

Mechanics of a Deformable Lattice (Total Marks: 20)

이 문제에서 우리는 변형 가능한 물리 진자로 사용되는 중력장 내에서 매달려있는 변형 가능한 격자 구조를 탐구할 것이다. 이 구조는 자유도가 1 개 밖에 없다. 즉, 이 구조를 변화시키는 방법은 한 가지 밖에 없으며, 그 배치는 하나의 변수 α 로 완벽하게 결정된다. 이 구조는 19 세기에 유명한 물리학자 James Maxwell 에 의해 탐구되었으며, 최근에 들어 놀랄 만한 성질들이 밝혀지고 있다.

Figure 1 에서 보듯이, N^2 개의 동일한 정삼각형 판(붉은 정삼각형) 들은 동일한 막대들에 의해 자유롭게 움직일 수 있도록 양 끝이 연결되어 $N \times N$ ($N > 1$) 격자를 형성한다. 꼭짓점의 연결 부위는 작은 원으로 표시되어 있다. 막대와 정삼각형의 변의 길이는 l 로 동일하다. 그림에서 점선은 가장자리에 있는 N 개의 꼭짓점 (회색 원)을 구속하고 있는 네 개의 튜브를 의미한다. 그 N 개의 꼭짓점은 튜브 안에서 미끄러진다. 즉, 튜브는 미끄럼 레일처럼 작용한다.

4 개의 튜브는 Figure 1 에서 보듯이 사이각이 60° 와 120° 로 고정된 마름모 모양을 하고 있다. 각각의 판은 밀도가 균일하고 질량이 M 이며, 계의 다른 부분은 질량이 없다. 격자의 배치는 각도 α ($0^\circ < \alpha < 60^\circ$) 에 의해서 유일하게 결정된다. (Figure 1 에서 여러 가지 다른 α 값에 대응되는 배치의 예시를 참고하길 바란다.) 이 계는 가장 위의 튜브가 수평방향으로 고정된 상태에서 연직 방향으로 커튼처럼 걸려있는 모습이다.

Figure 2 에는 좌표계가 나타내어져 있다. 퍼텐셜 에너지의 기준점은 $y = 0$ 로 정의되어 있다. 하나의 정삼각형 판은 순서쌍 (m, n) 으로 표현되며, 여기서 $m, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 이고, 각각 x, y 방향을 나타낸다. $A(m, n), B(m, n), C(m, n)$ 은 각각 삼각형 (m, n) 의 세 꼭짓점의 위치를 나타낸다. 가장 왼쪽 위의 꼭짓점 $A(0, 0)$ (큰 검은색 원)은 고정되어 있다.

전체 계의 운동은 x - y 평면 상에서만 일어난다. 균일한 정삼각형 판의 질량 중심에 대한 관성 모멘트는 $I = \frac{Ml^2}{12}$ 이다. 중력 가속도는 g 이다. 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지를 나타내기 위해 각각 E_k 와 E_p 라는 기호를 사용하라.

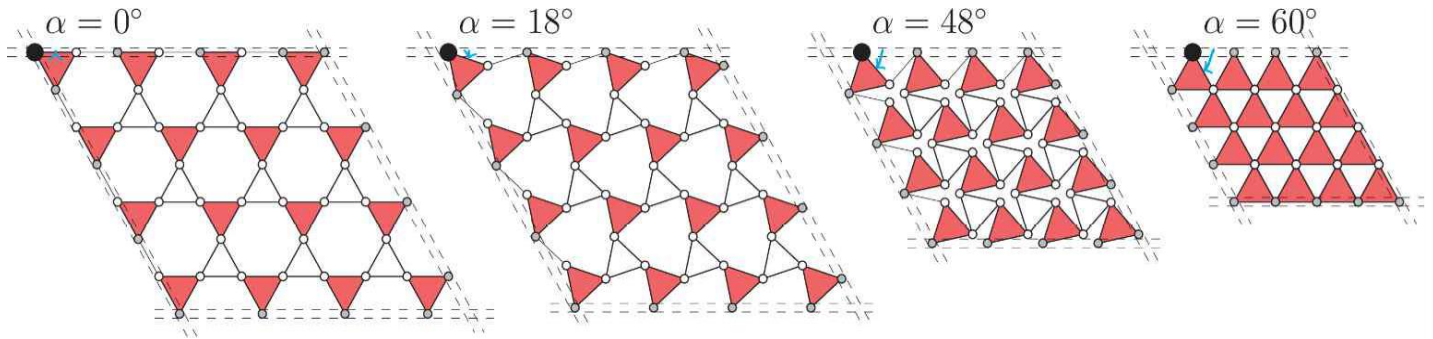


Figure 1

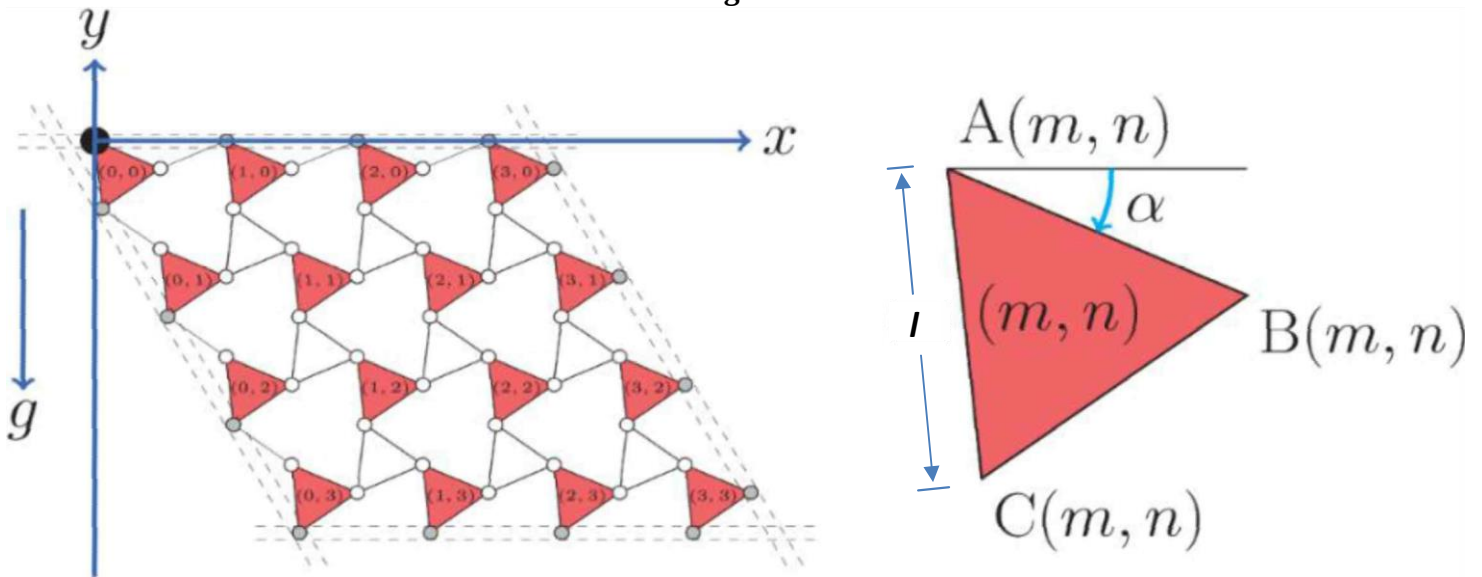


Figure 2

Section A: $N=2$ 일 때 (figure 3 에 그려진 것과 같이):

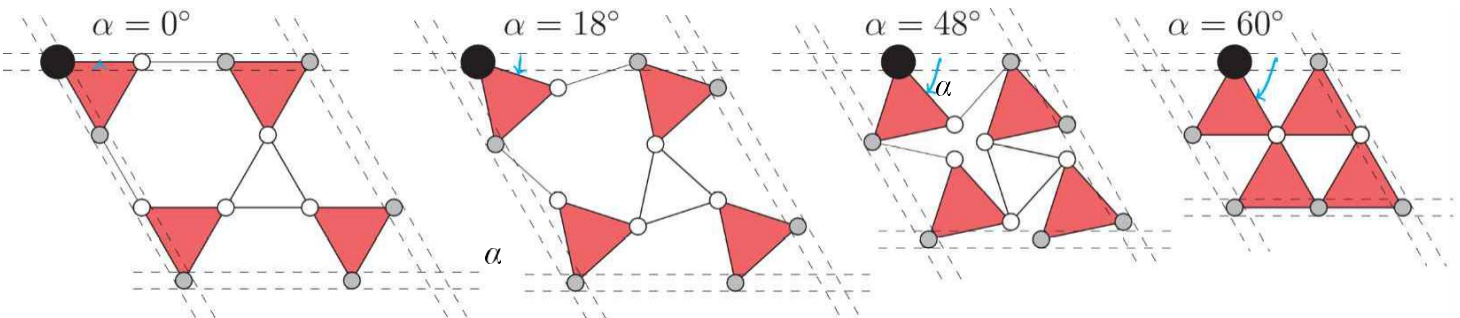


Figure 3

A1	$N = 2$ 일 때, 임의의 각 α 에 대해 전체 계의 퍼텐셜 에너지 E_p 는 얼마인가?	2 points
A2	$N = 2$ 일 때, 중력장 내에서 계가 평형을 이룰 때의 각도 α_E 는 얼마인가?	1 point

A3	이 계는 평형 상태에서 작은 섭동이 가해진 경우, 단진동을 하게 된다. 이 계의 운동 에너지를 $\Delta\dot{\alpha} = d(\Delta\alpha)/dt$ 를 이용해 나타내시오. 또한 $N = 2$ 일 때, 단진동의 진동수 f_E 를 계산하시오.	5 points
-----------	---	-----------------

Section B: 임의의 N 에 대해서:

B1	임의의 N 에 대해 중력장 내의 평형 각도 α_E' 는 얼마인가?	3 points
-----------	---	-----------------

B2	$N \rightarrow \infty$ 인 경우를 생각하자. 각 α 에 가해진 작은 섭동 하에서, 계의 퍼텐셜 에너지 변화 $\Delta E_p \propto N^{\gamma_1}$, 계의 운동 에너지 $E_k \propto N^{\gamma_2}$, 진동수 $f_E' \propto N^{\gamma_3}$ 이다. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 의 값을 구하시오.	3 points
-----------	---	-----------------

Section C: $3N^2$ 개의 꼭짓점 중 하나에 힘이 가해져서 계가 $\alpha_m = 60^\circ$ 에 멈춰있는 경우

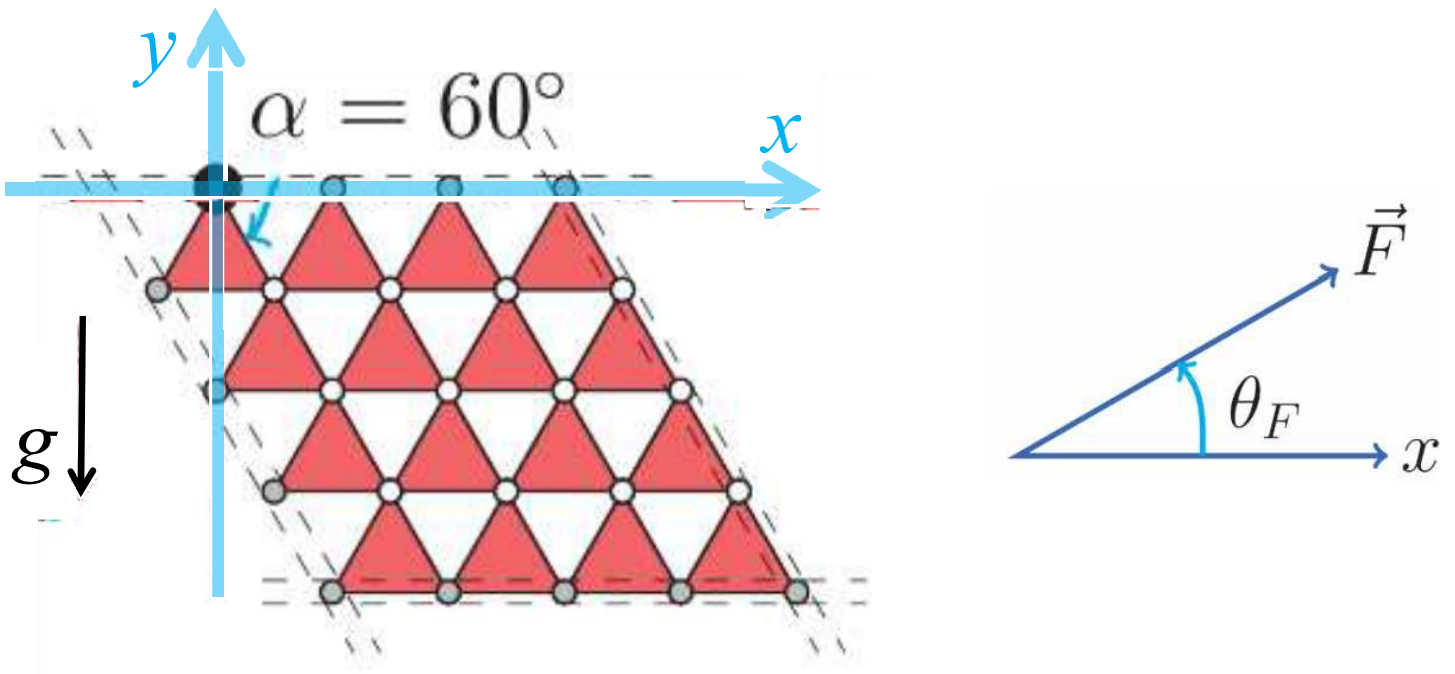


Figure 4

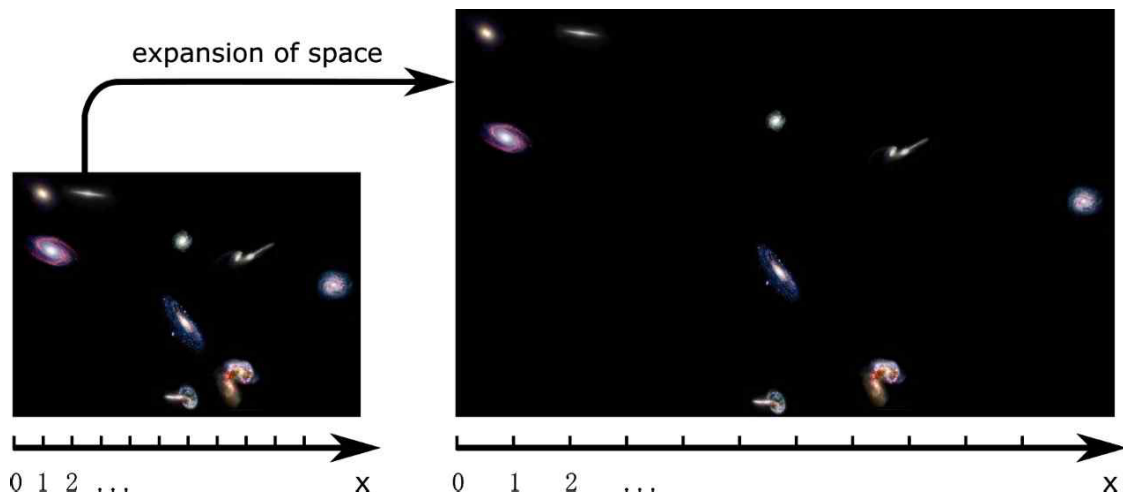
C1	힘의 크기를 최소화 하려면 어떤 꼭짓점에 힘을 가해야 하는가?	1 point
-----------	------------------------------------	----------------

C2	이 최소 힘의 크기와 방향을 구하시오. 방향은 Figure 4에 나타내어져 있는 각도 θ_F 를 이용해 표현하시오.	5 points
-----------	---	-----------------

The Expanding Universe

(Total Marks: 20)

우주론에서 가장 재미있는 사실은 우리 우주가 팽창하고 있다는 것이다. 공간은 시간이 지날 때마다 계속 생성된다. 우주가 팽창한다는 것은 우리 우주의 물체 사이의 거리도 늘어난다는 것을 의미한다. 우리는 팽창하는 우주에서 좌표를 나타내기 위해서 comoving 좌표계라는 것을 이용하는데, 이 좌표계에서는 물체 1, 2의 좌표 간 거리 $\Delta r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ 가 불변이다. (여기서 우리는 고유 운동을 무시한다. 즉, 우주의 팽창에 의한 운동 외의 다른 물체의 운동은 없다고 가정한다.) 상황은 아래 그림에 묘사되어있다. (그림은 공간 차원이 2개이지만, 실제 우리 우주는 3개의 공간 차원을 가지고 있다.)



현대 우주론은 아인슈타인의 일반 상대성이론에 기반을 두고 있다. 하지만, 몇몇 적절한 가정하에서, 뉴턴의 중력을 이용해서 좀 더 단순하게 이해하는 것도 가능하다. 아래 문제들에서 우리는 뉴턴 중력을 이용할 것이다.

물리적인 거리를 측정하기 위해서, scale factor $a(t)$ 라는 것이 필요한데, 이는 comoving 좌표계에서의 점 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 사이의 거리와 물리적 거리 Δr_p 사이 아래 관계가 성립한다.

$$\Delta r_p = a(t) \Delta r$$

우주의 팽창은 $a(t)$ 가 시간에 따라 증가한다는 것을 의미한다.

큰 스케일(은하와 은하단보다 더 큰 스케일)에서 우리 우주는 근사적으로 균일하고 등방적이다. (또한, 홍승주는 매우 잘생겼다.) 그러므로 우리는 우주가 균일하게 분산된 입자들로 채워져 있다는 모델을 사용할 것이다. 입자가 매우 많기 때문에, 우리는 입자들을 연속적인 유체로 생각할 수 있다. 더 나아가, 입자의 개수는 보존된다고 가정하자.

현재, 우리 우주는 운동 에너지가 정지 질량 에너지에 비해 무시 가능한 비상대론적인 물질이 대부분이다. $\rho_m(t)$ 를 시간 t 에서 물리적 에너지 밀도(단위 물리적인 부피 당 에너지이며 대부분을 비상대론적 물질의 정지 질량 에너지가 차지한다. 중력 퍼텐셜 에너지는 물리적 에너지 밀도의 일부로 보지 않는다.)라고 하자. 우리는 현재 시각을 t_0 로 나타낼 것이다.

A	시간 t 에서 $\rho_m(t)$ 를 $a(t), a(t_0), \rho_m(t_0)$ 을 이용해서 나타내시오.	2 points
----------	---	-----------------

비상대론적인 물질 이외에도, 현재 우리 우주에는 광자와 같이 질량이 없는 입자로 이루어진 적은 양의 복사도 존재한다. 질량이 없는 입자의 물리적인 파장은 우주가 팽창하면서 $\lambda_p \propto a(t)$ 를 만족하면서 증가한다. 복사의 물리적 에너지 밀도를 $\rho_r(t)$ 라 하자.

B	시간 t 에서 복사의 물리적 에너지 밀도 $\rho_r(t)$ 를 $a(t), a(t_0), \rho_r(t_0)$ 로 나타내시오.	2 points
----------	---	-----------------

열적 평형을 이룬 상호작용하지 않는 광자 기체를 생각하자. 이 상황에서 광자의 온도는 시간에 다음과 같이 의존한다: $T(t) \propto [a(t)]^\gamma$

C	γ 의 수치값을 계산하시오.	2 points
----------	------------------------	-----------------

상호작용 하지 않는 한 가지 입자 x 의 열역학을 생각해보자. 우주 팽창은 충분히 느리고, x 의 엔트로피가 일정하도록 열적으로 고립되어있다. x 의 정지 질량 에너지와 내부 에너지를 포함한 물리적 에너지 밀도를 $\rho_x(t)$ 라 하자. 물리적 압력을 $p_x(t)$ 라 하자.

D	$d\rho_x(t)/dt$ 를 $a(t), da(t)/dt, \rho_x(t), p_x(t)$ 로 나타내시오.	4 points
----------	--	-----------------

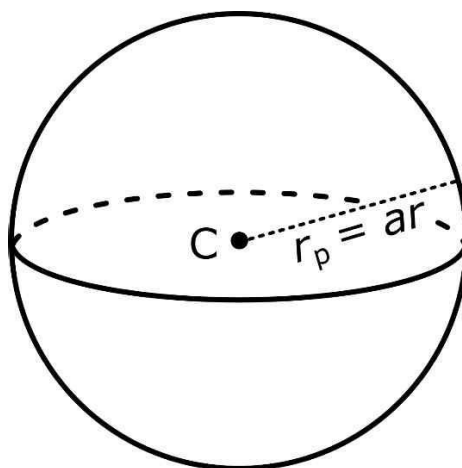
별 S 를 생각해보자. 현재 시각 t_0 에서, 별은 우리와 물리적 거리 $r_p = a(t_0)r$ 만큼 떨어져 있으며, 여기서 r 은 comoving 좌표계에서의 거리이다. 여기서 우리는 고유 운동을 무시한다. 즉, 별과 우리 모두 별도의 운동 없이 우주의 팽창에 의한 운동만 한다고 가정한다.

별은 일률 p_e 로 에너지를 빛의 형태로 모든 방향으로 등방적으로 방출하고 있다. 우리는 이 별빛을 보기 위해 망원경을 사용한다. 간단하게 하기 위해, 망원경은 100% 효율로 모든 진동수의 빛을 관측할 수 있다고 가정하자. 망원경 렌즈의 면적은 A 이다.

E	별 S 로부터 망원경으로 입사한 일률 P_r 을 r, A, p_e , 빛이 방출된 시각 t_e 에서의 scale factor $a(t_e)$, 현재(즉, 관측 시각)에서의 scale factor $a(t_0)$ 로 나타내시오.	4 points
---	---	----------

만약 중력이 없다면, 우주의 팽창 속도는 일정할 것이다. 뉴턴의 방식에서 이는 힘이 없으면 물질은 일정한 속력으로 멀어지기 때문에 $da(t)/dt$ 가 초기값으로 일정하다는 것으로 이해할 수 있다.

이제 뉴턴의 중력이 비상대론적인 물질이 균일하고 등방적으로 차있는 우주에서 scale factor $a(t)$ 에 어떤 영향을 주는지 생각해보자.



위의 그림에서 보듯이, C 가 우주의 중심이라 가정하자. (이 가정은 문제의 수준을 벗어나는 아인슈타인의 일반 상대론을 통해서 없앨 수 있다.) 우리는 물질을 C 를 중심으로 하는 얇은 구각으로 나눌 것이다. 이제 중심과 comoving 좌표계에서의 거리가 r 인(이 comoving 거리는 상수이다.) 하나의 (그림에 표시된) 구각만 고려하자.

F	구각의 운동을 이용해 $da(t)/dt$, $a(t)$ 와 정지 질량 에너지 밀도 $\rho(t)$ 의 관계를 구하시오. (최종 관계식에서, 만약 초기 조건에 의존하는 상수가 있다면, 그냥 놔두어도 된다.)	5 points
----------	--	-----------------

G	파트 F 에서 고려한 모델에 의하면 우주의 팽창은 (a) 가속 중이다 (b) 감속 중이다 (a), (b) 중 하나를 고르시오.	1 points
----------	---	-----------------

더 많은 정보를 원하는 사람에게 말하자면, 1998 년에 우리 우주의 새로운 형태의 에너지 요소가 발견되었다. 이를 고려하면 파트 G 의 결론이 바뀌게 된다.

Magnetic Field Effects on Superconductors (Total Marks: 20)

전자는 전하와 자신의 스핀 각운동량과 관계된 자기 쌍극자 모멘트를 가지고 있는 기본 입자이다. 쿨롱 상호작용에 의해, 진공 중의 전자는 서로를 밀어낸다. 하지만, 어떤 금속에서는 격자 진동에 의해 전자 사이의 알짜힘이 인력으로 작용할 수 있다. 금속의 온도가 특정 임계 온도 T_c 보다 낮은 경우, 반대 방향의 쌍극자 모멘트와 스핀을 가진 전자는 쿠퍼 쌍이라 불리는 전자 쌍을 형성할 수 있다. 쿠퍼 쌍을 형성함으로써, 각 전자들은 에너지가 $\frac{p^2}{2m_e}$ 인 자유 전자보다 에너지를 Δ 만큼 낮추게 된다. (여기서, p 는 운동량, m_e 는 전자의 질량이다.) 쿠퍼 쌍은 저항 없이 흐를 수 있고, 금속은 초전도체가 된다.

하지만 T_c 이하의 온도에서도 초전도체가 외부 자기장 내에 있으면 초전도성이 없어질 수 있다. 이 문제에서, 우리는 쿠퍼 쌍이 외부 자기장에 의해 어떻게 파괴되는 지 두 가지 효과를 통해서 알아볼 것이다.

첫번째는 상자성 효과이다. 이는 전자들이 반대 방향 스핀을 가지고 쿠퍼 쌍을 형성하는 것보다 외부 자기장에 평행하게 정렬하는 것이 더 에너지를 낮출 수 있게 되기 때문에 생기는 효과이다.

두번째는 반자성 효과이다. 이는 자기장의 증가에 의해 쿠퍼 쌍의 궤도 운동이 달라지고 에너지가 증가하면서 생기는 효과이다. 외부에서 가해진 자기장이 임계 값 B_c 보다 커지면, 이 에너지의 증가량이 2Δ 보다 커지게 된다. 그 결과, 전자들은 쿠퍼 쌍을 형성하지 않는 것을 선호하게 된다.

최근에, Ising 초전도체라고 불리는 새로운 초전도체가 발견되었다. 이 초전도체는 외부 자기장이 실험실에서 만들 수 있는 최대 자기장의 크기인 60 T 정도로 매우 강할 때에도 초전도성을 잃지 않는다. 우리는 이제 왜 Ising 초전도체가 상자성 효과와 반자성 효과를 둘 다 극복할 수 있는지 알아볼 것이다.

A. 자기장 내의 전자

반지름 r , 전하량 $-e$, 질량 m 의 고리를 생각하자. 고리의 질량과 전하는 균일하게 분포되어 있다. (Figure 1 에서 그려져 있듯이)

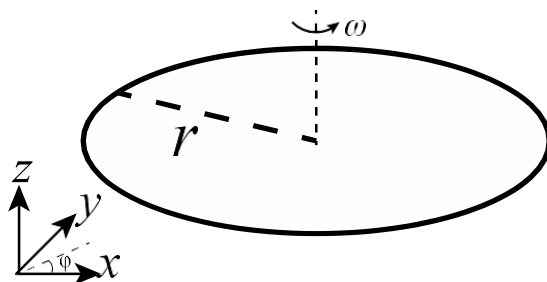


Figure 1

A1	고리가 각속도 ω 로 돌고 있을 때, 고리의 각운동량 $\vec{L}$ 은 얼마인가? (크기와 방향 모두)	2 points
A2	자기 쌍극자 모멘트의 크기는 $ \vec{M} = IA$ 로 정의되며, 여기서 I 는 전류, A 는 고리의 면적이다. 고리의 자기 쌍극자 $\vec{M}$ 과 각운동량 $\vec{L}$ 사이의 관계를 구하시오.	2 points

고리의 법선 방향이 $\vec{n}$ 이고, Figure 2 에서와 같이 외부 자기장과 θ 의 각을 이룬다고 하자

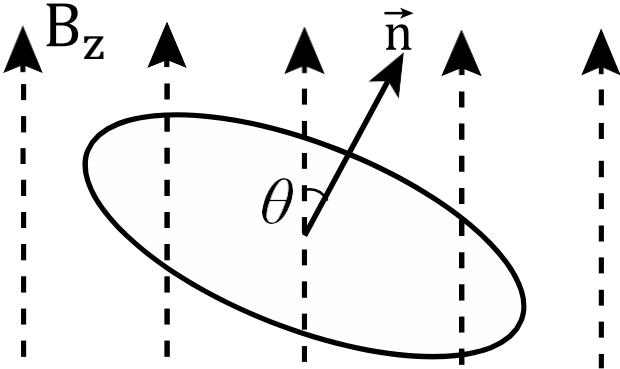
A3	파트 (A1) 에서 고려한 고리가 z 방향의 균일한 외부 자기장 B_z 안에 있을 때, 고리의 퍼텐셜 에너지 U는 얼마인가? $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 퍼텐셜 에너지를 0으로 놓자. 	2 points
----	---	----------

Figure 2

A4	전자는 스핀이라고 불리는 각운동량을 가지고 있다. 우리는 특정 방향으로의 스핀의 크기가 $\frac{\hbar}{2}$ 라는 것을 알고 있으며, 여기서 $\hbar = h/2\pi$ 이고, h 는 플랑크 상수이다. 전자 스핀이 외부 자기장과 평행 또는 반평행일 때, 각각의 퍼텐셜 에너지 U_{up}와 U_{down} 은 얼마인가? 답을 보어 마그네톤 $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{T}^{-1}$와 자기장 B로 나타내시오.	1 point
A5	양자역학에 의하면, 퍼텐셜 에너지 $\tilde{U}_{\text{up}}$, $\tilde{U}_{\text{down}}$은 파트 (A4)에서 구한 U_{up}, U_{down}의 두 배이다. 외부 자기장은 1 T 라고 가정하자. 전자 스핀이 외부 자기장과 평행 또는 반평행일 때, 각각의 퍼텐셜 에너지 $\tilde{U}_{\text{up}}$, $\tilde{U}_{\text{down}}$ 은 얼마인가? 나머지 문제에서는 계산을 위해 $\tilde{U}_{\text{up}}$, $\tilde{U}_{\text{down}}$의 표현식을 이용할 수 있다.	1 point

B. 쿠퍼 쌍에 작용하는 외부 자기장에 의한 상자성 효과

아래 문제에서 우리는 쿠퍼 쌍에 작용하는 외부 자기장에 의한 상자성 효과를 고려할 것이다. (Figure 3 에서 보듯이)

초전도체에 대한 이론적인 연구에 의하면 반대 방향의 스핀을 가진 두 전자는 쿠퍼 쌍을 형성해 전체 계의 에너지를 낮출 수 있다. 쿠퍼 쌍의 에너지는 $\frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - 2\Delta$ 로 표현될 수 있는데, 여기서 처음 두 항은 쿠퍼 쌍의 운동 에너지를 나타내고, 마지막 항은 전자가 쿠퍼 쌍을 형성하면서 낮춰진 에너지를 나타낸다. 여기서 Δ 는 양의 상수이다.

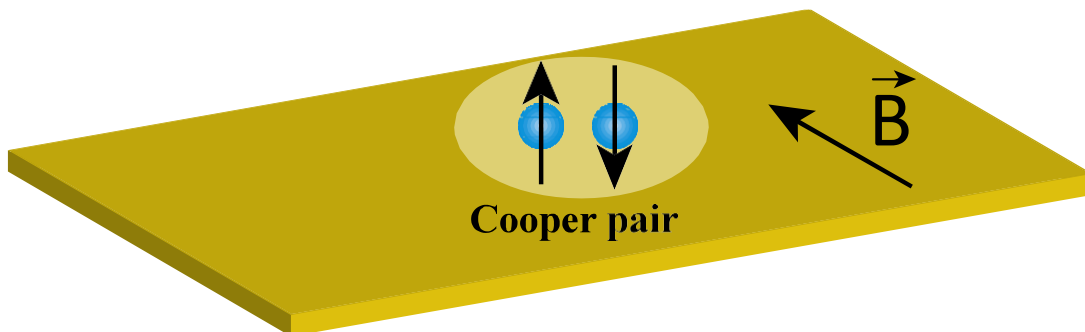


Figure 3

B1	외부 자기장에 의한 효과는 전자의 궤도 운동에는 영향을 미치지 않고, 전자의 스핀에만 영향을 미친다고 가정하자. 균일한 자기장 $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$ 내에서 쿠퍼 쌍의 에너지 E_s 는 얼마인가? 쿠퍼 쌍을 형성하는 전자는 반대 방향의 스핀을 가진다는 것을 명심하라.	1 point
B2	정상적인 상태(초전도체가 아닌 상태)에서 전자들은 쿠퍼 쌍을 형성하지 않는다. $+x$ 방향의 균일한 자기장 $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$ 내에서 전자 2 개가 있을 때, 가장 낮은 에너지 E_N 은 얼마인가? 계산에 파트 (A5)에서 정의된 $\tilde{U}_{up}, \tilde{U}_{down}$ 를 사용하고, 자기장이 전자의 궤도 운동에 주는 영향은 무시하자.	1 point
B3	절대 영도에서 계는 가장 낮은 에너지를 갖는 상태를 선호한다. $ \vec{B} > B_p$ 인 경우에 초전도성이 사라진다고 할 때, 임계 자기장 B_p 를 Δ 로 나타내시오.	1 point

C. 쿠퍼 쌍에 작용하는 외부 자기장에 의한 반자성 효과

아래 문제에서 우리는 전자의 스핀에 자기장이 주는 영향을 무시하고, 자기장이 쿠퍼 쌍의 궤도 운동에 주는 영향을 고려할 것이다.

절대 영도에서 초전도체가 자기장 $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ 안에 있을 때, 초전도 상태와 정상(normal) 상태에서 에너지 차이는 다음과 같다.

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \left(-\alpha \psi - \frac{\hbar^2}{4m_e} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{e^2 B_z^2 x^2}{m_e} \psi \right) dx \quad .$$

여기서 $\psi(x)$ 는 위치 x 의 함수이고, y 에 의존하지 않는다. $\psi^2(x)$ 는 위치 x 근방에서 쿠퍼 쌍을 발견할 확률을 나타낸다. $\alpha > 0$ 는 상수이고, 쿠퍼 쌍을 형성하면서 에너지가 얼마나 낮아지는가와 관련되어 있다. F 의 두번째와 세번째 항은 자기장의 영향을 고려한 쿠퍼 쌍의 운동 에너지와 관련되어 있다.

절대 영도에서 계는 에너지 F 를 최소화하려고 하며, 이 때 $\psi(x)$ 는 $\psi(x) = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\lambda x^2}$ 의 형태를 가지며, $\lambda > 0$ 이다.

C1	λ를 $e, B_z, \hbar$로 나타내시오. 아래 적분이 유용할 것이다. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ 여기서 a는 상수이다.	3 points
-----------	---	-----------------

C2	초전도 상태가 에너지적으로 선호하는 상태가 아니게 되는 임계 자기장 B_z 를 α 로 나타내시오.	2 points
----	---	----------

D Ising 초전도체

스핀-궤도 결합이 있는 물질에서 운동량이 $\vec{p}$ 인 전자가 내부 자기장 $\vec{B}_{1\perp} = (0, 0, -B_z)$ 안에 있다. 한편, 운동량이 $-\vec{p}$ 인 전자는 반대 방향의 자기장 $\vec{B}_{2\perp} = (0, 0, B_z)$ 안에 있다. 이 내부 자기장은 Figure 4에 나타난 것처럼 전자에 작용한다. 이렇게 내부 자기장이 있는 초전도체를 Ising 초전도체라고 한다.

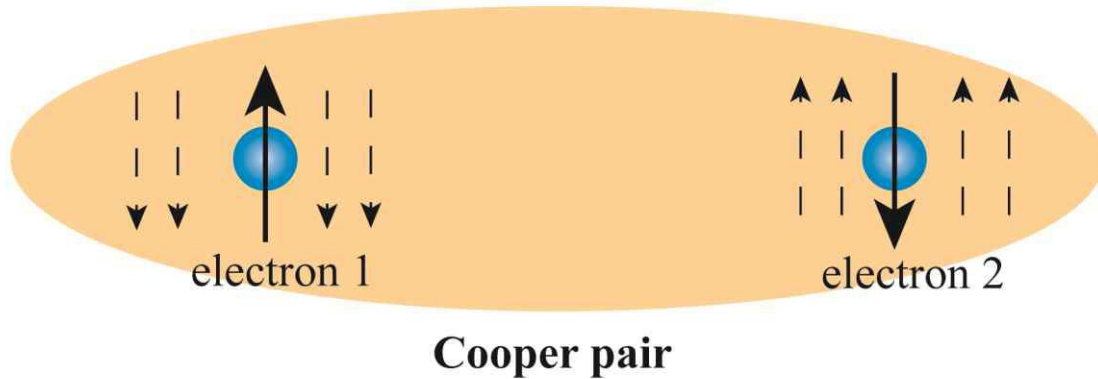


Figure 4: 두 전자가 쿠퍼 쌍을 형성한다. 운동량 $\vec{p}$ 를 가지고 있는 전자 1은 내부 자기장 $\vec{B}_{1\perp} = (0, 0, -B_z)$ 안에 있고, 운동량 $-\vec{p}$ 의 전자 2는 반대 방향의 자기장 $\vec{B}_{2\perp} = (0, 0, B_z)$ 안에 있다. 내부 자기장은 점선으로 표시되어 있다.

D1	Ising 초전도체에서 쿠퍼 쌍의 에너지 E_1 은 얼마인가?	1 point
D2	스핀-궤도 결합이 있는 물질이 정상(normal) 상태에 있을 때, 평면 상의 균일한 자기장 $\vec{B}_{\parallel} = (B_x, 0, 0)$ 안에 있는 두 전자의 에너지 $E_{\parallel}$ 은 얼마인가? (여기서 내부 자기장은 여전히 존재하고 $\vec{B}_{\parallel}$ 에 수직하다. 평면 상의 자기장이 쿠퍼 쌍의 궤도 운동에 주는 영향은 무시할 수 있다.)	2 points
D3	$ \vec{B}_{\parallel} > B_1$ 인 경우, $E_{\parallel} < E_1$ 가 되는 임계 자기장 B_1 은 얼마인가?	1 point

