

문제 1

분수 양자 홀 효과 (FQHE) 는 1981년 D. C. Tsui와 H. Stormer에 의해 Bell Labs에서 발견되었다. 이 실험에서 전자들은 A. C. Gossard에 의해 합성된 GaAs/AlGaAs 접합의 경계면 퍼텐셜에 의해 GaAs 쪽 2차원 면에 속박되어 있다. (여기서 우리는 2차원 전자 층의 두께를 무시한다.) 강하고 균일한 자기장 B 가 이 2차원 전자 계에 수직하게 가해진다. Figure 1에서 그려졌듯이, 전류 I 가 샘플을 따라 흐를 때, 전류 경로를 가로지르는 방향의 전압 V_H 는 충분히 낮은 온도에서 예상치 못한 양자화된 평평한 거동 (홀 저항 $R_H = 3h / e^2$ 에 해당되는) 을 보이게 된다. 평평한 부분의 존재는 계의 아래에서 기술할 분수 전하량을 가진 준입자의 존재를 의미한다. 문제를 간단하게 하기 위해, 우리는 무작위적인 퍼텐셜에 의한 전자의 산란과 전자의 스핀은 무시한다.

(a) 고전적인 모델에서, 2차원 전자는 탁자 위의 전하를 띤 당구공처럼 거동한다. GaAs/AlGaAs 샘플에서 전자의 질량은 이온과의 상호작용에 의해 유효 질량 m^* 이다.

(i) (2 점) 서로 수직한 전기장 $\vec{E} = -E_y \hat{y}$ 과 자기장 $\vec{B} = B \hat{z}$ 안에 있는 전자의 운동 방정식을 적으시오.

(ii) (1 점) 정상 상태에서 전자의 속도 v_s 를 구하시오.

(iii) (1 점) 속도의 방향을 구하시오.

(b) (2 점) 홀 저항은 $R_H = V_H / I$ 로 정의된다. 고전적인 모델에서, R_H 를 전자의 수 N 과 자속 $\phi = BA = BWL$ 의 함수로 구하시오. 여기서, A 는 샘플의 넓이, W, L 은 각각 샘플의 유효 폭과 길이이다.

(c) (2 점) 우리는 전자들이 자기장 내에서 원 궤도를 따라 움직인다는 것을 알고 있다. 양자 역학적으로 보면, 가해진 자기장 B 는 전자의 바다에 소용돌이라고 불리는 작은 소용돌이를 만들게 되면, 하나의 소용돌이는 각각의 자속 양자 h / e 에 대응되며, 여기서 h 는 플랑크 상수, e 는 전자의 전하량이다. Tsui와 Stormer에 의해 발견된 $R_H = 3h / e^2$ 인 경우, 채움 인자 ν 라 불리는 전자의 수 N 과 자속 양자의 개수 N_ϕ 의 비를 구하시오.

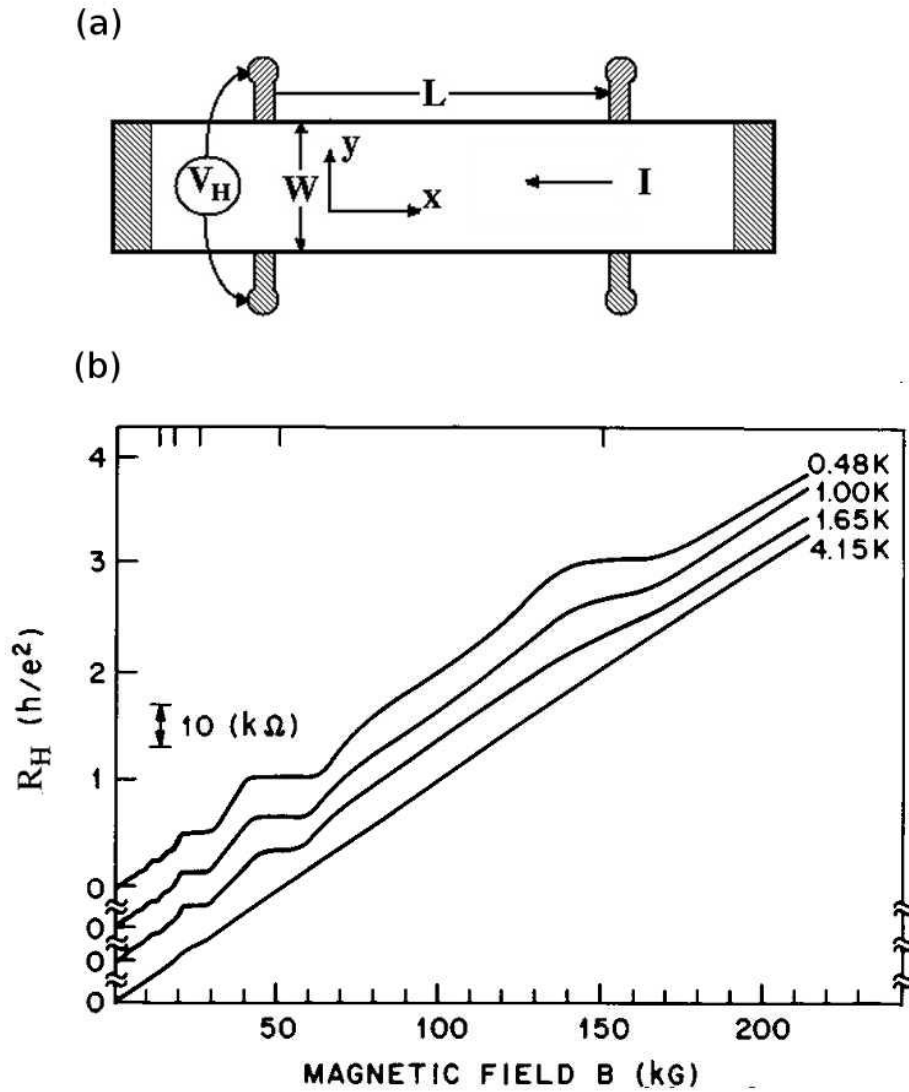


Figure 1: (a) FQHE의 관측을 위한 실험 장치의 모습. 표시되었듯이, 전류 I 가 유효 길이 L 의 2차원 전자계를 길이 방향을 따라 흐르고 있다. 홀 전압 V_H 는 유효 너비 W 의 횡 방향을 따라 측정된다. 여기에, 균일한 자기장 B 가 평면에 수직인 방향으로 가해진다. 전류의 방향은 그림을 위해 그려진 것이며, 맞지 않을 수 있다. (b) 원래 FQHE 논문에 있었던 네 개의 다른 온도에서 측정한 홀 저항 R_H 를 B 에 따라 그린 것 (곡선은 명료성을 위해 평행 이동됨). $R_H = 3h / e^2$ 에서의 특징은 FQHE에 의한 것이다.

- (d) (2 점) 각 전자에 정수 개의 ($n > 1$) 소용돌이를 결합하면 더 큰 소용돌이를 발생시켜 다른 전자들을 밀쳐낸다는 것이 밝혀졌다. 따라서, 계는 대응되는 채움 인자에 대해 정전기적 쿨롱 에너지를 상당히 줄일 수 있다. 각 전자당 에너지 변화량 $\Delta U(B) \propto B^\alpha$ 의 크기 지수 α 를 구하시오.

(e) (2 점) 자기장이 정확한 채움 인자 $\nu = 1/n$ 에서 좀 더 강한 장으로 변할 때, 더 많은 소용돌이 (전자의 바다에 생기는 소용돌이) 가 생성된다. 그들은 전자에 속박되어 있지 않고, 유효 양 전하를 운반하는 입자처럼 행동하며, 이는 음 전하의 전자와 비교해서 준양공으로 알려져 있다. 이 준양공의 전하량은 전자 전하량의 정확히 $1/n$ 이다. 비슷한 논리가 ν 보다 살짝 작은 자기장에 대한 음전하 $e^* = -e/n$ 의 준전자의 생성에 대해 적용될 수 있다. 양자화된 홀 저항 $R_H = 3h/e^2$ 의 평평한 부분에서, 정확히 한 개의 분수 전하량을 가진 준양공의 생성에 대응되는 자기장 B 의 변화량을 계산하시오. (준입자들의 밀도가 낮은 경우, 이들은 불순물과 결정의 결함에 의해 생성되는 무작위적 퍼텐셜에 의해 구속되어 있으며, 따라서 홀 저항은 유한한 범위의 B 에 대해 일정하게 유지된다.)

(f) Tsui 외 몇 명이 한 실험에서,

양자화된 홀 저항 $R_H = 3h/e^2$ 의 평평한 부분의 중앙에 대응되는 자기장은

$$B_{1/3} = 15 \text{ T}$$

GaAs에서 전자의 유효 질량 $m^* = 0.067 m_e$

전자 질량 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

쿨롱 상수 $k = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$

진공의 유전율 $\epsilon_0 = 1/4\pi k = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

GaAs의 비유전율 (물질의 유전율과 진공의 유전율의 비) $\epsilon_r = 13$

기본 전하량 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

플랑크 상수 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

볼츠만 상수 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

분석 과정에서, 에너지 스케일이 (d)에서 논의한 $\Delta U(B)$ 에 비해 너무 커서 들뜰 수 없거나 너무 작아서 관련이 없는 몇 가지 요인들은 무시하였다.

(i) (1 점) 온도 $T = 1.0 \text{ K}$ 에서 열적 에너지 E_{th} 를 계산하시오.

(ii) (2 점) 전자들은 큰 운동 에너지를 가진 소용돌이 내에 공간적으로 구속되어 있다. 불확정성 원리를 이용해서, 운동 에너지의 크기를 대략적으로 추정하시오. (이 양은 두 전자를 두 개의 다른 소용돌이에 넣는 대신, 같은 소용돌이에 넣는 경우, 파울리 배타 원리에 의한 에너지적인 손해량이다.)

- (g) Tsui 외 몇 명이 한 실험에서, Figure 1(b)에서 보이듯이 $R_H = h / ie^2$ 에 해당하는 평평한 부분들도 나타났으며, 여기서 $i = 1, 2, 3, \dots$ 이다. 이 정수 양자 홀 효과 (IQHE)로 알려져 있는 평평한 부분들은 1980년에 K. von Klitzing에 의해 먼저 발표되었다. (c) - (f)의 과정을 정수의 평평한 부분에 대해 반복하면, FQHE의 새로움은 분수 전하량을 가진 준입자에 있음을 알 수 있다. R. de-Picciotto 외 몇 명과 L. Saminadayar 외 몇 명은 독립적으로 $\nu = 1/3$ 채움 상태에서 분수 전하량을 1997년에 관측하였다. 이 실험에서, 그들은 양자 점 접촉 (QPC) 라 불리는 좁은 구역을 따라 흐르는 전류의 소음을 측정하였다. 간단한 통계적 모델에서, 이산적인 전하 e^* 를 가진 운반자가 QPC를 따라 통과하며 전류 I_B 를 생성한다. (배경의 영향은 사소하다.) 충분히 작은 시간 간격 τ 동안 전극에 도달하는 운반자의 수 n_τ 는 인자가 λ 인 푸아송 확률 분포를 따른다.

$$P(n_\tau = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

여기서 $k!$ 은 k 팩토리얼이다. 다음 식이 필요할 것이다.

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- (i) (2 점) 단위 시간 당 총 전하량을 측정한 값인 전류 I_B 를 λ, τ 로 나타내시오.
- (ii) (2 점) 전류 소음은 단위 시간 당 전하량의 요동으로 정의된다. 이는 전류를 운반하는 전하의 수의 표준 편차를 측정함으로써 분석될 수 있다. 전류 운반자의 이산성에 의한 전류 소음 S_I 를 λ, τ 로 나타내시오.
- (iii) (1 점) R. de-Picciotto 외 몇 명과 L. Saminadayar 외 몇 명에 의해 1997년에 확인된 소음 대 전류 비율 S_I / I_B 를 계산하시오. (1년 후, Tsui와 Stormer는 $\nu = 1/3$ 에서 바닥 상태 파동함수에 대한 elegant한 ansatz를 제안한 R. B. Laughlin과 함께 노벨 물리학상을 받는다.)

문제 2

태양풍에 의해 오로라가 어떻게 형성되는가?



Figure 1

아래 문제들은 과정을 차근차근 알려줌으로써 당신을 답으로 인도할 것이다. **Background information of the interaction between the solar wind and the Earth's magnetic field**

지구가 상당한 자기장을 가지고 있다는 것은 잘 알려져 있다. 지구의 자기장을 정의하는 자기력선은 Figure 2에 보여진 것과 같은 단순한 막대 자석의 것과 유사하다. 지구의 자기장은 고속 고온의 플라스마인 태양풍에 의해 교란된다. (플라스마는 준 중성의 이온화된 기체이다.) 플라스마는 태양으로부터 나오며, 태양 표면의 활동에 따라 세기가 달라진다. 태양풍은 지구의 자기장을 압축시키며, 그 와중에 지구의 자기장은 이러한 태양풍으로부터 지구를 상당히 많이 보호 해준다. 태양풍이 지구의 자기장에 진입하게 되면, Figure 3에서와 같이 배 주위의 물처럼 굴절된다.

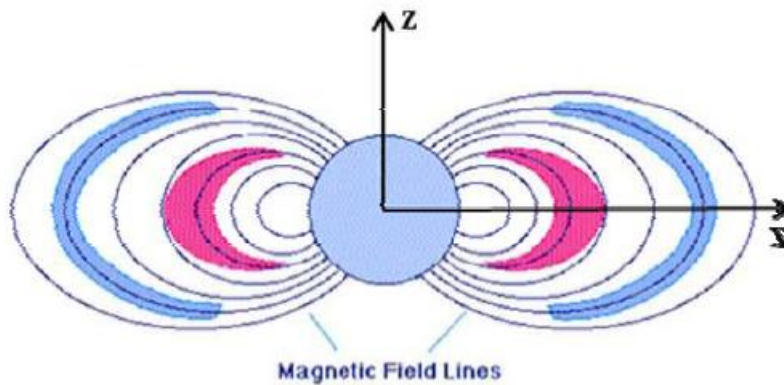


Figure 2

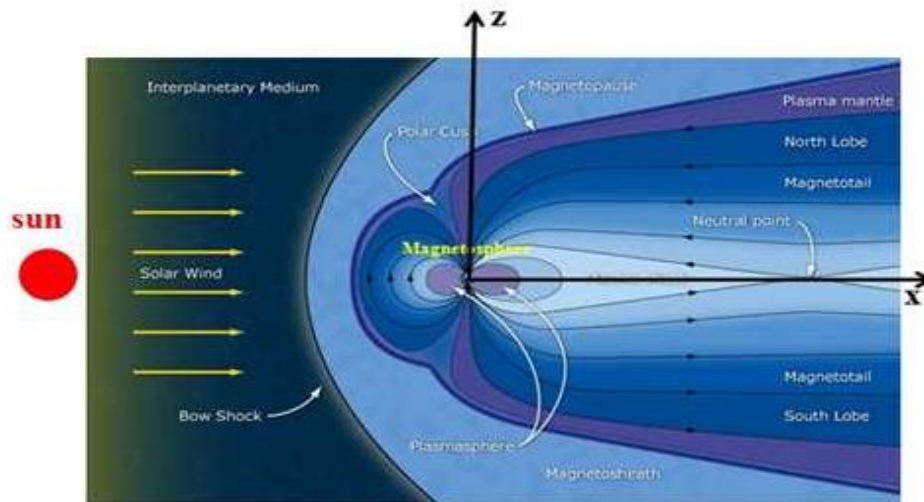


Figure 3

태양풍이 처음 굴절되는 곡면은 *bow shock* 이라 불린다. bow shock 뒤에 있고 지구의 자기장에 앞에 있는 영역은 *magnetosheath* 라 불린다. 태양풍에 의해 둘러싸인 영역은 *magnetosphere* 라고 불린다. 지구의 자기장은 태양풍이 *magnetosphere* 에 진입하는 것을 막는다. 태양풍과 지구의 자기장이 만나는 영역은 *magnetopause* 라 불린다. *magnetopause* 의 위치는 태양풍의 세기와 자기장의 방향에 의해 대부분 결정된다. 태양풍 내의 자기장이 지구의 자기장과 반대 방향이면, 낮 쪽 *magnetopause* 에 Figure 4 와 같은 자기장 재연결이 일어나며, Figure 5 에서와 같이 영역 “A”의 태양풍 내에 있는 대전된 입자들이 밤 쪽에 있는 *magnetotail* “P”로 이동하게 된다. 강력한 태양풍은 낮 쪽 *magnetopause* 를 지구에 매우 가까운 곳으로 밀어낼 수 있으며, (정지 위성과 같은) 고 궤도 위성이 태양풍에 완전히 노출되게 한다. 태양풍 내의 고 에너지 입자들은 위성 내 첨단 전자 기기에 손상을 가할 수 있다. 따라서, 자기장 내에서 대전된 입자의 운동을 탐구하는 것은 중요하며, 이는 태양풍과 지구의 자기장 사이 상호작용의 메커니즘을 이해하는 데 도움을 줄 것이다.

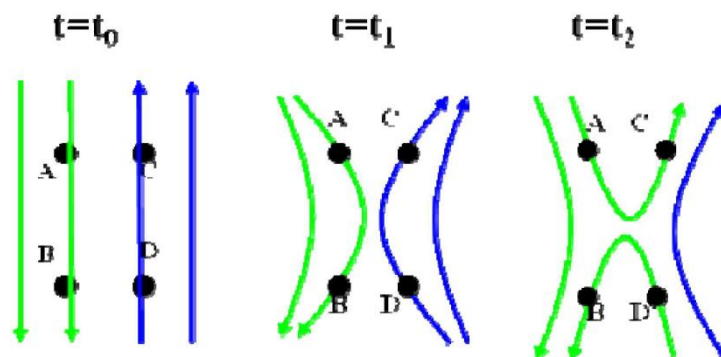


Figure 4

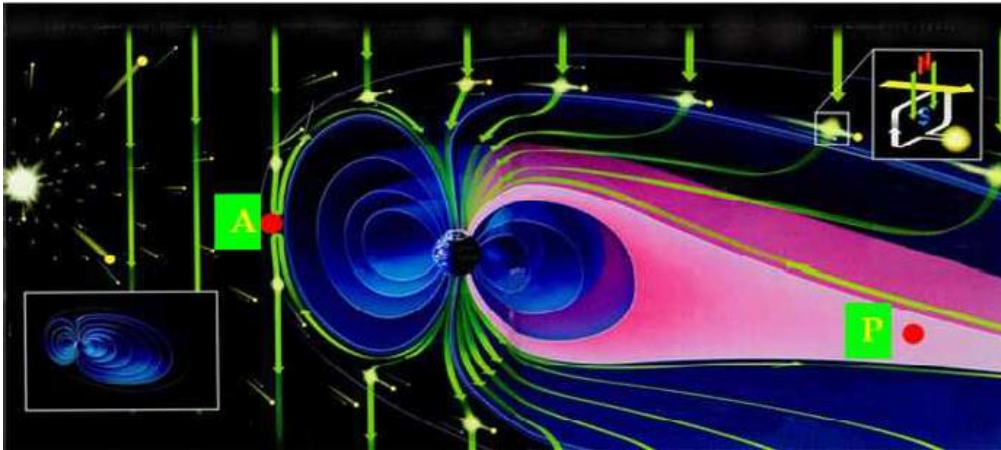


Figure 5

물리 상수와 지구의 자기장의 값:

진공에서 광속: $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$

진공의 유전율: $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$

진공의 투자율: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$

양성자의 전하량: $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

전자의 질량: $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

양성자의 질량: $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

볼츠만 상수: $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

중력가속도: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

플랑크 상수: $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

지구 반지름: $R_E = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$

지구의 자기 쌍극자 모멘트에 의한 자기장은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\vec{B}_d = \frac{B_0 R_E^3}{r^5} [3xz\hat{x} - 3yz\hat{y} + (x^2 + y^2 - 2z^2)\hat{z}], \quad (r \geq R_E)$$

여기서 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $B_0 = 3.1 \times 10^{-5} \text{ T}$ 이고, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ 은 각각 x, y, z 방향 단위 벡터이다.

문제들:

(a) (3 점)

(i) (1 점) 지구의 쌍극자에 의한 자기장 내에서 대전된 입자의 운동을 탐구하기 전에, 우리는 균일한 자기장 $\vec{B}$ 내에서 전자의 운동을 고려할 것이다. 초기 전자의 속도 $\vec{v}$ 가 Figure 6 에서와

같이 균일한 자기장에 수직한 방향일 때, 전자의 경로를 계산하시오. 초기 전자 위치는 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 이다.

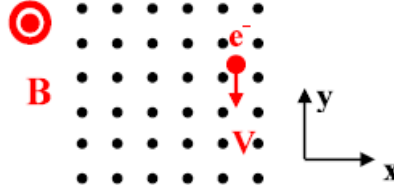


Figure 6

(ii) (1 점) 전자의 운동에 의한 전류와 자기 모멘트 $\vec{\mu} = I\vec{A}$ 를 계산하시오. 여기서 $\vec{A}$ 의 크기는 전자 원 궤도의 넓이이며, 방향은 전류 방향과 오른손 법칙에 의해 결정된다.

(iii) (1 점) 초기 전자 속도 $\vec{v}$ 가 균일한 자기장에 수직하지 않는 경우, 즉, $\vec{B}$ 와 $\vec{v}$ 사이의 각도 θ 의 범위가 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 인 경우, 전자의 궤적인 나선의 피치(두 개의 연속적인 궤도에 대해 z 축 방향의 간격)를 구하시오.

(b) (4 점) Figure 6 의 균일한 배경 자기장 내에서, 플라즈마의 밀도는 x 방향으로 균일하지 않다. 문제를 간단하게 만들기 위해, 이온들과 전자들의 온도와 분포는 동일하다고 가정하자. 따라서 플라즈마 압력은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$p(x) = kT[n_i(x) + n_e(x)] = 2kTn(x) = 2kT(n_0 + \alpha x)$$

여기서 B, T, k, n_0, α 는 양의 상수이고, $n_i(x), n_e(x)$ 는 각각 이온과 전자의 수 밀도이다.

(i) (2 점) 간략한 그림을 통해 전류 발생 메커니즘을 설명하시오.

(ii) (2 점) 이온과 전자가 모두 맥스웰 분포를 따르는 경우, 이온의 분포는 아래와 같다.

$$f_i(x, v_\perp, v_\parallel) = n_i(x) \left(\frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_i(v_\perp^2 + v_\parallel^2)/2kT}$$

자화 $M = \beta n(x) \frac{kT}{B}$ 에서 상수 β 를 계산하시오. 여기서 자화 M 은 단위 부피당 자기

모멘트이다. (힌트: $\int_0^\infty x \exp(-x) dx = 1$ 이고, $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ 이다.)

(c) (1 점) 이제 지구의 쌍극자에 의한 자기장으로 돌아가자. 문제 (b)에서 얻은 결과를 적용해서 위치 $(x = 10R_E, y = 0, z = 1R_E)$ 에서 반자성에 의한 장과 식 (1)에 의한 지구의 쌍극자에 의한 장의 비를 구하시오. 플라스마의 압력은 $p(z) = p_0 e^{-(z/a)^2}$ 이라고 가정하며, 여기서 $p_0 = 3 \times 10^{-10}$ Pa 이고, $a = 2R_E$ 이다. 이 주변의 자기장은 균일하다고 가정하자. 문제 (b)와 (c)에서 좌표계의 차이에 유의하시오. (힌트: 반자성에 의한 장은 $B_{mx} = \mu_0 M$ 로 주어진다.)

(d) (4 점) Figure 2, 3, 5 에서 자기력선을 따라갔을 때 지구의 자기장 세기는 극에서 제일 강하고, 적도면에서 제일 약함을 자명하게 알 수 있다. 지구의 쌍극자에 의한 자기장은 축 대칭이고 자기력선을 따라 서서히 변하기 때문에, 문제를 간단하게 만들기 위해 Figure 7 에서와 같이 자기장 거울로 취급할 수 있다. 자기력선을 따라갔을 때 자기장 세기는 점 P_2 에서 최소이며 (B_0), 점 P_1, P_3 에서 최대이다. (B_m) 초기 속도가 $\vec{v}$ 인 전자가 위치 P_2 에 놓아졌고, P_3 를 향해 움직인다. P_2 에서 초기 속도 $\vec{v}$ 와 자기장 사이 각도는 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이다. 자기 거울에 해당하는 장 $\vec{B} = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$ ($B_r \ll B_z$) 에 대해, 우리는 $\frac{dB}{dz} = \frac{dB}{ds}$ 로 가정할 수 있으며, 여기서 $\frac{dB}{ds}$ 는 자기력선을 따른 B 의 공간 미분이다. 자기 홀극의 존재와 관련된 증거가 없기 때문에, 우리는 $\langle B_r \rangle = -\frac{1}{2} \frac{dB}{dz} r_c \ll B_z$ 라고 할 수 있으며, 여기서 $\langle B_r \rangle$ 은 한 바퀴 동안 B_r 의 평균이며, r_c 는 전자의 회전 반지름이다.

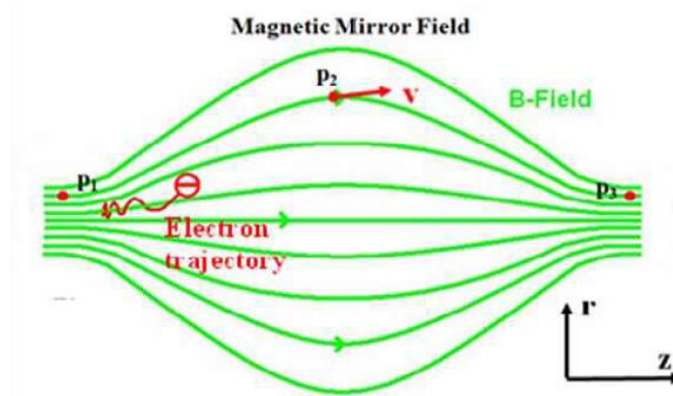


Figure 7

- (i) (3 점) 전자에 대해 자기력선을 따른 한 바퀴 동안의 자기장 평균을 구하고, 총 운동 에너지 보존에 기반하여 자기 모멘트가 운동 상수, 즉, $\frac{d\mu}{dt} = 0$ 임을 보이시오.
- (ii) (1 점) 자기 모멘트가 운동 상수라는 것에서, 전자가 자기 거울 장에서 탈출하지 않기 위한 점 P_2 에서 초기 전자 속도 $\vec{v}$ 과 자기장 사이 각도 θ 의 조건을 구하시오.

(e) (1 점) 지구의 자기력선 (푸른 선) 이 Figure 8 에 그려져 있다. 대전된 입자의 나선형 궤적 (붉은 선) 은 자기장의 기울기와 곡률이 무시될 수 있기 때문에 $y = 0$ 평면에 구속되었다고 볼 수 있다. 질량 m , 전하량 q , 초기 속도 $\vec{v}$ 의 입자가 초기에 적도면에 $[x = 6R_E, y = 0, z = 0]$ 에 위치하고, 초기 속도 $\vec{v}$ 와 자기장 사이 각도가 θ 인 경우, 위도 60° 에서 대전된 입자가 고도 200 km 아래에 위치할 θ 의 조건을 구하시오.

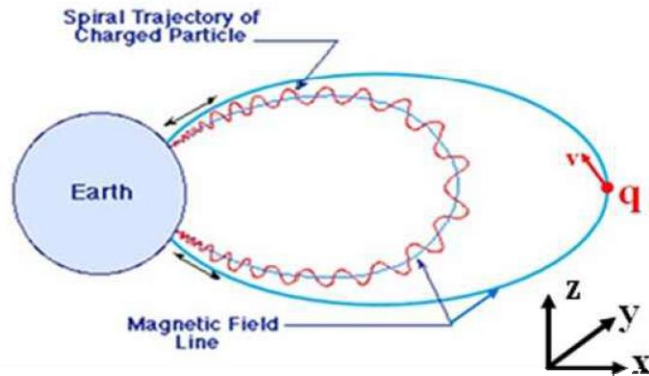


Figure 8

(f) (5 점) Figure 5 에서와 같이, 자기장 재연결이 낮 쪽 magnetopause 에서 일어날 경우, 재연결된 자기력선은 꼬리 방향으로 부는 태양풍을 따라 밤 쪽 영역으로 이동하게 된다. 따라서, 영역 A 의 일부 태양풍 전자들은 영역 P 에 있는 magnetotail 로 이동하게 된다. 전자들이 영역 P 에 도달한 이후, 일부 전자들은 1keV 로 가속된다. 이러한 에너지가 큰 전자들이 열권으로 (열권의 고도는 85 km - 800 km 이다.), 에너지가 큰 전자들은 중성 원자들과 충돌할 수 있으며, 이는 중성 원자가 들뜬 상태로 전이하게 만든다. 중성 원자가 에너지가 높은 들뜬 상태에서 에너지가 낮은 들뜬 상태 또는 바닥 상태로 돌아갈 때, 광자가 방출된다. 멋진 오로라 (Figure 1) 은 서로 다른 파장을 가진 광자들에 의해 오로라 구 내에서 형성된다. 오로라는 주로 산소 원자에서 방출된 광자들에 의해 만들어 진다는 것이 밝혀졌다. 바닥 상태에 대해 첫번째 들뜬 상태와 두번째 들뜬 상태의 에너지 준위는 각각 1.96 eV 와 4.17 eV 이다. 두 들뜬 상태의 수명은 Figure 9 에서 보듯이 각각 110 s 와 0.8 s 이다.

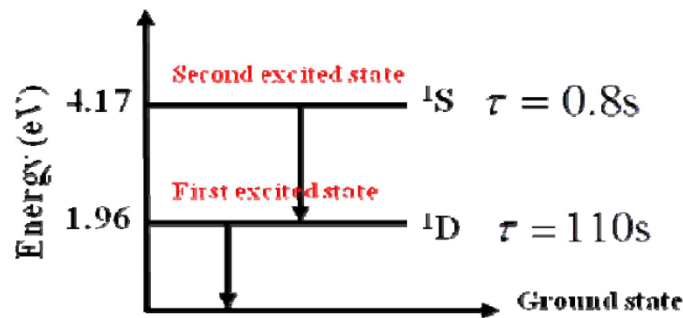


Figure 9

(i) (2 점) 대기의 밀도를 고도의 함수로 구하고, 고도 $H = 160 \text{ km}$ 와 $H = 220 \text{ km}$ 에서 산소의 밀도 비를 구하시오. 문제를 간단하게 하기 위해, 대기 온도는 고도에 무관하고 공기는 이상기체라고 가정하자. ($\rho_0 g / P_0 = 0.13 / \text{km}$ 이고, 여기서 ρ_0, P_0 는 각각 해수면에서 대기 밀도와 대기압이다.)

(ii) (3 점) 고도 $H = 160 \text{ km}$ 와 $H = 220 \text{ km}$ 에서 각각 오로라의 색을 구하시오. (힌트: 단위 시간당 대기 분자들의 충돌 횟수 ν 는 대기의 밀도에 다음과 같이 의존한다: $\nu = \nu_0 \rho / \rho_0$. 여기서 $\nu_0 \approx 10^9 / \text{s}$ 는 해수면에서 단위 시간당 대기 분자들의 충돌 횟수이다. 들뜬 상태의 산소 원자는 다른 중성 분자와 충돌할 때, 에너지의 일부를 잃게 된다.

(g) (2 점) 위에서 언급하였듯이, 강력한 태양풍은 낮 쪽 magnetopause 를 지구에 가깝게 밀 수 있으며, 이 때문에 고 궤도 인공위성이 태양풍에 그대로 노출되게 된다. 태양풍의 에너지가 많은 입자들은 위성에 있는 첨단 전자 장비에 손상을 줄 수 있다. 문제를 간단하게 하기 위해, 지구의 쌍극자에 의한 자기장은 태양풍에 의해 압축되는 동안 변하지 않는다고 가정하고, magnetosphere 에서 플라즈마 밀도는 무시 가능하다고 하자. 태양풍의 자기장과 플라즈마 밀도가 각각 $B_s = 5 \times 10^{-9} \text{ T}$ 와 $\rho_s = 50 \text{ proton/cm}^3$ 일 때, 정지 위성에 손상을 줄 수 있는 태양풍의 최소 속력을 구하시오. (힌트: 자기장에 의한 압력은 $f = B^2 / 2\mu_0$ 이다. 모든 물리량에 대해 x 방향 변화만 고려하자. 즉, 모든 물리량은 y, z 에 무관하다.)

문제 3

Figure 1 은 페브리-패럿 (F-P) etalon 을 보여주고 있으며, 여기서 공기 압력은 조절 가능하다. F-P etalon 은 안쪽 면의 반사율이 매우 높은 두 개의 유리판으로 이루어져 있다. 두 판은 빛이 앞뒤로 반사될 수 있는 공동을 형성한다. 판의 바깥쪽 표면들은 일반적으로 안쪽과 평행하지 않으며, 앞뒤로 반사되는 것에 영향을 끼치지 않는다. Etalon 내부의 공기 밀도는 조절 가능하다. 나트륨 램프에서 나오는 빛은 렌즈 L1 에 의해 집속되며 F-P etalon 를 지나가게 된다. Etalon 의 투과율은 다음과 같다: $T = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta / 2)}$, 여기서 $F = \frac{4R}{(1 - R)^2}$ 이며 R 은 내부 표면의 반사율, $\delta = \frac{4\pi n t \cos \theta}{\lambda}$ 는 두 이웃한 광선 사이 위상차, n 은 기체의 굴절률, t 는 안쪽 표면 사이 간격, θ 는 입사각, λ 는 빛의 파장이다.

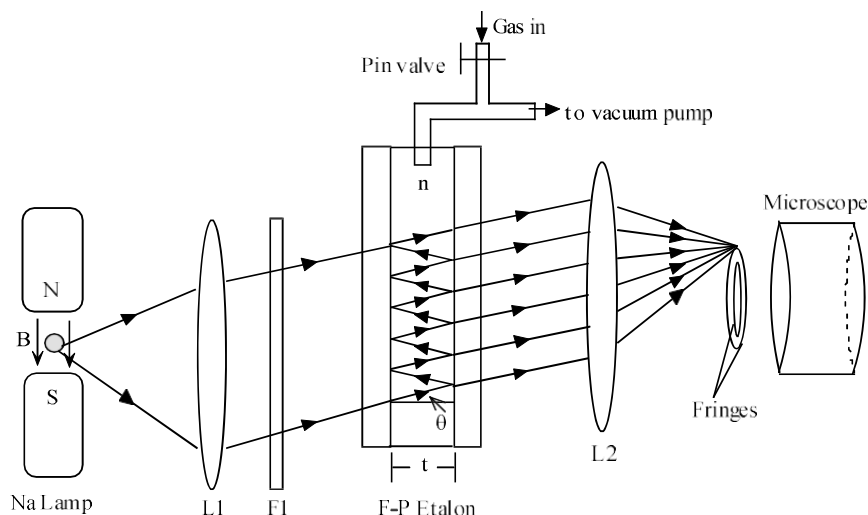


Figure 1

나트륨 램프는 D1 ($\lambda = 589.6 \text{ nm}$) 와 D2 (589 nm) 선에 해당하는 빛을 방출하며, 조절 가능한 자기장 내에 위치해 있다. 문제를 간단하게 하기 위해, 광 필터 F1 은 D1 선에 해당되는 빛만 통과할 수 있다고 가정하자. 그 이후 D1 광은 렌즈 L1 에 의해 F-P etalon 으로 집속된다. 원형 간섭 무늬가 초점거리 $f = 30 \text{ cm}$ 인 렌즈 L2 의 초평면에 생기게 된다. 서로 다른 무늬는 서로 다른 입사각 θ 에 대응된다. 무늬를 관측하기 위해 현미경이 사용된다. 반사율 $R = 90 \%$, 안쪽 표면 사이 간격 $t = 1 \text{ cm}$ 라고 하자.

몇몇 물리 상수: $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(a) (3 점) D1 선 ($\lambda = 589.6 \text{ nm}$) 는 F-P etalon 으로 집속된다. 진공 ($n = 1.0$) 의 경우, 초평면의 고리 형 패턴의 중심으로부터 처음 세 개 무늬의 (i) 간섭 차수 m_i 와 (ii) 입사각 θ_i , (iii) 지름 D_i ($i = 1, 2, 3$) 을 구하시오.

(b) (3 점) Fig.2 에서 보듯이, 분광 선의 두께 ε 는 위상차 δ 에 따른 빛 투과율 T 의 그래프에서 최대 밝기의 절반에 해당하는 두께 (FWHM) 로 정의된다. F-P etalon 의 분해능은 다음과 같이 정의된다: 두 파장 λ 와 $\lambda + \Delta\lambda$ 에 대해, 두 분광선의 중앙극대의 위상차 $\Delta\delta$ 가 ε 보다 큰 경우, 분해 가능하다고 하자. 그러면 etalon 의 분해능은 $\Delta\delta = \varepsilon$ 인 경우에 대해 $\lambda / \Delta\lambda$ 가 된다. 진공의 경우, 입사각 $\theta \approx 0$ 이므로 $\cos \theta \approx 1.0$ 로 가정할 수 있으며, D1 선 ($\lambda = 589.6 \text{ nm}$) 에 대해 다음 값을 계산하시오.

(i) 분광선의 두께 ε

(ii) Etalon 의 분해능 $\lambda / \Delta\lambda$

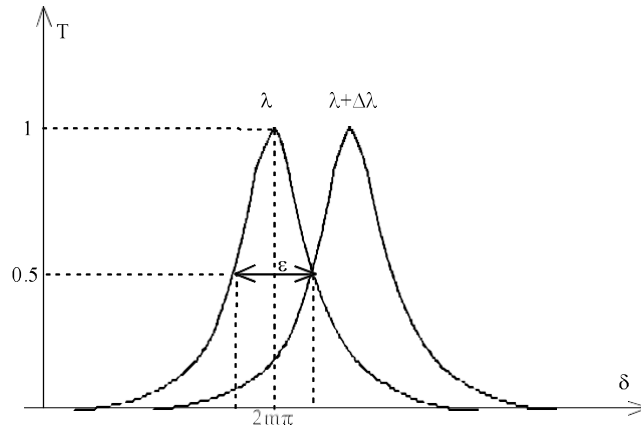


Figure 2

(c) (1 점) Fig.1 에서 보듯이, 초기 공기 압력은 0 이다. 핀 밸브를 조금씩 조절함으로써, 공기는 서서히 F-P etalon 내부로 주입되며, 공기 압력은 최종적으로 일반적인 대기압에 도달하게 된다. 동시에, 10 개의 새로운 간섭 무늬들이 초평면에 있는 고리 패턴의 중심에서 생성되는 것이 관측된다. 이 현상에 기초해서, 일반적인 대기압 하에서 공기의 굴절률 n_{air} 를 계산하시오.

(d) (2 점) 자기장 내에서 나트륨 원자의 에너지 준위는 갈라진다. 이는 Zeeman 효과로 알려져 있다. 에너지 갈라짐은 $\Delta E = m_j g_k \mu_B B$ 로 주어지며, 여기서 양자수 m_j 는

$J, J-1, \dots, -J+1, -J$ 의 값을 가질 수 있으며, 여기서 J 는 총 각운동량 양자수이고, g_k 는 Landé 상수, $\mu_B = \frac{he}{4\pi m_e}$ 는 보어 마그네톤이며, 여기서 h 는 플랑크 상수, e 는 전자 전하량, m_e 는 전자 질량이며, B 는 자기장이다. Fig.3 에서 보듯이, D1 분광 선은 나트륨 원자가 상태 $^2P_{1/2}$ 에서 $^2S_{1/2}$ 로 전이할 때 방출된다. 두 상태 모두에 대해 $J = \frac{1}{2}$ 임을 알고 있다. 따라서 자기장 내에 있을 때, 각 에너지 준위는 두 개의 준위로 나뉘게 된다. 우리는 두 갈라진 상태에 대한 에너지 간격을 $^2P_{1/2}$ 에서는 ΔE_1 , $^2S_{1/2}$ 에서는 ΔE_2 라 하자. ($\Delta E_1 < \Delta E_2$) 그 결과, D1 분광 선은 Fig.3 에서 그려진 것처럼 총 4 개의 분광 선으로 나뉘게 된다. (a, b, c, d) 네 개의 선 a, b, c, d 에 대해 각각의 진동수 (ν) 에 대한 표현을 적으시오.

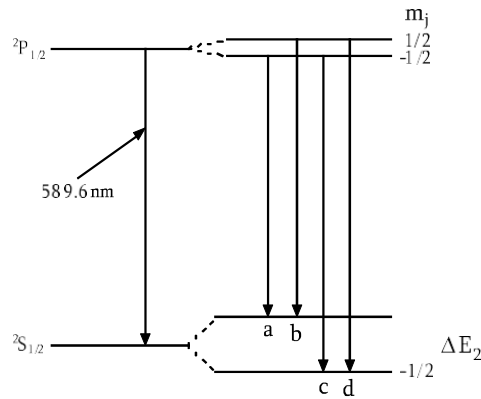


Figure 3

(e) (3 점) Fig.4 에서 보듯이, 자기장이 켜져 있는 경우, D1 선의 각 간섭 무늬는 4 개의 부 무늬 (1, 2, 3, 4) 로 갈라지게 된다. 중심 근방에서 각 부 무늬의 지름은 각각 D_1, D_2, D_3, D_4 로 측정되었다. $^2P_{1/2}$ 에서의 에너지 갈라짐 ΔE_1 와 $^2S_{1/2}$ 에서의 에너지 갈라짐 ΔE_2 에 대해 표현을 구하시오.

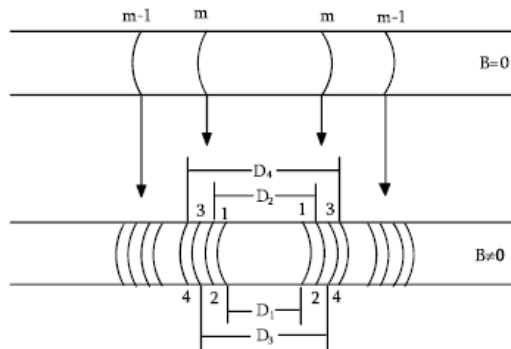


Figure 4

(f) (3 점) 자기장 $B = 0.1\text{T}$ 일 때, 네 개의 부 무늬의 지름 측정 결과는 다음과 같다:
 $D_1 = 3.88\text{ mm}$, $D_2 = 4.05\text{ mm}$, $D_3 = 4.35\text{ mm}$, $D_4 = 4.51\text{ mm}$. $^2\text{P}_{1/2}$ 상태의 Landé 상수 g_{k1}
 과 $^2\text{S}_{1/2}$ 상태의 Landé 상수 g_{k2} 를 계산하시오.

(g) (2 점) 태양의 자기장은 태양의 몇몇 특별한 구역에서 나트륨 D1 선의 Zeeman 효과를 측정함으로써 결정할 수 있다. 네 개의 갈라진 선 중에서 가장 짧은 파장과 가장 긴 파장 사이의 파장 차이가 0.012 nm 임을 태양 분광법을 통해 관측했다고 하자. 태양의 이 구역에서 자기장 B 는 얼마인가?

(h) (3 점) 중앙 파장이 $\lambda = 650\text{ nm}$ 이고 파장 폭이 $\Delta\lambda = 20\text{ nm}$ 인 LED 에서 방출된 빛이 Fig.1 에 있는 F-P etalon 에 수직하게 ($\theta = 0$) 에 입사한다. 진공인 경우, (i) 투과된 스펙트럼에서 선의 개수, (ii) 각 선의 진동수 폭 $\Delta\nu$ 를 구하시오.