

초유체의 와류

소개

초유동성은 마찰 없이 흐르는 성질을 말합니다. 일상적인 경험에 따르면 상온에서 물과 같은 일반 유체의 운동은 항상 점성 에너지의 소실을 동반하므로 외부 힘에 의해 유지되지 않는 한 흐름이 점차 느려집니다. 반면 운동 에너지의 손실이 없으므로 한 번 여기된 초유체의 운동은 무한정 지속될 수 있습니다. 초유체는 원래 액체 헬륨에서 실험적으로 발견되었습니다.

우리는 영하의 온도에서 초유체 헬륨의 특성을 연구합니다. 밀도가 ρ 인 비압축성 유체로 취급됩니다. 흐름 연속성(주어진 무한한 부피에서 유입되는 질량과 유출되는 질량이 같다는 사실)은 닫힌 표면을 통과하는 헬륨 속도 $\vec{v}$ 의 플럭스가 항상 0이라는 것을 의미합니다. 이 측면에서 초유체 속도는 자기장 세기와 유사합니다. 자기장 선과 유사하게 "유선"은 각 지점에서 유체 속도에 접하고 밀도는 그 크기에 비례합니다.

진정한 초유동은 비회전성이라는 중요한 특성을 가지고 있습니다. 헬륨 내의 모든 폐쇄 경로를 따라 초유동 속도 $\vec{v}$ 순환은 0입니다.

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1)$$

얇은 "와류 필라멘트"를 따라 초유동이 존재하지 않는 경우 이 설명은 수정되어야 합니다. 필라멘트 자체의 두께는 대략 원자 크기(a)이지만 와류는 주변 초유체에서 장거리 속도장을 유도합니다. 이러한 필라멘트 주변의 속도 순환은 순환 양자¹입니다.

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi n, \quad (2)$$

와 소용돌이를 통과하지 않고 경로가 한 점으로 수축될 수 있는 경우 0이 됩니다(그림 1 참조). 이는 초유동과 전류를 전달하는 전선에 의해 생성되는 자기장 사이의 유사를 뒷받침합니다. 두 개의 유효한 속도 분포가 유효한 속도 분포이고 어느 지점에서의 속도는 와류 필라멘트를 나타내는 전선 시스템을 통과하는 단위 전류가 생성하는 자기장과 (차원 계수까지) 동일합니다.

¹ 순환 양자화는 거시적 양자 효과이며 보어 모델의 각운동량 양자화에 해당합니다. 순환 양자는 $n = \hbar / m_{\text{He}}$ 로 표현할 수 있으며, 여기서 m_{He} 는 헬륨 원자의 질량입니다.

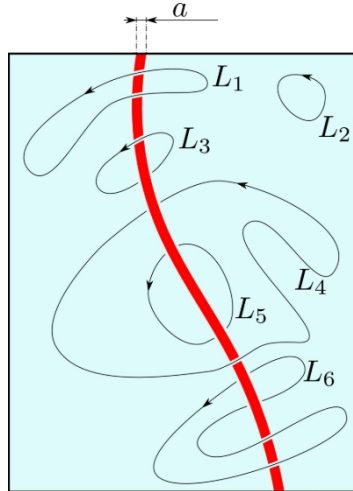


그림 1: 초유체(하늘색)의 와류 필라멘트(빨간색). 경로를 따른 속도 순환 $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ 은 모두 0이지만 L_3 및 L_4 는 $\pm 2\pi n$ 와 같습니다. 다음의 순환은 L_3 과 L_4 는 부호가 반대입니다.

파트 A. 안정된 필라멘트(0.75점)

초유체 헬륨으로 이루어진 원통형 비커(반경 $R_0 \gg a$)와 그 중앙에 직선형 수직 와류 필라멘트가 있다고 가정해 보겠습니다(그림 2).

A.1 유선을 플롯합니다. τ 지점에서의 속도 $\mathbf{v}$ 를 구합니다.

0.25pt

A.2 자유 표면 모양(좌표 $x(\tau)$ 의 함수인 높이)을 계산합니다.

주변에서 소용돌이를 계산합니다. 자유 낙하 가속도는 g 입니다. 표면 장력은 무시해도 됩니다.

0.5pt

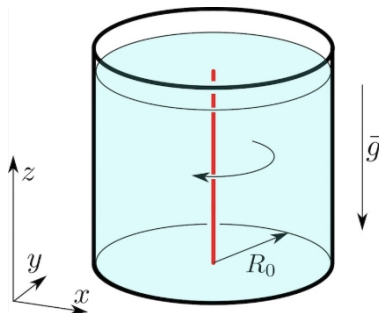


그림 2: 비커의 축을 따라 직선형 와류.

파트 B. 소용돌이 운동(1.4점)

자유 소용돌이는 흐름과 함께 공간에서 움직입니다². 즉, 필라멘트의 각 요소는 해당 요소의 위치에서 유체의 속도 $\mathbf{v}$ 와 함께 움직입니다.

² 이는 모멘텀 보존의 결과입니다(다음 섹션 참조).



예를 들어, 처음에 서로 τ_0 거리에 배치된 한 쌍의 역회전 직선 와류를 생각해 보겠습니다(그림 3 참조). 각 와류는 다른 와류의 축에서 속도 $v_0 = n/\tau_0$ 를 생성합니다. 결과적으로 소용돌이 쌍은 일정한 속도 $v_0 = n/\tau_0$ 로 직선으로 움직이므로 두 소용돌이 사이의 거리는 변하지 않습니다.

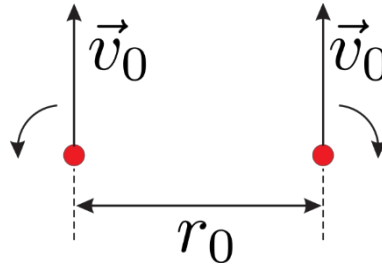


그림 3: 반대 순환을 가진 평행 보텍스 필라멘트.

- B.1** 두 동일한 직선 와류가 처음에 각각 τ_0 거리에 배치되어 있다고 가정해 보겠습니다. 와 같이 서로 0.25pt 떨어져 있습니다. 소용돌이의 초기 속도를 구하고 그 궤적을 그립니다.

그림 4

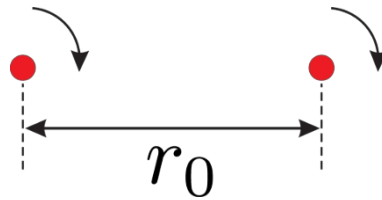


그림 4: 동일한 순환을 가진 평행 보텍스 필라멘트.

헬륨 비커(파트 A 참조)는 동일한 수직 소용돌이의 삼각형 격자($v \ll R_0$)로 채워져 있습니다(그림 5 참조).

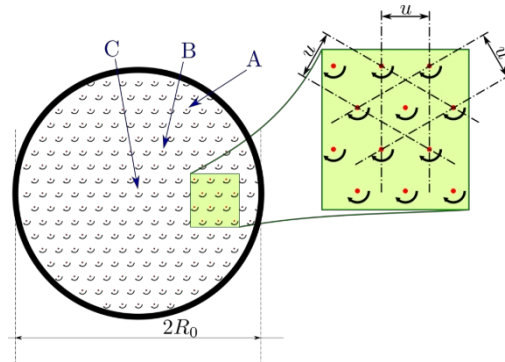


그림 5: 비커의 와류 삼각형 격자. 위에서 본 모습.



B.2	소용돌이 A, B, C(중앙에 위치)의 궤적을 그립니다.	0.15pt
B.3	τ 에 위치한 소용돌이의 속도 $v(\tau)$ 를 구합니다.	0.4pt
B.4	시간 t 에서 소용돌이 A와 B 사이의 거리 $AB(t)$ 를 구합니다. $AB(0)$ 을 다음과 같이 취급합니다.	0.35pt
B.5	"평활화된"(격자 구조 생략) 자유 헬륨 표면을 작업합니다. 도형 $x(\tau)$.	0.25pt

파트 C. 모멘텀과 에너지(1.75점)

장거리 속도 필드는 와류 시스템의 에너지에 대한 주요 기여도이며 필라멘트의 정확한 구조에 민감하지 않습니다. 필라멘트 자체는 거시 이론으로 제대로 설명할 수 없으며 명백한 특이점(무한대)은 중요하지 않습니다. 필라멘트 주변의 반경 a 얇은 튜브 내부 영역의 에너지와 같은 실제 물리량은 무시해야 합니다. 이 튜브 외부의 초유동 운동 에너지 밀도 $\rho v^2/2$ (여기서 $\rho =$ 상수)는 자기장의 에너지 밀도 $B^2/(2\mu_0)$ 와 유사하며, 두 변수는 각각 이차적 변수입니다. 이 비유는 와류(전류)에 의해 생성되는 자기장과 초유체 속도 사이의 대응과 함께 주어진 시스템의 흐름 에너지를 쉽게 계산할 수 있게 해줍니다. 예를 들어, 원형 와이어 루프의 인덕턴스가 $L \approx \mu_0 R \log(R/a)$, 여기서 R 는 루프 반경이고 a 는 와이어 반경이면 초유체 와류 루프 에너지⁽³⁾를 구할 수 있습니다

$$U \approx 2R\rho\pi(2)n^2\log(R/a) \quad (3)$$

총 유체 운동량은 장거리 속도 분포에 의해서도 결정됩니다. 이는 운동량 밀도 $\rho \vec{v}$ 를 적분하여 구할 수 있습니다. 다시 한 번, 다음에 배치된 원형 와류 루프에 의해 생성된 흐름을 생각해 보겠습니다.

xy 평면입니다. 대칭을 고려할 때 총 모멘텀에는 x 구성 요소만 있는 것이 분명합니다:

$$P = \int \rho v_x dV = \rho \iint \underbrace{\left(\int v_x dx \right)}_{q(x,y)} dy \quad (4)$$

가장 안쪽 통합은 실제로 x -축과 평행한 적절한 경로를 따라 통합하는 것입니다(그림 6 참조). 순환 아이덴티티 (2)에서 다음과 같습니다.

$$q(x,y) = \int_{L(x,y)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

는 부분적으로 일정합니다. 특히 링 외부를 통과하는 경로의 경우 0이고 링 내부의 경로의 경우 $2\pi n$ 입니다. 따라서 총 운동량은

$$P = \rho \cdot \pi R^{2 \cdot 2\pi n} = 22\rho R^2 n \quad (6)$$

³ 이 표현식은 $R/a \gg 1$ 을 로그하는 경우에만 유효합니다.

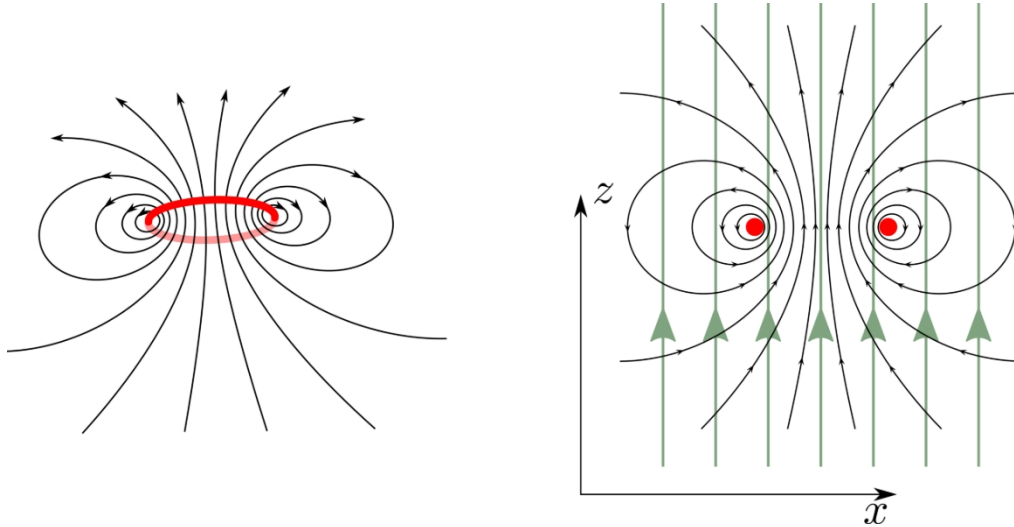


그림 6: 원형 와류 루프의 속도 필드와 $q(x,y)$ 계산을 위한 적분 경로(녹색).

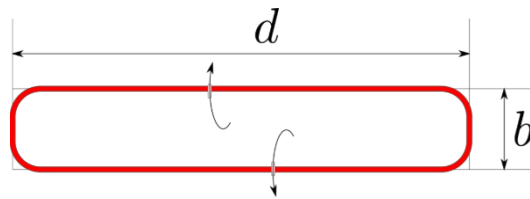


그림 7: 거의 직사각형에 가까운 와류 루프, $b \ll d$.

- | | | |
|------------|---|--------|
| C.1 | 거의 직사각형에 가까운 소용돌이 루프를 생각해 보세요, $b \times db \ll d$, 그림 7. 그 운동량의 운동량의 방향을 나타냅니다. 운동량 크기를 구합니다. | 0.3pt |
| C.2 | 에너지 계산, U | 0.7pt |
| C.3 | 긴 직선 와류 필라멘트를 x 방향으로 b 거리만큼 이동한다고 가정해 보겠습니다, 로 이동한다고 가정합니다. 유체 운동량은 얼마나 변할까요? 모멘트를 표시하세요. 중앙 방향이 바뀝니다. 필라멘트 길이(용기 벽에 의해 제한됨)는 다음과 같습니다. d . | 0.75pt |

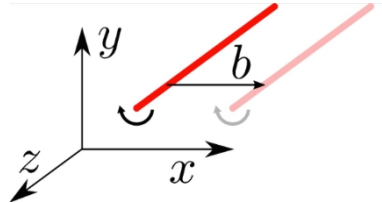


그림 8: 유체에 대해 소용돌이가 이동할 때마다 운동량이 바뀝니다.

파트 D. 갇힌 요금(2.85점)

헬륨에 전자를 주입하면 전자는 와류 필라멘트에 갇히게 됩니다. 여기서 헬륨의 분극성은 무시할 수 있습니다($\epsilon=1$).

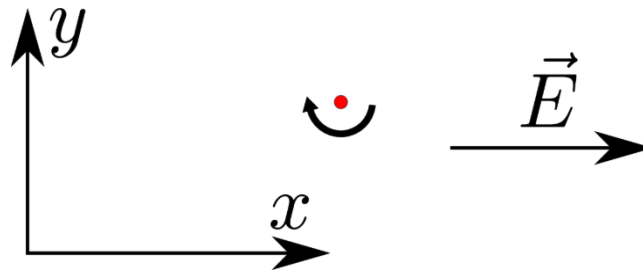


그림 9: 균일한 전기장에서의 직선 와류.

- D.1** 균일한 선형 밀도 $\lambda < 0$ 으로 충전된 직선 와류가 단일 형태의 전기장 $\vec{E}$. 소용돌이 궤적을 그립니다. 그 속도를 함수로 구합니다. 시간입니다.

0.5pt

처음에 균일한 선형 밀도 $\lambda < 0$ 으로 충전된 반경 R_0 의 원형 와류 루프는 그 운동량 P_0 과 반대되는 평면에 수직인 균일한 전기장 $\vec{E}$ 에 배치됩니다.

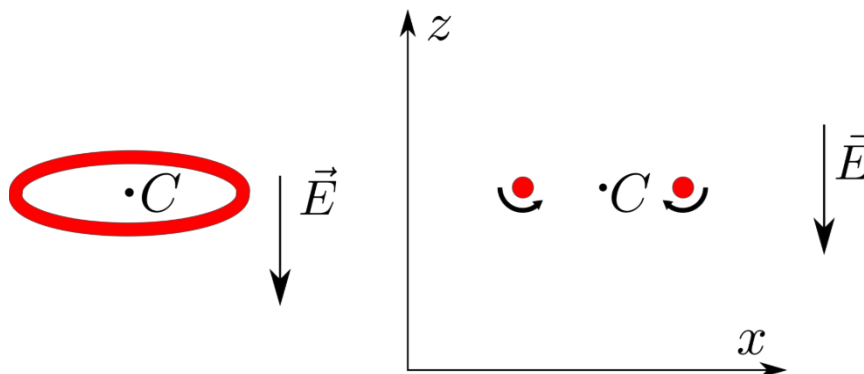


그림 10: (왼쪽) 균일한 전기장의 볼텍스 링. (오른쪽) 링의 단면.



D.2 루프 중심의 궤적을 그리십시오 C . 루프의 반지름을 함수로 구합니다.
의 함수로 구합니다.

0.6pt

D.3 속력 $v(t)$ 를 시간의 함수로 구합니다.

1.5pt

D.4 속도가 $v^* =$
값에 도달하면 t^* 필드가 꺼집니다.
 $v(t^*)$. 나중에 루프 속도 $v(t)$ 를 구합니다 $t > t^*$.

0.25pt

파트 E. 경계의 영향(3.25점)

단단한 벽은 유체가 벽을 통과할 수 없기 때문에 와류 필라멘트가 생성하는 속도장을 변화시킵니다. 수학적으로 이것은 벽 정상 속도 성분이 벽 표면에서 사라진다는 것을 의미합니다.

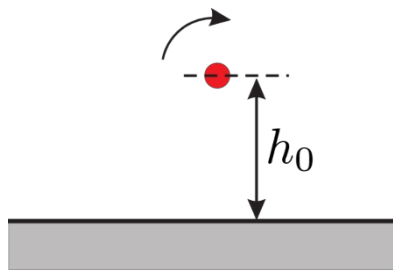


그림 11: 평평한 벽 근처의 직선형 보텍스 필라멘트.

E.1 처음에 h_0 거리에 위치한 직선 소용돌이의 궤적을 그리십시오.
평평한 벽에 놓인 궤적을 그리십시오. 시간의 함수로서 그 속도를 구합니다.

0.5pt

양쪽 벽에서 h_0 거리의 모서리에 직선 소용돌이가 있다고 가정해 보겠습니다.

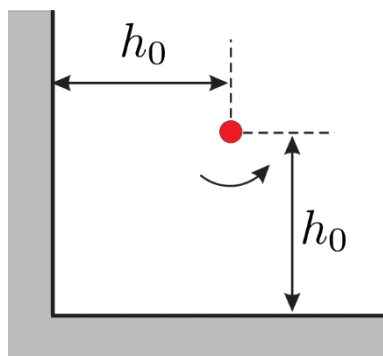


그림 12: 모서리에 있는 직선형 보텍스 필라멘트.

E.2 소용돌이의 초기 속도 $v_{(0)}$ 은 얼마입니까?

0.75pt

이론



APhO
YAKUTSK 2017 RUSSIA

Q1-8

영어(공식)

E.3 소용돌이의 궤적을 그립니다.

0.5pt

E.4 아주 오랜 시간이 지난 후 소용돌이의 속도는 v_∞ ?

1.5pt



초질량 블랙홀 바이너리의 진화

소개

중력파의 개념은 아인슈타인의 일반 상대성 이론에서 가장 인상적인 예측 중 하나입니다. 중력파는 전자기파와 유사하게 빛의 속도로 전파되는 시공간 파동입니다. 중력파를 직접 탐지하는 것은 매우 어려운 일이지만, 2015년 9월 14일 LIGO와 VIRGO의 공동 연구로 첫 신호가 감지되었습니다.

중력파는 거대한 물체가 빠르게 움직일 때 방출됩니다. 중력파의 가장 강력한 원인은 두 개의 초질량 블랙홀(SBH)이 합쳐질 때 발생합니다. 일반 상대성 이론에 의해 예측되는 블랙홀은 질량이 매우 클 수 있는 극도로 조밀한 물체를 나타냅니다. 블랙홀의 다른 특정 특성은 이 문제를 해결하는 데 필요하지 않습니다.

일반적으로 받아들여지는 은하 진화 이론에서는 은하 중심에 태양 질량 $10^5 - 10^9$ 범위의 질량을 가진 SBH가 있다고 가정합니다. 은하는 $10^{10} - 10^{11}$ 개의 별을 포함하는 거대한 항성계입니다. 진화하는 동안 두 은하는 충돌하여 하나로 합쳐질 수 있습니다. 처음에 중심에 위치한 두 개의 SBH는 어떻게 될까요? SBH 쌍성계의 진화는 *세 가지* 주요 단계로 나눌 수 있습니다. 각 단계에서 SBH는 서로 접근하지만 근본적인 물리적 현상은 서로 다릅니다. 문제의 첫 세 부분에서는 이러한 현상을 개별적으로 살펴볼 것입니다. 네 번째 부분에서는 얻은 관계를 사용하여 SBH 이진 시스템 진화의 총 시간을 계산합니다.

진화가 끝나면 두 개의 SBH는 결국 서로 접근하여 하나의 블랙홀로 합쳐집니다. 병합 과정은 약 한 시간 동안 지속되며 강렬한 중력 복사를 동반합니다. LISA와 같은 미래 관측소는 이 중력 방사선을 감지할 수 있을 것입니다. 하지만 중력파 천문학의 여명기인 지금 SBH 진화에 대한 연구가 진행 중입니다.

일반 정보

1. 거리의 경우 파섹(pc)으로, 시간 간격의 경우 기가년(Gy)으로 모든 수치를 표현하세요. 태양 질량(M_S)을 기준 질량으로 사용합니다. 이 값이 필요할 수 있습니다:

$$1 \text{ 개} = 3.1 \times 10^{16} \text{ m},$$

$$M_S = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$t_H = 13.7 \text{ Gy}, \text{ 우주의 나이},$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2,$$

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

2. "**추정**"이라는 단어를 접할 때 정확한 답을 요구하지 않습니다. 정확한 결과와 10배 이상 차이가 나지 않는 결과를 얻는 충분합니다. 반대로 "**찾기**"라는 단어가 나오면 정확한 답을 얻어야 합니다. "**계산**"이라는 단어는 숫자 답을 가져 오도록 요청합니다.

3. 문제 전체에서 은하계의 모든 별이 같은 질량을 가지고 있다고 가정합니다 $m = M_S$.

4. 이 문제에서는 중력파 방출을 제외한 일반 상대성 이론의 효과는 고려하지 않습니다. 모든 별과 블랙홀은 뉴턴의 중력 법칙의 지배를 받는 점 질량으로 간주됩니다.



파트 A. 동적 마찰(1.6점)

이 부분에서는 은하의 단순화된 모델을 공부하겠습니다. 은하계의 별의 속도는 무시하고 별의 농도가 일정하다고 가정할 수 있습니다. 은하의 특징적인 크기는 R 입니다. 항성 농도가 충분히 작기 때문에 항성 충돌은 극히 드물고 무시할 수 있습니다. 질량 $M \gg m$ 은하를 통해 v 의 속도로 움직이는 SBH를 생각해 봅시다. 놀랍게도 SBH는 별들로부터 평균 0이 아닌 힘을 경험합니다. 이 힘은 SBH의 움직임을 느리게 하며, 이러한 이유로 동적 마찰력이라고 합니다. 이 부분에서는 이 힘의 결정에 대해 설명합니다.

- A.1** SBH의 참조 프레임에서 작업하고 별 하나의 이동을 고려해 보겠습니다. 충격 매개변수 b (그림 1). 다음 사항을 가정합니다.

0.75pt,

$$b \gg b_1 = \frac{GM}{v^2} \quad (1)$$

별의 각도 편향 $\alpha = kb_1/b$, 여기서 k 은 어떤 계수입니다. k 의 값을 구합니다. k 찾을 수 없는 경우 $k=1$ 로 가정합니다.

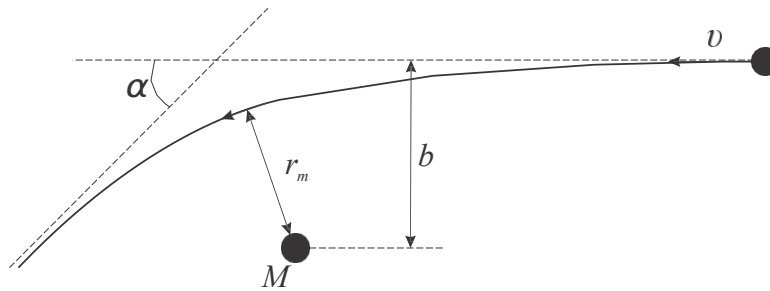


그림 1: 질량이 있는 SBH에 의한 별의 편향 M . 충격 파라미터는 b 이며, 별과 SBH 사이의 최소 거리는 r_m 입니다.

- A.2** Ox 축이 SBH의 속도를 따라 향하도록 합니다. 별에서 SBH로 전달되는 운동량
넌트 Δp_x 별에서 SBH로 전달되는 운동량을 구합니다.

0.25pt

- A.3** 평균을 구하여 SBH에 작용하는 평균 힘 Γ_{DR} 을 추정합니다.
임팩트 파라미터 b . 임팩트 파라미터가 있는 별의 기여도는 무시합니다.
 $b < b_1$. SBH가 은하의 중앙에 있다고 가정합니다. $\Gamma_{DR} M v R G$, 및 항성 밀도 $\rho = mn$ 로 표현합니다.

0.4pt

- A.4** 이전 작업에서 얻은 것처럼 Γ_{DR} 에 대한 식에는 다음과 같은 인수가 포함됩니다.
로그 $R/b_{(1)}$, 이를 로그 Λ 로 더 표시하겠습니다. 다음에 대한 로그 Λ 의 값을 계산합니다.
 $M = 10^8 M_S$, $R = 20 \text{ kpc} = 20 \times 10^3 \text{ pc}$ 및 속도 $v = 200 \text{ km/s}$.

0.2pt



파트 B. 중력 슬릭샷(3.0점)

이 은하 중심에 위치한 질량이 같은 두 개의 SBH($M \gg m$)의 시스템을 고려할 것입니다. 이 시스템을 **SBH 바이너리**라고 부르겠습니다. SBH 쌍성계 근처에 별이 없다고 가정하고, 각 SBH는 다른 SBH의 중력장에서 반경 a 의 원형 궤도를 돌고 있다고 가정하겠습니다.

B.1 각 SBH의 궤도 속도 v_{bin} 구합니다. SBH의 총 에너지 E 구합니다. 바이너리를 구합니다. a, G 및 M 로 표현합니다.

0.25pt

니다.

쌍성이 자리에서 a 보다 훨씬 먼 거리에는 많은 별들이 있습니다. 별은 은하 전체의 중력장에서 복잡하고 다양한 궤적을 따라 이동합니다. 별의 움직임은 이상 기체 속 분자의 움직임처럼 혼란스러운 것으로 간주할 수 있습니다. 별의 속도가 같은 크기 $\sigma \ll v_{bin}$ 이고 평균 질량 밀도가 ρ 라고 가정해 보겠습니다. 이 경우 동적 마찰은 더 이상 SBH 이진수에 영향을 미치지 않으며 에너지 손실은 다른 현상에 의해 발생합니다.

B.2 관련 문제를 풀어봅시다. 질량 m 의 별이 점 질량 $M_2 \gg m$ 은 정지 상태입니다. 이동하는 동안 별과 점 사이의 최소 거리는 τ_m 입니다. 큰 거리에서 별의 속도는 σ 입니다. 충격 파라미터 b 의 정확한 값을 구합니다.

0.5pt를 통과한다고 가정합니다.

별이 약 a 의 거리로 SBH 쌍성에 접근하면, 별은 쌍성과 복잡한 3체 상호작용에 참여하여 거의 항상 약 v_{bin} (상호작용 후 먼 거리에서 별의 속도)의 속도로 별을 쏘아 올립니다. 우리는 이러한 강한 상호작용을 별과 SBH 쌍성의 충돌이라고 부릅니다. 충돌 후 별의 가속도와 발사 속도를 "**중력 슬릭샷**"이라고 합니다.

B.3 SBH의 연속적인 두 충돌 사이의 특성 시간 Δt 을 추정합니다. 있는 1.0pt 바이너리. $\sigma \ll v_{bin}$.

별이

B.4 SBH 이진 에너지 손실률 dE/dt 를 추정합니다. 반경 변화 추정 비율 da/dt . a, ρ, σ, G 로 표현합니다.

0.25pt

B.5 시스템의 초기 반지름을 a_1 로 표시하겠습니다. T_{SS} 에 대한 시간을 추정합니다. 반경이 "중력 슬릭샷"으로 인해 2의 배수만큼 감소합니다. 계산 T_{SS} FOR $\sigma=200 \text{ km/s}, a_1=1 \text{ pc}, \rho=10^4 M_\odot/\text{pc}^3$.

1.0pt



파트 C. 중력파 방출(1.0점)

이 부분에서는 별과 상호작용하지 않는 질량이 같은 SBH 쌍성계를 연구합니다. 이 경우에도 시스템은 중력파 방출로 인해 에너지를 잃게 됩니다. 중력파로 인한 에너지 손실률은 다음과 같습니다.

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{1024G}{5} \frac{(m^{(3)})^2}{c^5} \dot{I}^2, \quad (2)$$

C.1 중력파의 방출로 인한 SBH 이진 반경 변화율 $\frac{da}{dt}$ 를 구합니다.
의 중력파 방출로 인한 SBH 이진 반경 변화율을 구합니다.

0.2pt

여기서 m 는 2진법의 각속도이고 $I = 2Ma^{(2)}$ 는 시스템의 4중극자 모멘트입니다.

SBH 바이너리(a 의 궤도 반경이 블랙홀의 중력 반경에 가까워지면:

$$\tau_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (3)$$

두 개의 SBH가 빠르게 병합됩니다.

C.2 시스템의 초기 반경을 $a_2 \gg \tau_g$ 로 표시해 보겠습니다. 방출로 인해 SBH 바이너리가 약 τ_g 반경으로 축소되는 데 걸리는 시간 T_{GW} 를 추정합니다.
를 구합니다. T_{GW} , a_2 , M 및 G 의 함수로 표현합니다.

0.7pt

C.3 질량이 같은 SBH 이진수의 초기 반지름 a_H 계산 $M = 10^8 M_\odot$ 우주의 나이만큼 합쳐지는 데 걸리는 경우: $T_{GW} \approx t_H$.

0.1pt



파트 D. 완전한 진화(4.4점)

이 부분에서는 위에서 얻은 결과를 사용하겠습니다. **실제** 천체 물리학 상황을 고려해 봅시다. 중심 질량이 $M = 10^8 M_\odot$ 인 두 은하가 새로운 항성계로 합쳐졌습니다. 새로운 은하계가 반지름 $R = 20 \text{ kpc} = 20 \times 10^3 \text{ pc}$ 로 구대칭이라고 가정합니다. 항성 밀도가 은하 중심까지의 반경 τ 따라 다음과 같이 변한다고 가정해 보겠습니다.

$$\rho(\tau) = \frac{\sigma^2}{4\pi G \tau^2} \quad (4)$$

$\sigma = 200 \text{ km/s}$.

- D.1** 물체가 중력장에서 반경 $a < R$ 의 원형 궤도로 움직이도록 합니다. 별. 동적 마찰력을 무시하고 물체의 속도 v 를 구합니다.

0.25pt

은하가 합쳐진 직후 두 개의 SBH는 새로운 은하 내부에서 임의의 위치를 서로 영향을 미치지 않습니다. 하나의 SBH를 생각해 봅시다. 은하 중심을 중심으로 반경 $a < R$ 의 원형 궤도를 따라 움직이며 동적 마찰로 인해 서서히 에너지를 잃는다고 가정합니다.

- D.2** 궤도 반경 변화율 추정합니다. 파트 A에서는 별의 속도 0.75pt를 무시했습니다. 실제 은하계에서 별들이 움직이고 있지만, 모든 별들이 정확히 같은 속도 σ . 대신 별의 속도는 다음과 같은 순서입니다. σ 를 구할 수 있으며, 별에 대한 SBH의 상대 속도도 구할 수 있으므로 A.3에서 얻은 결과를 사용하여 추정할 수 있습니다. 방정식 (4)의 밀도 $\rho(\tau)$ 를 사용해야 합니다. 로그 Λ 를 A.4에서 계산한 상수로 가정합니다.

일정 시간이 지나면 두 개의 SBH가 은하 중심에 접근합니다. 별들의 중력장에서 중심 은하를 중심으로 반지름 a 의 원형 궤도를 그리며 두 SBH를 움직입니다.

- D.3** 임계 반경 a_1 추정합니다. SBH가 더 이상 무시할 수 없는 임계 반경을 계산합니다. 이 순간에는 두 개의 SBH가 이진 시스템을 형성합니다(그림 2).

0.3pt

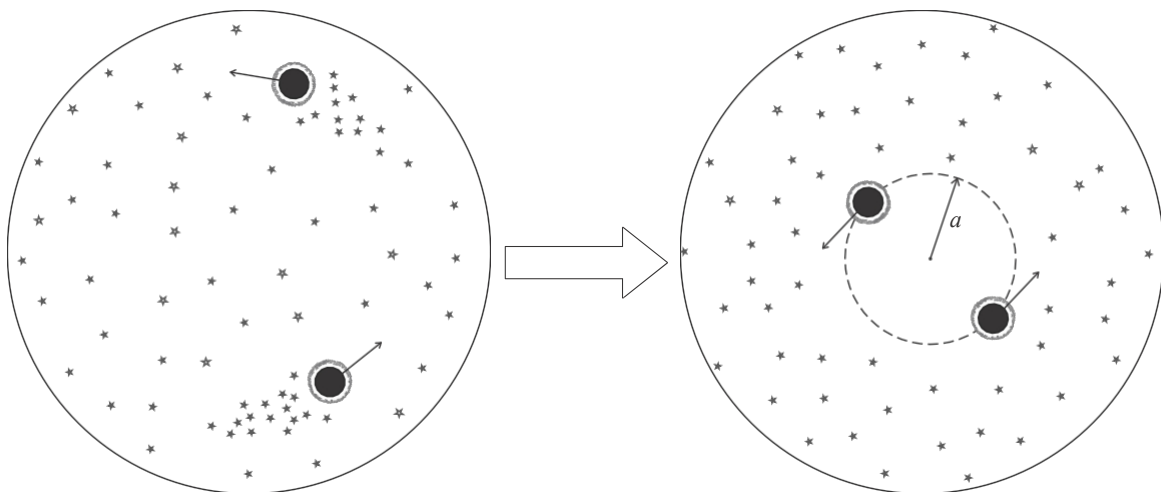


그림 2: 바이너리 시스템 형성 전후의 SBH 진화 과정



- D.4** 은하가 합쳐진 후 두 은하가 서로 멀리 떨어져 있다고 가정해 봅시다. 0.75pt
 $a_0 = 2 \text{ kpc} = 2 \times 10^3 \text{ pc}$ 은하 중심으로부터. 동적 마찰로 인해 두 개의 SBH가 이진법을 형성하는 데 걸리는 시간 T_1 을 계산합니다.

형성한 후, 두 개의 SBH는 은하 중심에서 모든 별을 쏘아내고 홀로 그곳에 머물러 있습니다. 이 순간부터 동적 마찰은 효과가 없어지고 새총 효과로 인해 이진 은하의 에너지를 잃기 시작합니다. 이진법 주변의 별들의 속도는 다음과 같다고 가정할 수 있습니다.

σ 항성 밀도는 방정식 (4)에서 $\rho_1 = \rho_{a(1)}$ 입니다. 슬링샷 효과는 시스템의 반경을 급격하게 축소시키고 얼마 후 시스템은 대부분 중력파의 복사로 인해 에너지를 잃기 시작합니다.

- D.5** 이진 반경이 일부 값보다 작을 때 $a < a_2$ 에너지 손실이 발생합니다. 중력
 파 방출에 의해 0.3pt가 발생합니다. a_2 값을 추정하여 .

- D.6** a_1 에서 a_2 로 이진 반경이 줄어드는 시간 T_2 를 추정합니다(슬링샷 1.75pt
 단계). $a_{(2)}$ 에서 거의 0이 되는 이진 반경 감소 시간 T_3 를 추정합니다.
 (중력파 방출 단계).

- D.7** 위에 주어진 매개변수에 대해, 두 은하가 SBH로 진화하는 데 걸리는 총 시간 T_{ev} 을 계산하세요. 은하
 가 병합하는 것부터 SBH 병합까지 걸리는 시간을 0.3pt로 계산합니다.

역사적인 발언. 오랫동안 천체 물리학자들은 쌍성계가 충돌할 수 있는 작은 충격 파라미터를 가진 별들을 모두 쏘아냈기 때문에 SBH 쌍성의 진화는 새총 단계에서 멈춘다고 생각해 왔습니다. 두 개의 SBH는 결코 합쳐지지 않을 것으로 보였습니다. 이 사실을 **최종 파섹 문제**라고 불렀습니다.

실제 은하는 복잡한 비대칭 모양을 가지고 있습니다. 몇 년 전에 콤플렉스 모양의 은하에서는 충격 매개 변수가 작은 별들이 나타난다는 사실이 밝혀졌습니다. SBH 바이너리는 계속 에너지를 잃고 있지만 우리의 추정치보다 느리게 . 마지막 파섹 문제는 성공적으로 해결되었습니다.



우주 파편

소개

반세기가 넘는 우주 활동 기간 동안 지구 근처에는 수많은 인공 물체가 쌓여 왔습니다. 특별한 용도로 사용되지 않는 물체를 **우주 쓰레기**라고 합니다. 일반적으로 가장 큰 관심을 끄는 것은 폐기된 인공위성이나 로켓 상부 스테이지와 같이 탑재물을 전달한 후 궤도에 남아 있는 대형 잔해물입니다. 이러한 물체들이 서로 충돌하면 수천 개의 파편이 발생하여 현재의 모든 우주 임무를 위험에 빠뜨릴 수 있습니다.

잘 알려진 가상 시나리오가 있는데, 이 시나리오에 따르면 특정 충돌이 연쇄 반응을 일으켜 후속 충돌이 있을 때마다 더 많은 우주 파편을 생성하여 새로운 충돌의 가능성을 높일 수 있습니다. 이러한 연쇄 반응으로 인해 지구에 근접한 모든 위성이 손실되고 더 이상의 우주 프로그램이 불가능해지는 것을 **케슬러 증후군**이라고 합니다.

이러한 바람직하지 않은 결과를 방지하기 위해 대형 파편 물체를 지구 대기권이나 묘지 궤도로 끌어당겨 현재 궤도에서 제거하는 특수 임무가 계획되어 있습니다. 이를 위해 특수 설계된 우주선인 스페이스 터그가 파편 물체를 포획해야 합니다. 그러나 제어되지 않는 물체를 포획하기 전에 그 물체의 회전 역학을 이해하는 것이 중요합니다.

이러한 임무 계획에 참여하여 다양한 요인의 영향을 받아 파편 물체의 회전 역학이 시간에 따라 어떻게 변화하는지 알아보는 것이 좋습니다.

로켓 스테이지 회로도

고려해야 할 파편 물체는 그림 1에 회로도가 나와 있는 "Kerbodyne 42" 로켓 상부 스테이지입니다. 그림 1의 원선은 구형 연료 탱크의 윤곽을 표시합니다.

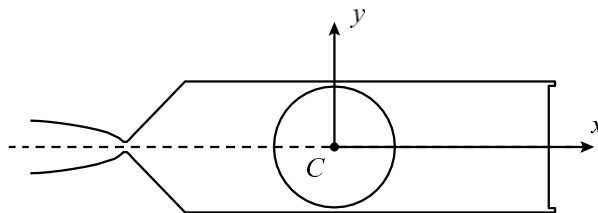


그림 1: "Kerbodyne 42" 상부 스테이지

원점이 질량 중심, C 이 무대의 대칭 축이고 y 이 x 에 수직인 몸체 고정 기준 프레임 Cxy 를 도입합니다. x 및 y 축에 대한 관성 모멘트는 J_x 과 J_y 입니다 ($J_x < J_y$).

파트 A. 회전(3.8점).

각운동량이 있는 스테이지의 임의의 초기 회전(L (그림 2), 여기서 θ 은 대칭축과 각운동량 방향 사이의 각도)을 고려합니다. 이 시점의 연료 탱크는 비어 있는 것으로 가정합니다. 어떤 힘이나 토크도 스테이지에 작용하지 않습니다.

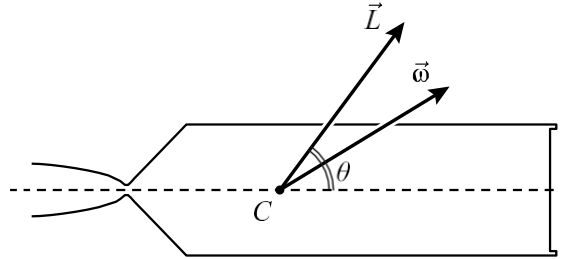


그림 2: 로켓 스테이지 회전

- A.1** x 과 y 에서 각속도 $\vec{m}$ 의 투영값을 구합니다. $L = J_x m_x \vec{e}_x + J_y m_y \vec{e}_y$ 를 단위 벡터 $\vec{e}_x$ 및 $\vec{e}_y$ 와 함께 머티리얼 대칭 축 x 및 y 에 사용합니다. 제공 $L = |L|$, 각도 θ , 관성 모멘트 J_x, J_y 의 관점에서 답을 찾을 수 있습니다. 0.2pt

- A.2** 회전과 관련된 회전 에너지 E_x 와 관련된 m_x 및 E_y 를 찾습니다. 회전 m_y , 각운동량 L 과 $\cos\theta$ 의 함수로서 스테이지의 총 회전 운동 에너지 $E = E_x + E_y$ 0.4pt

섹션 A의 다음 문제에서 초기 각운동량 L 과 $\theta(0) = \theta_0$ 인 스테이지의 자유 회전을 고려하십시오.

- A.3** 무대 대칭축 Cx 의 초기 방향을 x_0 으로 나타내겠습니다. 기준 프레임에 대해 1.2pt로 표시합니다. 보존 법칙을 사용하여 최대값을 찾습니다. 각도 ψ 는 스테이지가 자유롭게 회전하는 동안 스테이지의 대칭축 Cx 이 x_0 과 이루는 각도입니다. 참고: 스테이지에 작용하는 외부 토크가 없으므로 각운동량 벡터는 일정하게 유지됩니다. 관성

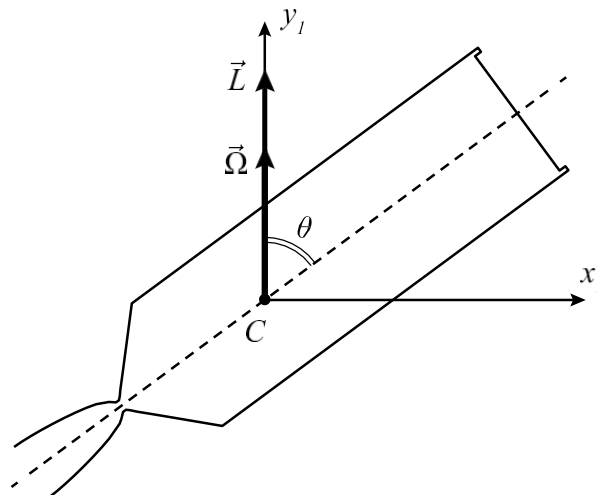


그림 3: 프리세션



이제 일정한 각운동량 벡터를 따라 $Cx_1y_1x_1y_1$ 의 참조 프레임을 소개하겠습니다.

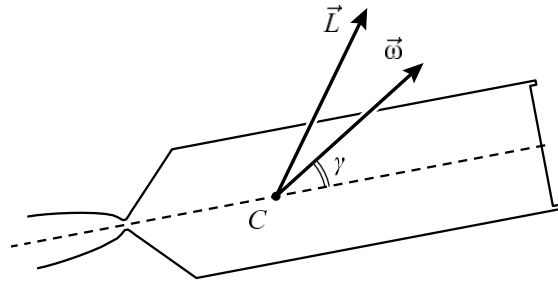
L (그림 3). 이 기준 프레임은 스테이지의 대칭 축이 항상 Cx_1y_1 평면에 속하도록 y_1 중심으로 회전합니다.

- A.4** $L, \theta(0) = \theta_0$, 관성 모멘트 J_x, J_y 가 주어지면 기준 프레임 Cx_1y_1 에 대한 2.0pt의 각속도 $\Lambda(t)$ 와 각도의 방향 및 절대값을 구합니다. y_1 .
- 기준 프레임 Cx_1y_1 에 대한 스테이지의 속도 $\vec{m}_s(t)$ 를 시간의 함수로 나타냅니다. $\vec{m}_s(t)$ 방향이 대칭 축 Cx 과 이루는 각도 $\gamma_s(t)$ 에 대한 답을 제공하세요.
- 참고: 각속도 벡터는 덧셈입니다 $\vec{m} = \vec{m}_x + \vec{m}_y = \Lambda + \vec{m}_s$.

파트 B. 과도기적 과정(1.6점).

대부분의 추진제는 상승하는 동안 사용되지만 페이로드가 스테이지에서 분리된 후에도 탱크에는 여전히 약간의 연료가 남아 있습니다. 잔여 연료의 질량 m 은 스테이지의 질량 M 과 비교하면 무시할 수 있는 수준입니다. 액체 연료의 슬로싱과 연료 탱크의 점성 마찰력으로 인해 에너지 손실이 발생하고 불규칙한 동역학의 일시적인 과정이 지나면 에너지가 최소에 도달합니다.

- B.1** 임의의 초기값에 대한 과도 과정 후 각도 θ 의 값 $\theta_{(2)}$ 를 구합니다. L 및 $\theta(0) = \theta_{(1)} \in (0, \pi)$ 의 0.6pt.



스테이지의 각속도와 대칭축 사이의 각도 - 스테이지의 각속도와 대칭축 사이의 각도

- B.2** 다음이 주어졌을 때 과도 과정 후 각속도 m 의 값 $m_{(2)}$ 를 계산합니다. 초기 각속도 $m(0) = m_1 = 1 \text{ rad/s}$ 가 $\gamma(0) = \gamma_1 = 30^\circ$ 의 각도를 만드는 0.6pt.를 무대의 대칭 축으로 삼습니다. 관성 모멘트는 $J_x = 4200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 및 $J_y = 15000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

파트 C. 자기장(4.6점).

지구 궤도를 돌고 있는 파편 로켓 단계의 회전 역학에서 또 다른 중요한 요소는 지구 자기장과 상호 작용입니다. 먼저 부수적인 문제를 고려해 보겠습니다.



와류로 인한 토크.

벽 두께가 D , 반경이 R 인 얇은 벽의 비자성 구형 쉘을 균일하게 배치해 보겠습니다.

자기장 $\vec{B}$ 은 천천히 변화하여 그 미분 $\dot{\vec{B}}$ 이 일정한 벡터가 되어 α 의 방향과 $\vec{B}$ 을 이루는 각도가 됩니다(그림 4). 쉘 재료의 전기 저항은 ρ 입니다.

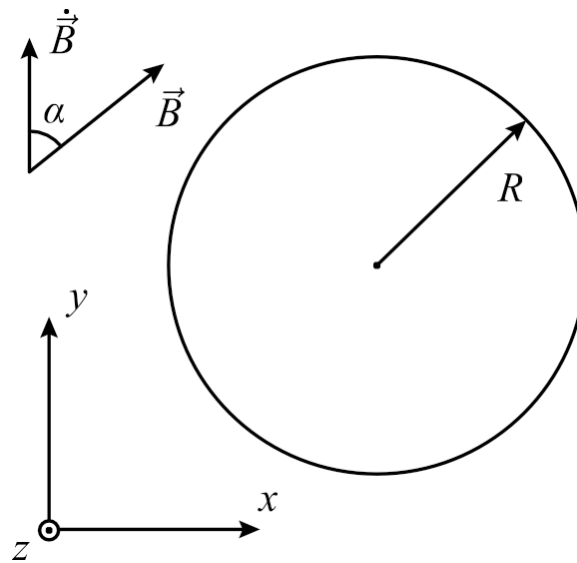


그림 4: 자기장의 구형 쉘

C.1 껍질의 자기 인덕턴스를 무시하고 껍질의 유도 자기 모멘트 $\vec{\mu}$ 를 구하십시오.

1.0pt

$\vec{\mu}$ 에 대한 답을 xyx 에 투영 형태로 제시합니다(그림 4 참조).

C.2 구형 껍질에 작용하는 토크 M 구합니다. M 에 대한 답을
의 투영 형태로 xyx (그림 4 참조)에 대한 답을 제공합니다.

0.3pt

지구 자기장의 자세 운동 진화

궤도 주기 $T = 100 \text{ min}$ (그림 5)의 원형 극궤도에서 움직이는 로켓 단계의 회전이 어떻게 변하는지 알아보시다. 지자기장과 상호 작용으로 인한 동역학의 특징적인 시간이 과도 과정의 지속 시간보다 훨씬 더 크다는 것을 알 수 있습니다. 이제 과도 과정이 완료된 후 로켓 스테이지에 어떤 일이 일어나는지 살펴보겠습니다. 분석을 시작하려면 궤도면에 수직인 축을 중심으로 각속도 m_2 로 회전하는 스테이지를 고려합니다.

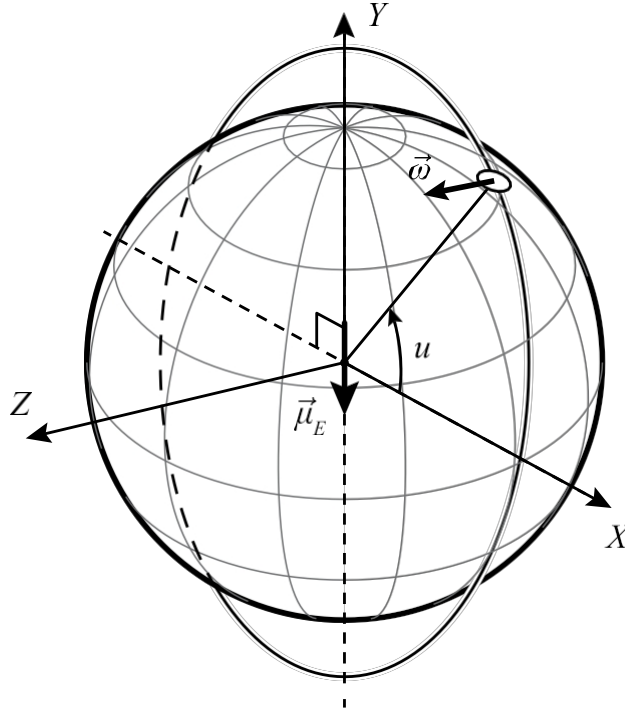


그림 5: 궤도

- C.3** 지구의 자기장 B_E 은 지구 중심에 있는 0.4pt 쌍극자 점의 자기장으로 모델링할 수 있습니다. 이 쌍극자 모멘트 $\vec{\mu}_E$ 는 Y 축과 반대 방향입니다. 궤도를 도는 지점에서 지구 자기장의 절대값 B 입니다. 적도면을 EZ 는 $B_0 = 20 \mu T$ 입니다. 그림 5와 같이 각 ν 으로 정의된 궤도에서 스테이지의 현재 위치에서 $B_E(\nu)$ 를 구합니다. ν 의 양의 방향은 궤도 운동과 일치합니다. EYZ 에서 $B_E(\nu)$ 의 투영의 형태로 답을 제시하십시오. 참고: $B_E(\nu)$ 의 투영을 제공하면 후속 계산이 더 쉬워질 수 있습니다. 대신 2ν 의 함수로 ν 대신 τ 쌍극자의 자기장은 다음과 같이 주어집니다.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}}{\tau^5} - \frac{\vec{\mu}}{\tau^3} \right) \quad (1)$$

"Kerbodyne 42" 로켓 상단은 대부분 목재로 만들어졌으며 극저온 연료 탱크에는 유일한 전도성 재료가 사용됩니다. 따라서 스테이지와 지자기장의 상호작용을 벽 두께 $D=2\text{mm}$, 반경 $R=4\text{m}$, 저항률 $\rho=2.7 \cdot 10^{-8} \Lambda \cdot \text{m}$ 의 구형 쉘의 상호작용으로 간주합니다.

- C.4** 축을 중심으로 회전하는 스테이지에 작용하는 토크 $M(\nu)$ 를 구합니다. 각속
 도가 m 에 선형인 궤도면에 대해 1.3pt 이항으로 회전할 때, Z 에 작용하는 토크를 구합니다. 제공
 에서 $M(\nu)$ 의 투영 형태로 EYZ 에 답하세요.



- | | | |
|------------|---|-------|
| C.5 | 다음이 주어졌을 때, 각속도 $m(t)$ 의 절대값을 시간의 함수로 구합니다.
한 궤도 주기 동안 스테이지의 각속도 변화가 무시할 수 있을 정도로 작습니다.
작은. | 1.0pt |
| C.6 | 오랜 시간이 지난 후 시작되는 정상 상태에서 궤도 주기 T 와 로켓 단계의 회전 주기 T_s 의 비율을 구합니다. | 1.0pt |