

두 전도체로 이루어진 계가 전도성이 약한 균일한 유전체 액체 내에 잠겨 있다. 두 전도체 사이에 일정한 전압이 가해지면, 전기장과 자기장이 모두 만들어지게 된다. 이 문제에서 우리는 이 계를 조사할 것이다.

1. (0.4 점) 먼저 단위 길이당 전하가 λ 인 무한히 긴 전선이 진공 중에 놓여있는 상황을 고려하자. 이 전선에 의한 전기장 $E(r)$ 를 구하시오.

2. (0.4 점) 선 전하에 의한 퍼텐셜은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V(r) = f(r) + K$$

여기서 K 는 상수이다. $f(r)$ 을 결정하시오.

3. (0.7 점) $x = -b, y = 0$ 에 있는 단위 길이당 전하가 λ 인 무한히 긴 전선과 $x = b, y = 0$ 에 있는 단위 길이당 전하가 $-\lambda$ 인 또 다른 무한히 긴 전선에 의한 전 공간에서 퍼텐셜 $V(x, y, z)$ 를 구하시오. 두 전선은 모두 z 축에 평행하다. 원점에서 $V = 0$ 이라 하자. 등전위면을 스케치하시오.

아래 문제들에서는, 모든 가장자리 효과를 무시하시오.

4. (2.0 점) 이제 반지름이 $R = 3a$ 인 동일한 두 도체 원통이 진공 중에 놓여있는 상황을 고려하자. 각 원통의 길이는 동일하며, 반지름보다 훨씬 크다. ($l \gg R$) 두 원통의 축은 모두 xz 평면 상에 있고, z 축에 평행하며, 하나는 $x = -5a, y = 0$, 다른 하나는 $x = 5a, y = 0$ 에 위치해 있다. 전지를 연결함으로써 두 원통 사이에 V_0 의 전압이 가해졌다. ($x = -5a$ 에 위치한 원통이 더 높은 전위에 있다.) 전 공간에서 퍼텐셜을 계산하시오. 원점에서 $V = 0$ 로 놓으시오.

5. (0.5 점) 계의 전기용량 C 를 계산하시오.

6. (1.0 점) 이제 두 원통은 모두 전도도 σ 의 약한 전도성 액체 내에 완전히 잠겨 있다. 두 원통 사이에 흐르는 총 전류를 계산하시오. 액체의 유전율은 진공과 같은 $\epsilon = \epsilon_0$ 라고 가정하시오.

7. (0.5 점) 계의 저항 R 을 계산하시오. 계의 RC 를 계산하시오.

8. (1.5 점) 문제 6에서 구한 전류에 의한 자기장을 계산하시오. 액체의 투자율은 진공과 같은 $\mu = \mu_0$ 라고 가정하시오.

참고 $\int \frac{\alpha dx}{\alpha^2 + x^2} = \arctan \frac{x}{\alpha} + \text{const}$

GPS는 물체 (예를 들어 비행기) 의 위치를 알기 위해 위성의 신호를 이용하는 기술이다. 그러나, 위성이 궤도에서 빠른 속력으로 움직이기 때문에 특수 상대론적 보정이 필요하며, 위성의 높은 고도 때문에 일반 상대론적 보정도 필요하다. 두 보정은 작은 것처럼 보이지만 위치를 정밀하게 측정하기 위해서는 매우 중요하다. 우리는 이 문제에서 두 가지 보정을 모두 다룰 것이다.

먼저, 우리는 가속되는 입자에 대한 특수 상대론적 효과를 조사할 것이다. 우리는 두 가지 종류의 좌표계를 다루는 데, 하나는 처음에 입자가 정지해 있던 (S 또는 지구의 좌표계라고 불리는) **정지 좌표계** 이다. 다른 하나는 가속된 입자와 순간적으로 같이 움직이는 (S' 이라고 불리는) **고유 좌표계**이다. 이 좌표계는 가속되는 좌표계가 아니고, 특정 순간에 가속된 입자와 속도가 동일한 등속으로 움직이는 좌표계임을 명심하라. 짧은 순간 동안, 입자가 느끼는 시간이 흐르는 속도는 고유 좌표계에서 시간이 흐르는 속도와 **동일하다**. 물론 이 고유 좌표계는 미소 시간 동안만 유효하고, 그 이후에는 새로운 고유 좌표계를 정의해야 한다. 처음에 우리는 정지 좌표계의 시계와 입자의 시계를 $t = \tau = 0$ 즉, 0으로 동기화 시킨다. (t 는 정지 좌표계의 시간, τ 는 입자의 시계에 나타나는 시간이다.)

등가 원리를 적용함으로써, 우리는 복잡한 metric tensor 계산 없이, 특수 상대론적 결과로부터 일반 상대론적인 결과를 얻을 수 있다. 특수 상대론적 효과와 일반 상대론적 효과를 결합함으로써, 우리는 GPS 위성이 정확한 위치를 제공하기 위한 보정을 계산할 수 있다.

유용할 수학 공식들

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$
- $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
- $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$

파트 A. 가속하는 단일 입자 (2.8 점)

정지 질량 m 의 입자가 일정하고 균일한 양의 x 방향의 힘 F (정지 좌표계에서 정의됨)을 받고 있는 상황을 고려하자. 처음에 ($t = \tau = 0$) 입자는 원점 ($x = 0$) 에서 정지해 있다.

1. (0.5 점) 입자의 속도가 v 일 때, (정지 좌표계에 대한) 입자의 가속도 a 를 계산하시오.
2. (0.5 점) (정지 좌표계에서) 시간 t 일 때, 입자의 속도 $\beta(t) = \frac{v(t)}{c}$ 를 F, m, t, c 로 나타내시오.
3. (0.3 점) 시간 t 일 때, 입자의 위치 $x(t)$ 를 F, m, t, c 로 나타내시오.
4. (0.7 점) 입자의 고유 가속도 $a' \equiv g = F / m$ 이 상수임을 보이시오. 고유 가속도는 순간 고유 좌표계에서 측정한 입자의 가속도이다.
5. (0.4 점) 입자가 측정한 시간이 τ 일 때, 입자의 속도 $\beta(\tau)$ 를 구하시오. 답을 g, τ, c 로 나타내시오.
6. (0.4 점) 정지 좌표계에서의 시간 t 를 g, τ, c 로 나타내시오.

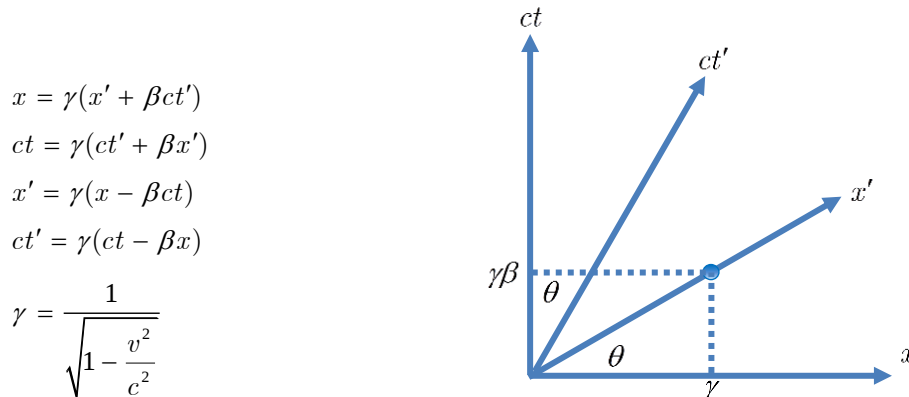
파트 B. 전달 시간 (2.0 점)

첫 파트는 정보가 관측자에게 도착하는데 걸리는 전달 시간을 고려하지 않았다. 이 파트는 전체 문제 중에서 전달 시간을 고려하는 유일한 파트이다. 입자는 파트 A와 동일하게 움직인다.

1. (1.2 점) 특정 순간에, 입자가 측정한 시간이 τ 이다. 이 때, $x = 0$ 에 정지한 시계에서 입자가 관측하는 시간 t_0 는 얼마인가? 충분한 시간이 흐른 후, 이 관측된 시간 t_0 는 측정한 값에 접근하는가? 만약 그렇다면, 그 값은 얼마인가?
2. (0.8 점) 이제 반대 방향의 관점을 고려하자. 만약 초기 위치 ($x = 0$) 에 있는 관측자가 관측자가 측정한 시간이 t 일 때, 관측자가 관측한 입자의 시계에 나타난 시간 τ_0 는 얼마인가? 충분한 시간이 흐른 후, 이 관측된 시간 t_0 는 측정한 값에 접근하는가? 만약 그렇다면, 그 값은 얼마인가?

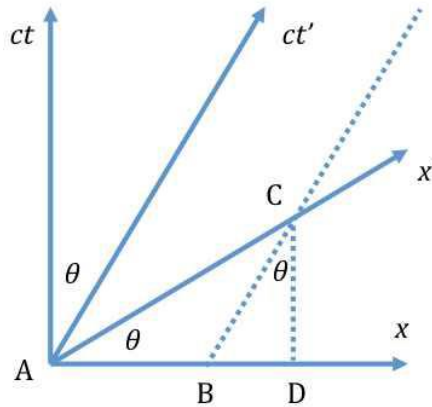
파트 C. Minkowski 도표 (1.0 점)

많은 경우, 상대론적 사건들을 Minkowski 도표라는 것을 이용해 표현하는 것이 매우 유용하다. 도표를 만들기 위해, 우리는 정지 좌표계 S 와 정지 좌표계에 대해 속도 $v = \beta c$ 로 움직이는 좌표계 S' 사이의 로렌츠 변환을 이용하면 된다.



x 와 ct 를 직교하는 축으로 고르자. 움직이는 좌표계 S' 에서 점 $(x', ct') = (1, 0)$ 은 정지 좌표계 S 에서 좌표 $(x, ct) = (\gamma, \gamma\beta)$ 이다. 이 점과 원점을 지나는 직선은 x' 축을 정의한다. 움직이는 좌표계 S' 의 또 다른 점 $(x', ct') = (0, 1)$ 는 정지 좌표계 S 에서 좌표 $(x, ct) = (\gamma\beta, \gamma)$ 이다. 이 점과 원점을 지나는 직선은 ct' 축을 정의한다. x 축과 x' 축 사이의 각도는 θ 이며, $\tan \theta = \beta$ 이다. 움직이는 좌표계 S' 에서 단위 길이는 정지 좌표계 S 에서의 $\gamma\sqrt{1+\beta^2} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ 이다.

Minkowski 도표에 대해 더 잘 이해하기 위해, 예시를 살펴보자. 움직이는 좌표계 S' 에 있는 고유 길이 L 의 막대를 고려하자. 우리는 정지 좌표계 S 에서의 막대의 길이를 알고 싶다. 아래 그림을 고려하자.



막대는 선분 AC 로 표현된다. 길이 AC 는 S 좌표계에서 $\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}L$ 과 동일하다. S 좌표계에서 선분 AB 로 표현된다.

$$\begin{aligned} AB &= AD - BD \\ &= AC \cos \theta - AC \sin \theta \tan \theta \\ &= L\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned}$$

1. (0.5 점) Minkowski 도표를 이용해서, 움직이는 좌표계에서 측정한, 정지 좌표계에서 고유 길이가 L 인 막대의 길이를 구하시오.
2. (0.5 점) 이제 파트 A의 상황을 고려하자. 시간 ct 에 대해 x 의 그래프를 그리시오. 같은 그래프에 $\frac{gt}{c} = 1$ 일 때, 길이 단위 $x(c^2/g)$ 와 $ct(c^2/g)$ 를 이용해서 x' 축과 ct' 축을 그리시오.

파트 D. 가속하는 두 입자 (2.3 점)

이 파트에서, 우리는 양의 x 방향으로 고유 가속도 g 로 가속하는 두 입자를 고려하며, 하나의 입자는 $x = 0$, 다른 입자는 $x = L$ 에서 출발한다. 이 파트에서는 전달 시간을 고려하지 마시오.

- (0.3 점) 조금의 시간이 흐른 후, 정지 좌표계의 관측자가 관측을 한다. 첫번째 입자의 시계는 시간 τ_A 로 측정된다. 정지 좌표계에 있는 관측자가 측정하는 두번째 입자의 시계가 가리키는 시간 τ_B 는 얼마인가?
- (1.0 점) 이제 첫번째 입자의 좌표계에서 관측하는 것을 고려하자. 특정 순간에 첫번째 입자와 함께 움직이는 관측자가 자신의 시계로 측정한 시간이 τ_1 이다. 동시에, 관측자는 두번째 입자의 시계를 보며, 측정값은 τ_2 이다. 다음을 보이시오.

$$\sinh \frac{g}{c}(\tau_2 - \tau_1) = C_1 \sinh \frac{g\tau_1}{c}$$

여기서 C_1 은 상수이다. C_1 을 결정하시오.

- (1.0 점) 첫번째 입자가 자신으로부터 멀어지는 두번째 입자를 본다. 첫번째 입자가 보는 두 입자 사이의 거리가 멀어지는 속도는 다음과 같음을 보이시오.

$$\frac{dL'}{d\tau_1} = C_2 \frac{\sinh \frac{g\tau_2}{c}}{\cosh \frac{g}{c}(\tau_2 - \tau_1)}$$

여기서 C_2 는 상수이다. C_2 를 결정하시오.

파트 E. 균일하게 가속되는 좌표계 (2.7 점)

이 파트에서 우리는 입자 사이 거리가 각 입자의 좌표계에서 모두 일정하도록 입자들의 고유 가속도를 설정한다. 처음에 두 입자들은 정지해 있으며, 하나는 $x = 0$ 에, 다른 하나는 $x = L$ 에 있다.

- (0.8 점) 첫번째 입자의 고유 가속도는 양의 x 방향으로 g_1 이다. 입자가 가속되면서 정지 좌표계의 어떤 점 $x = x_p$ 는 첫번째 입자가 운동하는 동안 첫번째 입자에서 본 거리가 일정하게 된다. x_p 를 결정하시오.
- (1.3 점) 첫번째 입자의 고유 가속도가 g_1 일 때, 첫번째 입자에서 본 두 입자 사이 거리가 일정하게 되는 두번째 입자의 고유 가속도 g_2 를 결정하시오.
- (0.6 점) 두번째 입자에 대한 첫번째 입자의 시간이 흐르는 속도의 비 $\frac{d\tau_2}{d\tau_1}$ 을 구하시오.

파트 F. GPS의 보정 (2.2 점)

파트 E는 서로 간의 상대적인 운동이 없더라도 다른 고도에 있는 시계에서 시간이 흐르는 속도는 서로 다르다는 것을 알려준다. 일반 상대성 이론의 **등가 원리**에 의하면, 닫혀 있는 작은 방 내의 관측자는 중력 가속도 g 와 가속도 g 로 움직이는 좌표계에서의 관성력을 구분할 수 없다. 따

라서, 우리는 다른 중력 퍼텐셜 내에 있는 두 시계는 다른 속도로 시간이 흐른다는 것을 알 수 있다.

이제 12시간 주기로 지구를 돌고 있는 GPS 위성을 고려하자.

1. **(0.6 점)** 만약 지구 표면에서 중력 가속도가 $9.78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 이고, 지구 반지름이 6380 km 일 때, GPS 위성의 궤도 반지름은 얼마인가? 위성의 속도는 얼마인가? 반지름과 속도의 수치값을 계산하시오.
2. **(1.2 점)** 하루가 지난 후, 지구 표면과 위성의 시계가 가리키는 값은 특수 상대론적 효과와 일반 상대론적 효과에 의해 다를 것이다. 각 효과에 대해 하루 당 얼마의 차이가 발생하는지 계산하시오. 하루 당 발생하는 총 차이를 계산하시오. 지구 표면의 시계와 위성의 시계 중 어느 시계가 더 빠른가?
3. **(0.4 점)** 하루가 지난 후, 이 효과로 인한 위치의 오차를 추정하시오.

우주의 모든 물질은 질량, 전하 외에도 스핀이라고 불리는 기본 성질을 가지고 있다. 스핀은 입자가 가지고 있는 내재적인 형태의 각운동량이다. 스핀에 대한 완벽한 기술을 하기 위해서는 양자 역학이 필요하지만, 우리는 일반적인 고전 물리를 이용해서 스핀의 물리학을 탐구할 수 있다. 이 문제에서, 우리는 고전적인 유사성을 이용해서 자기장이 스핀에 미치는 영향을 탐구할 것이다.

스핀에 대한 고전적인 토크 방정식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

이 경우, 각운동량 $\mathbf{L}$ 은 “내재적인” 입자의 스핀을 나타내며, $\boldsymbol{\mu}$ 는 입자의 자기 쌍극자 모멘트, $\mathbf{B}$ 는 자기장이다. 입자의 스핀은 다음 관계식에 의해 자기 쌍극자 모멘트와 관련이 있다.

$$\boldsymbol{\mu} = -\gamma \mathbf{L}$$

여기서 γ 는 자기 회전비이다.

이 문제에서, 용어 “진동수”는 각진동수 (rad/s)를 의미하며, 스칼라이다. 모든 굵은 글씨는 벡터를 표현하며, 그 외의 경우 스칼라이다.

파트 A. Larmor 세차운동 (1.6 점)

- (0.8 점) 자기 쌍극자 모멘트의 크기 μ 는 자기장 $\mathbf{B}$ 의 영향 하에서 항상 일정하다. 정상적인 (일정한) 자기장이 가해지는 특별한 경우, $\boldsymbol{\mu}$ 와 $\mathbf{B}$ 사이의 각도 일정함을 보이시오.
(Hint: 벡터 곱의 성질을 이용할 수 있다.)
- (0.8 점) 균일한 자기장 $\mathbf{B}$ 가 존재하고, 입자의 자기 쌍극자 모멘트 $\boldsymbol{\mu}$ 와 각도 ϕ 를 이룬다. 자기장에 의한 토크 때문에, 자기 쌍극자 모멘트 $\boldsymbol{\mu}$ 는 자기장 $\mathbf{B}$ 주위를 돌게 되며, 이는 Larmor 세차운동으로 알려져 있다. 자기 쌍극자 모멘트의 $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$ 에 대한 Larmor 세차운동의 진동수 ω_0 를 구하시오.

파트 B. 회전 좌표계 (3.4 점)

이 파트에서, 우리는 회전 좌표계 S' 을 기준 좌표계로 고를 것이다. 회전 좌표계 $S' = (x', y', z')$ 은 실험실 좌표계 $S = (x, y, z)$ 의 관측자에 대해 각속도 $\omega \mathbf{k}$ 로 돌고 있으며, 시간 $t = 0$ 에 축 x', y', z' 은 축 x, y, z 와 일치한다. 임의의 실험실 좌표계에서의 벡터 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ 는 회전 좌표계 S' 에서 $\mathbf{A} = A'_x \mathbf{i}' + A'_y \mathbf{j}' + A'_z \mathbf{k}'$ 로 쓸 수 있다. 벡터의 시간 미분은 다음과 같다.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA'_x}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dA'_y}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dA'_z}{dt} \mathbf{k}' \right) + \left(A'_x \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + A'_y \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + A'_z \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{lab} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{rot} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A})$$

여기서 $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{lab}$ 은 실험실 좌표계의 관측자가 본 벡터 $\mathbf{A}$ 의 시간 미분이며, $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{rot}$ 은 회전 좌표계의 관측자가 본 시간 미분이다. 이 파트의 문제에 대해, 답은 회전 좌표계 S' 에 대한 것이다.

1. (0.8 점) 자기 쌍극자 모멘트의 시간에 따른 변화는 다음 식을 따름을 보여라.

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} \right)_{rot} = -\gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_{eff}$$

여기서 $\mathbf{B}_{eff} = \mathbf{B} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\gamma} \mathbf{k}'$ 은 유효 자기장이다.

2. (0.4 점) $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$ 에 대해, 새로운 세차운동 진동수 Δ 를 ω_0, ω 로 나타내시오.
3. (1.2 점) 이제, 시간에 따라 변하는 자기장을 고려하자. 일정한 자기장에 회전하는 자기장 $\mathbf{b}(t) = b(\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j})$ 를 더해서, $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k} + \mathbf{b}(t)$ 이다. 자기 쌍극자 모멘트의 새로운 Larmor 세차운동 진동수는 다음과 같음을 보여라.

$$\Omega = \gamma \sqrt{\left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right)^2 + b^2}$$

4. (1.0 점) 자기장 $\mathbf{b}(t) = b(\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j})$ 를 더하는 대신, 반대 방향으로 회전하는 자기장 $\mathbf{b}(t) = b(\cos \omega t \mathbf{i} - \sin \omega t \mathbf{j})$ 를 더해서 $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k} + b(\cos \omega t \mathbf{i} - \sin \omega t \mathbf{j})$ 이다. 이 경우에 대해 유효 자기장 $\mathbf{B}_{eff}$ 를 구하시오. (단위 벡터 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ 로 나타내시오.) 시간 평균 $\overline{\mathbf{B}_{eff}}$ 를 구하시오. ($\overline{\cos 2\pi t / T} = \overline{\sin 2\pi t / T} = 0$ 임을 상기하시오.)

파트 C. Rabi 진동 (3.0 점)

N 개 입자의 앙상블이 강한 자기장의 영향을 받고 있고, 스핀은 “up” 과 “down”의 두 가지 양자 상태가 가능하다. 결과적으로, 스핀 up인 입자의 수 $N_\uparrow$ 와 스핀 down인 입자의 수 $N_\downarrow$ 은 아래의 식을 만족한다.

$$N_\uparrow + N_\downarrow = N$$

스핀 up인 입자의 수와 스핀 down인 입자의 수의 차이는 거시적인 z 방향의 자화를 만들어낸다.

$$M = (N_\uparrow - N_\downarrow)\mu = N\mu_z$$

실제 실험에서, 보통 두 개의 자기장을 이용하는데, 하나는 강한 한쪽 방향의 자기장 $B_0 \mathbf{k}$ 와 다른 하나는 한쪽 방향 자기장에 수직인 진폭 $2b$ 의 진동하는 자기장이다. ($b \ll B_0$) 처음에, 강한 한쪽 방향 자기장만 가해지며, 모든 입자가 스핀 up 상태에 있도록 한다. ($\boldsymbol{\mu}$ 는 $t = 0$ 에 z 방향을 향하고 있다.) 그 후, 진동하는 장이 가해지며, 진동수 ω 는 Larmor 세차운동 진동수 ω_0 와 공명

하도록 정해졌다. 즉, $\omega = \omega_0$ 이다. 다르게 표현하자면, $t = 0$ 이후 총 자기장은 다음과 같다.

$$\mathbf{B}(t) = B_0 \mathbf{k} + 2b \cos \omega_0 t \mathbf{i}$$

1. (1.2 점) 회전 좌표계 S' 에서, 유효 자기장이 다음과 같이 근사됨을 보여라.

$$\mathbf{B}_{eff} \approx b \mathbf{i}'$$

이는 회전하는 파동 근사로 보통 알려져 있다. 좌표계 S' 에서 세차운동 진동수 Ω 는 얼마인가?

2. (0.6 점) μ 가 B_{eff} 와 이루는 각 α 를 결정하십시오. 또한, 자화는 시간에 따라 다음과 같이 변화함을 보이시오.

$$M(t) = N\mu (\cos \Omega t)$$

3. (1.2 점) 위에서 설명한 자기장이 가해지는 상황에서, 스핀 up 상태에 있는 입자 수의 비 $P_{\uparrow} = N_{\uparrow} / N$ 과 스핀 down 상태에 있는 입자 수의 비 $P_{\downarrow} = N_{\downarrow} / N$ 을 시간의 함수로 구하십시오. $P_{\uparrow}(t)$ 와 $P_{\downarrow}(t)$ 를 같은 그래프에 시간 t 에 대해 그리시오. 시간의 함수로 스핀 up인 입자의 수와 스핀 down인 입자의 수가 진동하는 것은 Rabi 진동으로 알려져 있다.

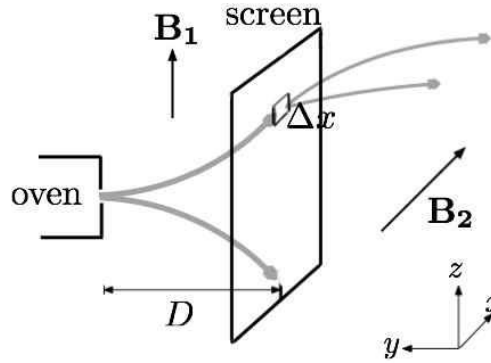
파트 D. 측정의 비호환성 (2.0 점)

스핀은 사실 벡터 물리량이지만, 양자적 성질에 의해 각 성분을 동시에 측정할 수 없다. (즉, 우리는 위의 문제들에서 $|\mu|$ 와 μ_z 를 동시에 알 수 있지만, $|\mu|, \mu_x, \mu_y, \mu_z$ 를 동시에 알 수는 없다.) 이 문제에서, 우리는 하이젠베르크의 불확정성 원리를 기반으로 하는 (관계식 $\Delta p_q \Delta q \geq \hbar$ 를 이용해서) 계산을 함으로써, 이 측정들이 다른 것과 어떻게 호환하지 않는지 알아볼 것이다.

1. (1.0 점) 작은 구멍이 있는 은 원자들의 oven source를 고려하자. 원자들은 $-y$ 방향을 따라 구멍에서 나오며 (아래의 그림을 보시오.), 공간적으로 변하는 장 B_1 을 겪게 된다. 장 B_1 은 강한 z 방향의 성분을 가지고 있으며, 이 때문에 서로 다른 자기 쌍극자 모멘트 $\mu_z = \pm \gamma \hbar$ 를 가진 원자들은 z 방향으로 나뉘게 된다. Oven source에서 거리 D 떨어진 곳에서, 스크린 SC_1 이 스핀 up 원자만 통과할 수 있도록 (스핀 down 원자는 막는다.) 놓여있다. 따라서, 스크린을 지나간 직후, 원자들은 스핀 up 상태로 준비되어 있다. 스크린 이후, 원자들은 균일하지 않은 자기장 B_2 의 영역을 지나며, 다음과 같은 힘을 느낀다.

$$F_x = \mu_x C$$

장 B_2 는 강한 x 방향의 자기장 성분을 가지고 있으며, 원자들은 자기 쌍극자 모멘트 $\mu_x = \pm \gamma \hbar$ 를 가지고 있다.



x 방향의 갈라짐을 통해 μ_x 를 결정하기 위해, 다음 조건이 만족되어야 함을 보이시오.

$$\frac{1}{\hbar} |\mu_x| \Delta x C t \gg 1$$

여기서 t 는 스크린 SC_1 을 통과한 후 지나간 시간이며, Δx 는 SC_1 의 구멍 크기이다.

2. (1.0 점) 원자들은 스크린을 통과한 직후, 스핀 up 상태로 준비되어 있으며, $\mu_z = \gamma \hbar = |\mu_x|$ 이다. 이는 원자들이 B_2 의 x 방향 성분에 대해 $\Delta \omega$ 범위의 진동수로 세차운동을 한다는 것을 의미하며, 특별히 B_2 의 x 방향 성분은 $B_{2x} = B_0 + Cx$ 이다. 이 때, 세차된 각의 퍼짐 $\Delta \omega t$ 가 너무 커서 μ_x 와 μ_z 를 동시에 측정할 수 없게 됨을 보이시오. 다르게 말하자면, μ_x 의 측정은 μ_z 에 대한 정보를 파괴한다.