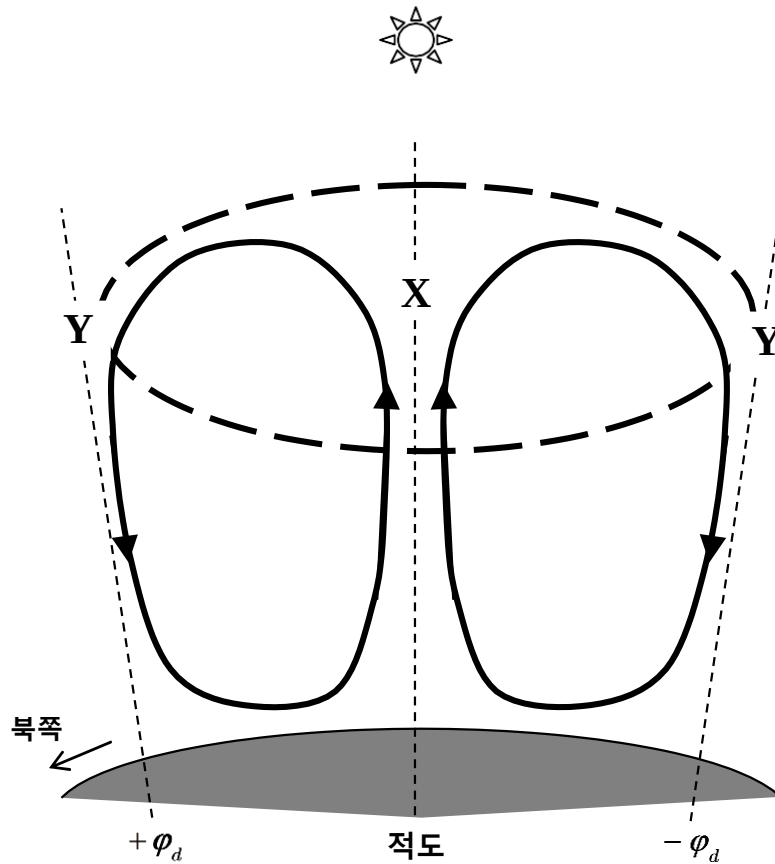


문제 1

아래의 그림은 춘분점 근방에서 지구의 열대 지방 대기의 해들리 순환을 보여준다. 공기는 적도에서 상승하며, 위도 $\pm\varphi_d$ 의 (+와 - 위도는 각각 북반구와 남반구를 의미한다.) 아열대 지방에서 하강하기 전, 양 반구에서 극 쪽으로 이동한다. 지구의 자전축에 대한 각운동량은 (점선 타원에 의해 둘러 싸인) 순환의 위쪽 구역에 대해 보존된다. 그림은 원래 크기대로 그려져 있지 않음을 명심하라.

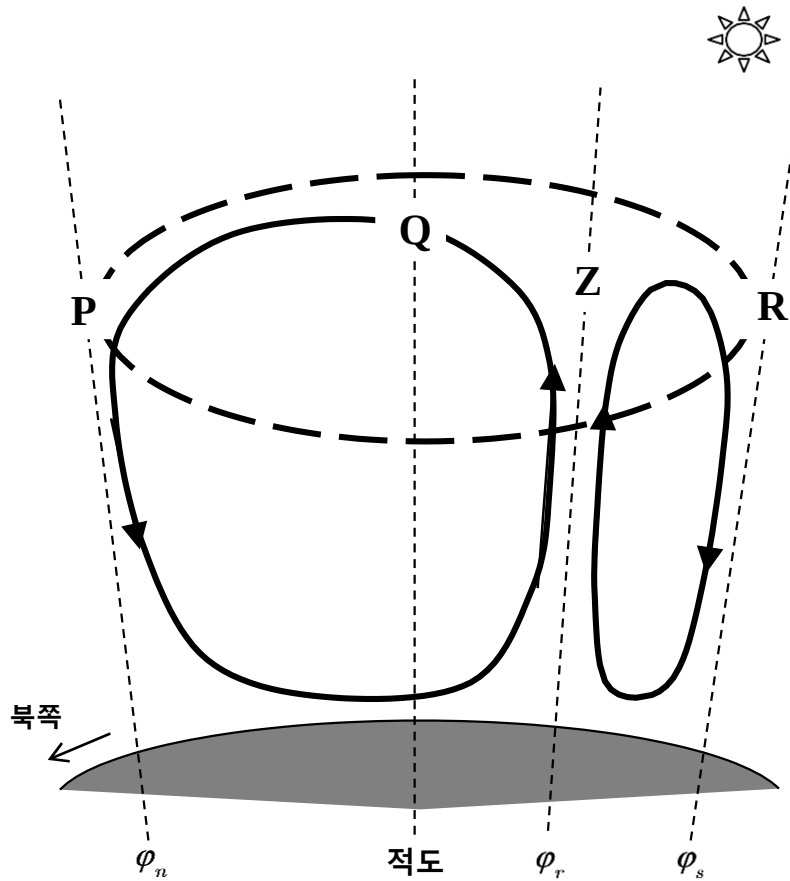


- (a) (2 점) 점 X 주변에서 동서 방향의 바람이 없다고 가정하자. 점 Y에서 동서 방향의 바람 속도 u_Y 에 대한 표현을 구하시오. 관례: 양의 속도는 서쪽에서 동쪽으로 향한다.
 (지구의 자전축에 대한 각속도는 Ω , 지구의 반지름은 a , 대기의 두께는 a 보다 훨씬 작다.)

(b) (1 점) 다음 중 해들리 순환의 아래쪽에서 각운동량이 보존되지 않는 궁극적인 이유는 무엇인가?
올바른 답(들)을 고르시오. 한 개 이상의 옳은 답이 있을 수 있습니다.

- (I) 지구 표면과의 마찰이 존재한다.
- (II) 아래쪽 대기에 난류가 존재해서, 다른 층의 공기들이 섞인다.
- (III) 공기의 아래쪽이 더 밀도가 높아서 관성에 의해 지구의 자전축에 대한 운동이 느려진다.
- (IV) 아래쪽 공기가 습도가 높아 바람 속도를 느리게 만든다.

북반구가 동지일 때, 아래 그림에서 해들리 순환의 상승하는 부분은 위도 φ_r 에 위치하며, 하강하는 부분은 φ_n 과 φ_s 에 위치한다. 파트 (c), (d), (e)에 대해 이 그림을 참고하십시오.



(c) (2 점) 점 Z 주변에서 동서 방향 바람이 없다고 가정하자. $\varphi_r = -8^\circ, \varphi_n = 28^\circ, \varphi_s = -20^\circ$ 임이 주어졌을 때, 점 P, Q, R에서 동서 방향 바람 속도 u_P, u_Q, u_R 은 얼마인가?

(지구의 반지름은 $a = 6370$ km 이다.)

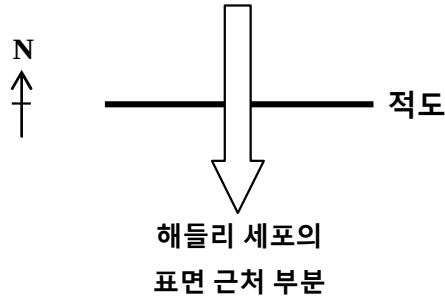
그러면, 아래 반구 중 어느 쪽이 더 강한 대기 제트류를 가지는가?

- (I) 겨울 반구
- (II) 여름 반구
- (III) 두 반구는 모두 동일하게 강한 제트류를 가진다.

(d) (1 점) 해들리 순환 중 표면에 가까운 부분은 바람이 적도를 통과해서 남쪽으로 분다. 아래 그림에서 각각의 열대 지방 공기 덩어리에 작용하는 코리올리 힘의 동서 방향 성분의 방향을 화살표로 표시하시오.

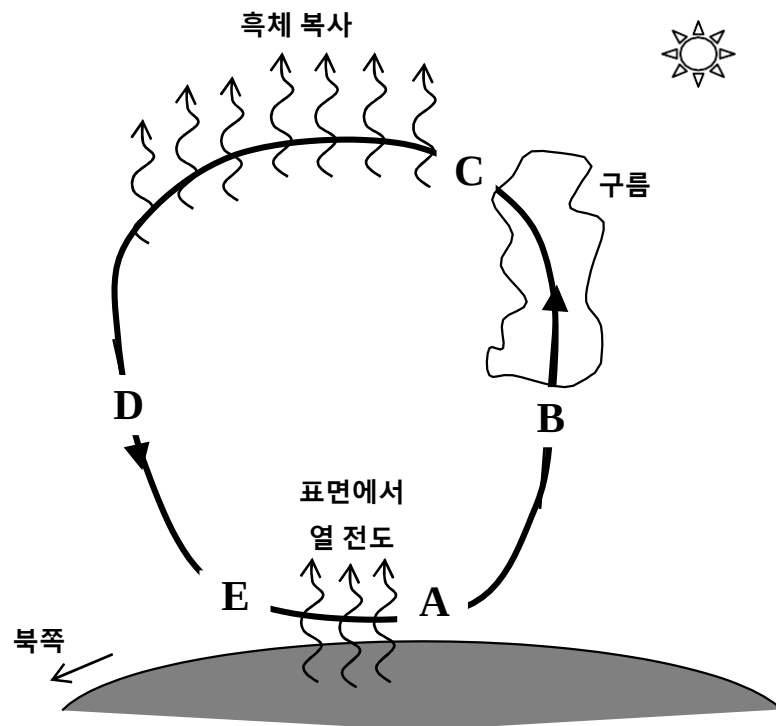
(A) 적도의 북쪽

(B) 적도의 남쪽



(e) (1 점) 파트 (d)의 답과 표면 마찰이 동서 방향 코리올리 힘과 거의 평형을 이룬다는 사실로부터, 적도 주변 열대 지방에서 북반구가 동지일 때, 표면 근처에서 바람의 패턴을 그리시오.

해들리 순환이 아래 그림과 같은 열 기관으로 단순화될 수 있다고 가정하자. 아래 그림과 같이 겨울 반구 쪽 해들리 순환에 집중하면, 공기 덩어리가 A 에서 B, D 에서 E 로 이동하는 것은 단열적이고, B 에서 C, C 에서 D, E 에서 A 로 이동하는 것은 등온이라고 볼 수 있다. 공기는 지구 표면과의 접촉과 대기에서 물의 응결을 통해 열을 공급 받으며, 우주로 방사함으로써 열을 잃게 된다.



- (f) **(2 점)** 특정 높이에서 연직 방향의 대기압은 그 높이 이상에 존재하는 공기의 무게 때문이라고 할 때, 점 A, B, C, D, E 에서의 압력 p_A, p_B, p_C, p_D, p_E 의 크기 관계를 부등호로 나타내시오.

($p_A = 1000 \text{ hPa}$, $p_D = 225 \text{ hPa}$ 임이 주어져 있다. 1 hPa 은 100 Pa 임을 명심하시오.)

- (g) **(2 점)** 표면에서 온도와 대기 최 상단의 온도를 각각 T_H, T_C 라 하자. 점 A, E 사이의 압력 차가 20 hPa 로 주어졌을 때, $T_H = 300 \text{ K}$ 에 대해 T_C 를 계산하시오.

공기에 대해 물 기체 상수 (R) 에 대한 몰 등압 비열 (c_p) 의 비 κ 는 $2/7$ 임을 명심하시오.

- (h) **(2 점)** 압력 p_B 를 계산하시오.

- (i) 겨울 반구의 해들리 순환을 따라 한 바퀴 회전한 공기 덩어리에 대해, 물 기체 상수 R 과 위에서 정의한 양들을 이용해서, 다음 양에 대한 표현을 구하시오.

(A) **(2 점)** 표면 마찰을 무시한 단위 물 당 알짜 일 W_{net}

(B) **(1 점)** 대기 상층부에서 단위 물 당 잃는 열 Q_{loss}

- (j) **(1 점)** 겨울 반구의 해들리 순환에 대해 이상적인 열역학적 효율 ε_i 의 값은 얼마인가?

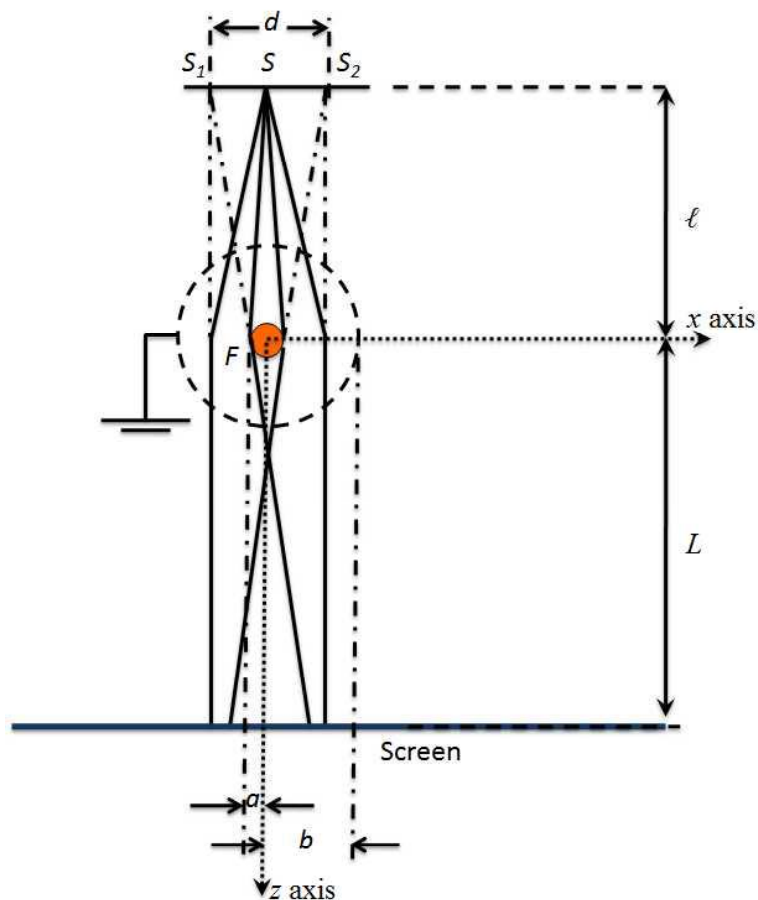
- (k) **(2 점)** 겨울 반구의 해들리 순환에 대해 실제 열역학적 효율 ε 은 항상 ε_i 보다 작다는 것을 모든 수학적 과정을 명시하면서 증명하시오.

- (l) **(1 점)** 다음 명제 중 ε 이 왜 이상적인 값보다 작은지 가장 잘 설명하는가? 올바른 답(들)을 고르시오. 한 개 이상의 올바른 답이 있을 수 있습니다.

- (I) 표면 마찰에 대한 일을 무시하였다.
- (II) 열원의 온도보다 낮은 온도에서 응결이 일어난다.
- (III) 표면에서 물의 비가역적 증발이 일어난다.
- (IV) 이상적인 효율은 물의 상 변화가 없을 때에만 적용 가능하다.

문제 2

전자의 이중 슬릿 간섭 실험은 1974 년에 Möllenstedt 외 몇 명과 Merli-Missiroli, Pozzi 에 의해 행해졌으며, 1989 년에 Tonomura 외 몇 명에 의해서도 행해졌다. 전자의 이중 슬릿 간섭 실험에서, 단색 전자 원천은 S 에서 입자들을 방출하며, 이 입자들은 관측면에 도착하기 전, 전자 “이중 프리즘”을 통과한다. S_1, S_2 는 거리 d 만큼 떨어져 있는 겹보기 원천이다. 그림에서, 필라멘트는 종이 안으로 향하는 방향이다. 이 필라멘트는 매우 얇다는 것을 명심하십시오. (그림은 원래 크기대로 그려져 있지 않다.)



전자 “이중 프리즘”은 얇은 필라멘트 F 가 중심에 있는 접지된 원통형 그물망으로 이루어져 있다. 원천과 “이중 프리즘” 사이의 거리는 ℓ 이고, “이중 프리즘”과 스크린 사이 거리는 L 이다.

(a) **(2 점)** 필라멘트의 원형 단면의 중심을 원점 O 라고 했을 때, 필라멘트와 매우 가까이 있는 임의의 점 (x, z) 에서 전기 퍼텐셜을 V_a, a, b 로 나타내시오. 여기서 V_a 는 필라멘트 표면에서 전기 퍼텐셜이며, a 는 필라멘트의 반지름, b 는 필라멘트 중심과 원통형 그물망 사이의 거리이다. (영상 전하는 무시하시오.)

(b) **(4 점)** 입사하는 평면파 전자의 파수 벡터 k_z 는 전자에 작용하는 힘의 x 성분 때문에 “이중 프리즘”에 의해 꺾이게 된다. “이중 프리즘”에 의한 파수 벡터의 x 성분인 k_x 를 전자 전하량 e 와 v_z, V_a, k_z, a, b 로 나타내시오. 여기서 e, v_z 는 전자의 전하량과 속도의 z 성분이다. ($k_x \ll k_z$)
 $\vec{k} = \frac{2\pi\vec{p}}{h}$ 이며, 여기서 h 는 플랑크 상수임을 명심하시오.

(c) 점 S 전에, 전자들은 장 방출 탐침에서 방출되며, 퍼텐셜 V_0 에 의해 가속된다. 전자의 파장을 아래 조건 하에서 (정지) 질량 m , 전하 e 와 V_0 로 나타내시오.

(i) **(2 점)** 상대론적 효과가 무시 가능하다고 가정하는 경우

(ii) **(3 점)** 상대론적 효과를 고려하는 경우

(d) Tonomura 외 몇 명이 한 실험에서,

$$v_z = c / 2$$

$$V_a = 10 \text{ V}$$

$$V_0 = 50 \text{ kV}$$

$$a = 0.5 \text{ }\mu\text{m}$$

$$b = 5 \text{ mm}$$

$$\ell = 25 \text{ cm}$$

$$L = 1.5 \text{ m}$$

$$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\text{전자의 전하량, } e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{전자의 질량, } m_0 = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{진공에서 광속, } c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(i) **(2 점)** k_x 의 값을 계산하시오.

(ii) **(2 점)** 스크린의 간섭 무늬에서 무늬 사이 간격을 구하시오.

(iii) **(2 점)** 전자가 평면파가 아니라 구면파였다면, 무늬 사이 간격은 (ii)에서 구한 것보다 클 것인가, 작을 것인가, 아니면 같을 것인가?

(iv) **(2 점)** 파트 (c)에서, 비상대론적 근사를 사용한 경우 전자 파장의 퍼센트 오차를 구하시오.

(v) **(2 점)** 겉보기 이중 슬릿 사이 거리 d

문제 3

중력 렌즈는 관측자와 멀리 떨어진 물체를 잇는 선상 또는 그 근처에 위치한 매우 무거운 렌즈 역할을 하는 물체에 의해 생성된 시공간의 곡률에 의해 멀리 떨어진 광원에서 나오는 빛이 휘는 현상이다. 이 현상은 1919 년 개기 일식 때 처음 관측되었으며, 이 때 관측된 별들의 위치는 아인슈타인이 이전에 예측한 대로 천문학적 위치와는 달랐다.

관측자, 질량 M 의 렌즈 역할을 하는 물체, 광원이 일직선 상에 있는 경우, 광원에 나온 빛은 (라디안 단위로) 다음과 같은 각 α 만큼 꺾이게 된다.

$$\alpha = \frac{4GM}{r_E c^2}$$

여기서 G 는 중력 상수 ($6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$) 이고, c 는 광속 ($3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$) 이고, r_E 는 아인슈타인 반지름으로 렌즈 역할을 하는 물체와 겹보기 빛의 경로 사이의 최소 거리이다.

- (a) **(4 점)** 이상적인 렌즈 계 (관측자, 렌즈, 점 광원이 일직선 상에 존재) 의 물리적 레이아웃을 묘사하기 위한 그림을 그리시오. 빛의 경로를 그리고, α, r_E 를 표시하시오. 또한 아인슈타인 각반지름 θ_E (지구에서 봤을 때 광원의 상의 각 이동거리) 를 표시하고, 지구의 관측자가 측정 가능한 다른 양들도 표시하시오.
- (b) **(2 점)** 관측자, 렌즈 역할을 하는 물체, 광원이 일직선 상에 있을 때, 지구의 관측자가 보는 광원 (별 등) 의 상을 그리시오.
- (c) **(3 점)** 관측자, 렌즈 역할을 하는 물체, 광원이 일직선 상에 있지 않은 비 이상적인 경우, 광원 (별 등) 의 상을 그리시오. 이를 설명하기 위해 광원-렌즈 계를 그리시오.

중력 렌즈는 암흑물질이 후보 중 하나인 우리 은하에 있는 매우 밀한 헤일로 물체 (MACHOs) 를 탐지하기 위한 방법 중 하나로 제시되었다. 이 물체들은 주로 중성자별, 블랙홀과 같은 암흑 성간 물질이다. 별들과 MACHOs 가 은하에서 궤도 운동을 하면서 블랙홀이나 중성자별이 배경별 앞을 지나가는 경우, 렌즈 현상이 일어날 수 있다.

(d) **(3 점)** 블랙홀의 슈바르츠실트 반지름은 되돌아 올 수 없는 점을 정의한다. 슈바르츠실트 반지름에 대한 정확한 표현은 탈출 속도가 광속이 되는 반지름을 구함으로써 얻을 수 있다. 이는 슈바르츠실트 반지름 내에 있는 물체는 블랙홀을 빠져나갈 수 없다는 것이다. 뉴턴 역학을 이용해서, 점 질량 M 에서 거리 r 만큼 떨어져 있는 곳에서의 탈출 속도를 구하시오. 이를 이용해서, 점 질량 M 의 슈바르츠실트 반지름을 중력 상수 G 와 광속 c 로 나타내시오. 과정과 이유를 명확히 보여주시오. (이 과정을 통해 일반 상대론으로 구한 슈바르츠실트 반지름의 정확한 표현을 얻을 수 있다.)

(e) **(1 점)** 광원, 렌즈, 관측자가 일직선 상에 있는 경우, α, r_E 의 측정값이 주어졌을 때, 렌즈 역할을 하는 물체의 슈바르츠실트 반지름을 어떻게 계산할 것인가?

(f) **(2 점)** 렌즈 역할을 하는 물체의 질량이 태양의 몇 배이고 ($M \sim \text{a few} \times 10^{30} \text{ kg}$) , 은하에서 가까운 지역에 있고 (distance $D_L \sim \text{a few} \times 10^{18} \text{ m}$ away), 광원이 더 멀리 있는 ($D_s \sim \text{a few} \times D_L$) 경우를 고려하자. 이 경우 다음 중 어떤 조건이 성립하는가? 문제에서 설명한 경우에 적용되는 조건을 고르시오:

- | | |
|--|--|
| • α 는 크고 $\tan \alpha, \sin \alpha, \cos \alpha$ 는 정확히 계산되어야 한다. | • θ_E 는 크고 $\tan \theta_E, \sin \theta_E, \cos \theta_E$ 는 정확히 계산되어야 한다. |
| • α 는 작고 $\tan \alpha, \sin \alpha, \cos \alpha$ 에 작은 각 근사가 적용가능하다. | • θ_E 는 작고 $\tan \theta_E, \sin \theta_E, \cos \theta_E$ 에 작은 각 근사가 적용가능하다. |
| • α 는 무관하고, 계산할 필요가 없다. | • θ_E 는 무관하고, 계산할 필요가 없다. |

(g) **(3 점)** 파트 (f)의 조건을 이용해서, 렌즈 역할을 하는 물체의 질량이 태양의 몇 배이고 ($M \sim \text{a few} \times 10^{30} \text{ kg}$) , 은하에서 가까운 지역에 있고 (distance $D_L \sim \text{a few} \times 10^{18} \text{ m}$ away), 광원이 더 멀리 있는 ($D_s \sim \text{a few} \times D_L$) 경우에 대해 파트 (e)에서 구한 표현을 측정 가능한 양 (θ_E, D_s, D_L)로 나타내시오. 풀이 과정을 나타내시오.

(h) **(2 점)** 질량 $6.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ (3.0 solar masses) 인 렌즈 역할을 하는 물체가 지구에서 $9.2 \times 10^{18} \text{ m}$ 떨어져 있는 별 앞을 지구에서 거리 $2.6 \times 10^{18} \text{ m}$ 떨어진 곳에서 지나가는 사건이 발생한다고 가정하자. 이 사건 도중 이상적인 배치가 일어난다. 광원, 렌즈, 관측자가 일직선 상에 있을 때, 아인슈타인 각반지름 (지구에서 본) θ_E 는 얼마인가?