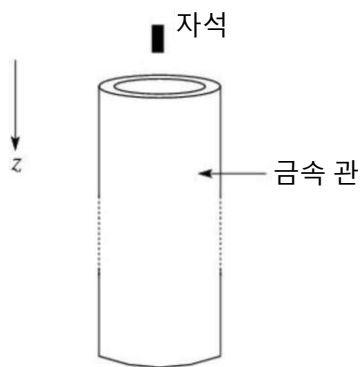


Figure 1

쌍극자 모멘트 p , 질량 m 의 작은 자석이 Fig. (1) 에서와 같이 매우 긴 비 자성 금속 관에 떨어졌다. (그림은 크기대로 그려지지 않음) 일반적으로 이 낙하는 아래와 같은 식에 의해 지배된다.

$$m\ddot{z} = mg - k\dot{z} \quad \dots\dots\dots(1)$$

여기서 g 는 중력가속도이다. 감쇠 계수 k 는 관에서 맴돌이 전류에 의한 것임을 명심하시오.

I.1 자석의 종단 속도 (v_T) 를 구하시오.

[0.5 점]

I.2 $z(t)$, 즉 시간 t 에서 자석의 위치를 구하시오. $v(t=0) = 0, z(t=0) = 0$ 로 놓으시오.

[1.0 점]

우리는 이 낙하의 동역학을 이해를 시도할 것이다. 이를 위해서 우리는 파트 (I.3) – 파트 (I.8)에서 간략화된 자석 낙하 문제를 고려할 것이다. Fig. (2) 에서와 같이 자석은 반지름 a , 저항 R , 인덕턴스 L 의 고정된 비 자성 금속 고리에 축 방향으로 낙하한다. 이 문제에서 우리는 방사 효과를 무시할 것이다.

우리의 경우 좌표계를 Fig. (2) 와 같은 원통 좌표계 (ρ, ϕ, z) 로 바꾸는 것이 편리하며, 여기서 z 축은 고리의 축이고, 자석은 처음에 원점에서 정지해 있으며, 고리의 중심은 원점에서 거리 z_0 만큼 떨어져 있다. 데카르트 좌표축 (x, y, z) 도 그림에 그려져 있다. 자석은 양의 z 축 방향의 쌍극자 벡터 ($\vec{p} = p\hat{k}$) 를 가지고 있으며, 여기서 $\hat{k}$ 은 z 방향 단위 벡터이다. 우리는 낙하하는 동안 자기 쌍극자의 방향은 일정하다고 가정하자. 자석이 원점에 있을 때 임의의 점 (ρ, ϕ, z) 에서 자기장의 축 방향 성분 (B_z) 와 반지름 방향 성분 (B_ρ) 는 다음과 같다.

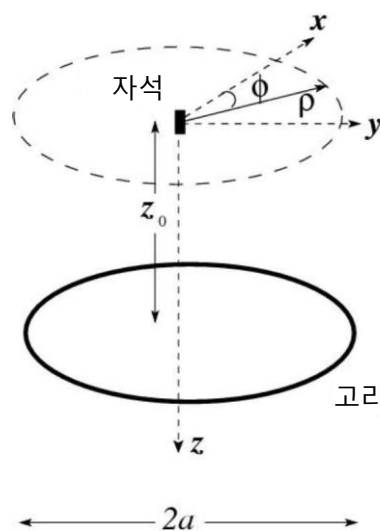


Figure 2

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{3z^2}{\rho^2 + z^2} - 1 \right]$$

$$B_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3pz\rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}$$

여기서 μ_0 는 진공의 투자율이다.

- 1.3 자석의 순간 속력이 v 라 하자. 고리에 유도된 기전력의 크기 ($\mathcal{E}_i$) 를 구하시오. [1.5 점]
- 1.4 이 기전력은 고리에 유도 전류 (i) 가 흐르게 한다. 고리에 작용하는 순간적인 전자기력의 크기 (f_{em}) 을 i 를 이용해서 나타내시오. [1.0 점]
- 1.5 이 고리에 의해 자석에 작용하는 힘의 크기는 얼마인가? [0.5 점]
- 1.6 고리의 기전력을 L, R, i 로 표현하시오. i 에 대해 풀지는 마시오. [0.5 점]
- 1.7 자석은 낙하하면서 중력 퍼텐셜 에너지를 잃게 된다. 중력 퍼텐셜 에너지가 변환된 세 가지 주요한 에너지의 형태를 명시하고 각 에너지를 계산하기 위해 이용할 표현식을 쓰시오. [1.0 점]
- 1.8 자석의 자기장은 이 과정에서 일을 하는가? 알맞은 박스에 표시하시오. [0.5 점]

다음으로 우리는 관에 의한 감쇠 계수 k 를 추정할 것이다. (Eq. (1) 을 보시오.) 반지름 a , 작은 두께 w , 전기 전도도 σ 의 무한한 길이의 관을 생각하자. 이 문제와 이 이후의 문제에 대해, 우리는 관의 인덕턴스를 무시할 것이다. 관을 각각 높이 $\Delta z'$, 반지름 a , 작은 두께 w , 전기 전도도 σ 의 많은 고리들로 이루어져 있다고 생각하면 도움이 될 것이다. (Fig. (3)을 보시오.) 간편성을 위해, 관의 양 끝은 각각 $z = -\infty$ 와 $z = \infty$ 에 있다고 하자.

- 1.9 각 고리의 저항을 계산하시오.

[0.5 점]

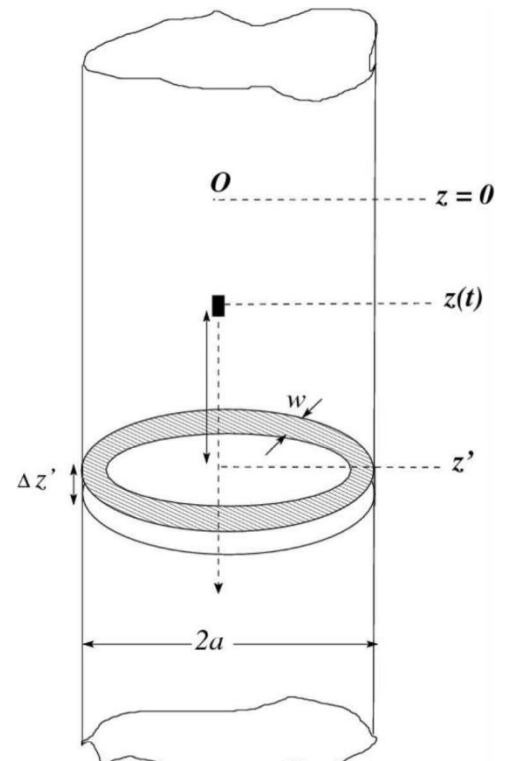


Figure 3



- I.10 전체 관에 의한 감쇠 계수 k 를 ρ, σ 와 고리의 기하학적 크기를 나타내는 변수를 이용해 나타내시오. 각 고리는 매우 얇기 때문에, 고리의 두께를 따라 자기장은 $B_\rho(\rho = a)$ 로 일정하다고 볼 수 있다. 시각 t 에, 자석의 좌표는 $z(t)$ 이고, 순간 속력은 $\dot{z}$ 라 하자. 답을 무차원 변수 $u = (z - z') / a$ 를 포함하는 무차원 적분 I 를 이용해 나타내시오. [2.0 점]

- I.11 감쇠 계수 k 가 아래와 같이 의존한다고 하자.

$$k = f(\mu_0, p, R_0, a)$$

여기서 R_0 는 긴 관의 유효 저항이다. 차원 분석을 통해 k 에 대한 표현식을 구하시오. 무차원 비례 상수는 1로 두시오. [1.0 점]

다음 적분이 유용할 것이다:

$$\int \frac{u du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \frac{(a^2 + u^2)^{1-n}}{1-n} + \text{Constant} \quad (n > 1)$$

찬드라세카르 한계

1930 년에 행해진 유명한 연구에서, 인도의 물리학자 Subrahmanyan Chandrasekhar 교수 (1910-1995) 는 별의 안정성에 대해 다루었다. 이 문제는 그의 분석의 간략화된 버전을 구성하는데 도움이 될 것이다.

아래 기호와 값들이 유용할 것이다.

진공에서 빛의 속력 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

플랑크 상수 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

만유인력 상수 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

전자의 정지 질량 $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

양성자의 정지 질량 $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$



S. Chandrasekhar
(1910-1995)

II.1. 반지름 R , 질량 M 의 균일한 밀도를 가진 구형 별을 고려하자. 자신의 중력장에 의한 중력 퍼텐셜 에너지 (E_G) 에 대한 표현식을 구하시오. (중력 self 에너지) [1.0 점]

II.2. 우리는 별이 수소로만 이루어져 있으며, 모든 수소는 이온화된 상태라고 가정하자. 우리는 핵 융합에 의한 에너지 생산이 멈춘 상황을 고려하자. 전자들은 파울리의 배타 원리를 따르며, 그들의 총 에너지는 양자 통계를 이용해 계산할 수 있다. 이 (양성자 에너지는 무시한) 총 전자 에너지는 다음과 같다고 할 수 있다.

$$E_e = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10 m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{R^2}$$

여기서 N_e 는 총 전자의 수이며, $\hbar = h / 2\pi$ 이다. 평형 조건에서 별의 반지름 (R_{wd}) 과 질량의 관계를 구하시오. 이 반지름은 ‘백색 왜성’ 반지름으로 알려져 있다. [2.0 점]

II.3. 태양과 같은 질량 ($M_s = 2.00 \times 10^{30} \text{ kg}$) 의 별에 대해 R_{wd} 의 값을 계산하시오. [1.0 점]

II.4. 전자 분포가 균일하다고 가정하고, 별의 반지름이 파트 (II.3)에서 구한 R_{wd} 일 때, 전자 사이의 평균 거리 (r_{sep})의 오더를 추정하시오. [1.0 점]

II.5. 전자의 속력을 추정하도록 하자. 이를 위해, 각 전자가 길이 r_{sep} 의 일차원 상자 내에서 정상파를 이룬다고 가정하자. 드브로이 가설을 이용해서 가장 낮은 에너지 상태에 있는 전자의 속도 (v) 를 구하시오. [1.0 점]

II.6. □□□파트 (II.2)에서 한 분석에 변화를 가해보자. 만약 전자들이 초상대론적이라고 두면, 비슷한 분석의 결과는 아래와 같다.



$$E_e^{rel} = \frac{\pi^2}{4^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{5/3} \frac{\hbar c}{R} N_e^{4/3}$$

별이 평형을 이룰 수 있는 질량에 대한 표현식을 문제의 시작 부분에서 주어진 상수들로 나타내시오. 우리는 이를 임계 질량 (M_c)라 하자. [1.5 점]

II.7. 만약 별의 질량 M 이 파트 (II.6)에서 구한 임계 질량 M_c 보다 큰 경우, 별이 팽창할지 아니면 수축할지 알아내시오. 알맞은 박스에 표시하시오. [0.5 점]

II.8. 이 임계 질량을 태양 질량 (M_s)의 단위로 수치 값을 구하시오.

(참고: 여기서 구한 답은 이 분석에서 행한 근사에 의해 찬드라세카르의 유명한 결과와 다를 수 있다.) [1.5 점]

Pancharatnam Phase

이 문제는 빛의 간섭, 편광, 중첩과 관련된 광선 2 개에 의한 현상을 다룰 것이다. 이 문제의 구체적인 내용은 인도 물리학자 S. Pancharatnam (1934-1969) 에 의해 연구되었다.



S. Pancharatnam
(1934-1969)

Fig. (1)에 그려진 실험 세팅을 고려하자. 결맞은 두 단색광은 (beam 1, 2 로 표시되어 있다.) z 방향으로 운동하고 있으며, 거리 d ($S_1S_2 = d$) 만큼 떨어진 두 좁은 슬릿으로 입사하고 있다.

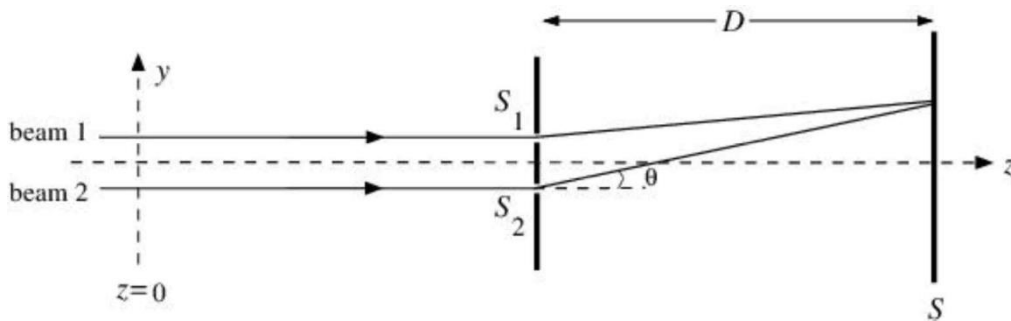


Figure 1

III.1. beam 1, 2 가 $z = 0$ 에서 선편광 되어있다고 하자. 대응되는 전기장 벡터는 다음과 같이 주어져 있다.

$$\vec{E}_1 = \hat{i}E_0 \cos(\omega t) \quad \dots\dots\dots (1a)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{i}E_0 \cos(\omega t) \quad \dots\dots\dots (1b)$$

여기서 $\hat{i}$ 는 x 축 방향 단위 벡터, ω 는 빛의 각진동수, E_0 는 진폭이다. Fig. (1)에서 표시된 각 θ 위치의 스크린에서 빛의 세기 $I(\theta)$ 를 구하시오. 답을 θ, d, E_0, ω 와 광속 c 로 나타내시오. 또한, 세기는 전기장 제곱의 시간 평균에 비례함을 명심하시오. 여기서 비례 상수는 β 로 둘 수 있다. 스크린 상의 점과 슬릿 사이의 거리에 의한 전기장 크기의 감쇠는 무시할 수 있다. [1.0 점]

III.2. 두께 w , 굴절률 μ 의 이상적인 투명한 유리판이 슬릿 전에 beam 1 의 경로에 삽입되었다. 스크린에서 관측되는 빛의 세기 $I(\theta)$ 를 구하시오. 답을 $\theta, d, E_0, c, \omega, \mu, w$ 로 나타내시오. [1.0 점]

III.3. 1/4 파장 판(QWP)이라 불리는 광학 장치가 슬릿 전에 beam 1 의 경로 유리판을 대신해서 삽입되었다. 이 장치는 광선의 편광 상태를 아래 선편광 상태에서

$$\vec{E}_1 = \hat{i}E_0 \cos(\omega t)$$

아래 원편광 상태로 바꾼다.

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{i}E_0 \cos(\omega t) + \hat{j}E_0 \sin(\omega t)]$$

여기서 $\hat{j}$ 는 y 축 방향 단위 벡터이다.

이 장치에 의한 추가적인 경로차는 발생하지 않고 완벽하게 투명하다고 하자. 광선이 원편광 되었다는 것은 시간의 흐름에 따라 전기장 벡터의 끝이 원을 따라 움직이는 것임을 명심하라. 각도 θ 는 충분히 작아서 $\hat{j}$ 편광에 대해서도 슬릿에서 나오는 세기는 각도 θ 에 의존하지 않는다고 가정할 수 있다.

III.3.a. 스크린에서 관측되는 빛의 세기 $I(\theta)$ 를 구하시오. 답을 $\theta, d, E_0, c, \omega$ 로 나타내시오.

III.3.b. 최대 세기 ($I_{\max}$)는 얼마인가?

III.3.c. 최소 세기($I_{\min}$)는 얼마인가?

[2.0 점]

III.4.

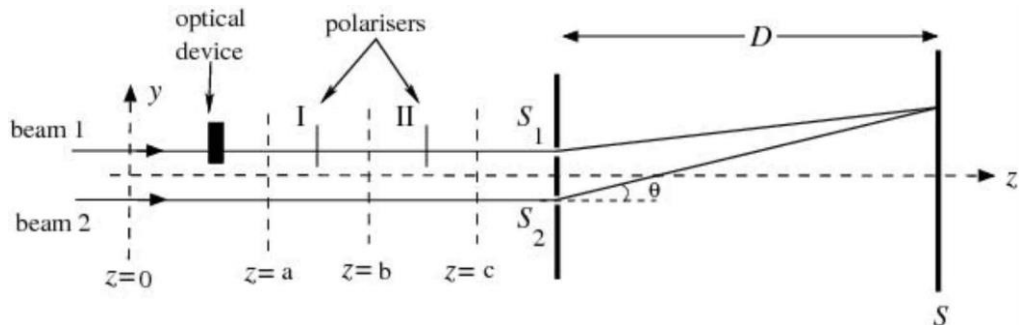


Figure 2

이제, beam 1 이 다음과 같은 장치를 통과하는 실험 세팅을 고려하자. (Fig. (2)를 보시오.)

- 파트 3 에 표시된 장치 (QWP)
- 축 ($\hat{i}'$) 방향의 전기장 성분만 통과시키는 $z = a$ 와 $z = b$ 사이에 놓여있는 선편광판 (I 이라고 표시됨) 단위 벡터 $\hat{i}'$ 는 아래와 같이 정의되어 있다.

$$\hat{i}' = \hat{i} \cos \gamma + \hat{j} \sin \gamma$$

- 광선을 다시 $\hat{i}$ 방향으로 편광시키는 $z = b$ 와 $z = c$ 사이에 놓여있는 다른 선편광판 (II 이라고 표시됨)

따라서 beam 1 은 다시 원래 편광 상태로 돌아온다. 편광판들은 추가적인 경로차를 만들지 않고 완벽하게 투명하다고 가정하자.

III.4.a. $z = b$ 에서 첫번째 편광판을 통과한 beam 1 의 전기장을 구하시오. [$\vec{E}_1(z = b)$]

III.4.b. $z = c$ 에서 두번째 편광판을 통과한 beam 1 의 전기장을 구하시오. [$\vec{E}_1(z = c)$]

III.4.c. 슬릿에서 두 광선 사이의 위상차 (α)는 얼마인가?

[2.0 점]

가장 일반적인 형태의 편광은 타원 편광이다. 타원 편광을 가장 편하게 표현하는 방법은 수직하는 두 선형 편광 성분의 중첩으로 보는 것이다. 즉, 다음과 같다.

$$\vec{E} = \hat{i}' E_0 \cos e \cos(\omega t) + \hat{j}' E_0 \sin e \sin(\omega t) \quad \dots\dots\dots (3)$$

여기서 $\hat{i}'$ 와 $\hat{j}'$, 이 편광 상태는 Fig. 3 에 표현되어 있다.

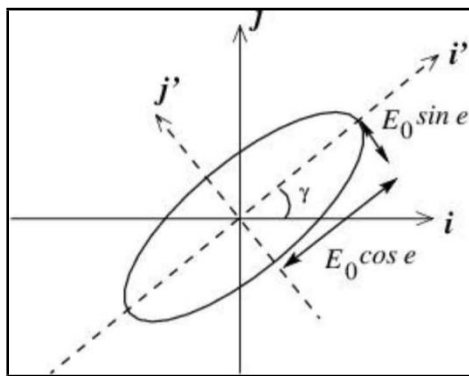


Figure 3

전기장 벡터의 끝은 시간이 지남에 따라 타원을 따라 움직인다. 여기서 e 는 타원율이며 다음과 같다.

$$\tan e = \frac{\text{타원의 단반경}}{\text{타원의 장반경}}$$

선편광 (Eq. (1))와 원편광 (Eq. (2))는 타원 편광 (Eq. (3))의 특별한 경우이다. 두 가지 변수 $\gamma (\in [0, \pi])$ 와 $e (\in [-\pi/4, \pi/4])$ 는 이러한 편광 상태를 완벽히 기술한다.

편광 상태는 푸앵카레 구라고 불리는 단위 구 위의 한 점으로 표현할 수도 있다. Eq. (3)로 표현되는 편광은 푸앵카레 구 위의 점 P 로 표현되며, (Fig. 4 를 보시오.) 이 때 위도는 $\angle PCD = 2e$, 경도는 $\angle ACD = 2\gamma$ 이다. 여기서 C 는 중심이다.

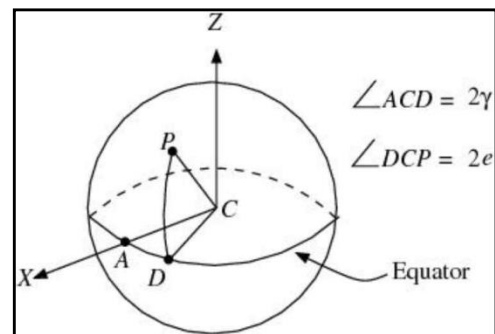


Figure 4

III.5. 푸앵카레 구에서 적도 위의 점을 고려하자

III.5.a. 이 점에 대응되는 전기장 ($\vec{E}_{eq}$)를 적으시오.

III.5.b. 편광 상태는 무엇인가?

[0.5 점]

III.6. 푸앵카레 구에서 북극의 점을 고려하자.

III.6.a 이 점에 대응되는 전기장 ($\vec{E}_{np}$)를 적으시오.

III.6.b 편광 상태는 무엇인가?

[0.5 점]

III.7. 이제, 파트 4 에서 주어진 beam 1 의 세 가지 편광 상태를 고려하자. ($z = 0$ 에서) 초기 편광 상태는 푸앵카레 구에서 점 A_1 로 표현된다. 광학 장치를 통과한 이후, ($z = a$ 에서)



편광 상태는 점 A_2 로 표현되고, 첫번째 편광판 이후, ($z = b$ 에서) 편광 상태는 점 A_3 로 표현된다. $z = c$ 에서 편광은 A_1 로 표현되는 원래 상태로 돌아온다. 푸앵카레 구 위에서 이 점들 (A_1, A_2, A_3)를 표시하시오. [1.5 점]

III.8. 만약 이 세 점들 (파트 (III.7)의 A_1, A_2, A_3)을 구 위의 대원으로 이르면, 구 표면의 삼각형을 얻을 수 있다. (참고: 대원은 중심이 구의 중심과 일치하는 구 표면 상의 원이다.) 파트 4에서 구한 위상차 α 와 이 삼각형으로 둘러싸인 흰 표면의 넓이 S 는 서로 관련이 있다. S 를 α 와 관련 지으시오. [1.5 점]