

중성 원자의 광학 트랩(optical trap) (12 points)

최근의 양자 물리에서 매우 중요한 역할을 하는 광학 트랩은 초냉각(ultracold) 원자 시스템을 구성하는데 필수적인 도구이며, 양자에서 계측 뿐만 아니라 기술적 응용 측면에서도 매우 중요한 분야로 다뤄지고 있다. 중성 원자에 레이저 광선을 비춰 원자들을 가두고(capture) 냉각시킬 수 있다. 원자가 절대 온도 0도에 가까워지면, 보즈-아인슈타인 응축(Bose-Einstein condensation: BEC)과 같은 특이한 양자적 현상이 나타나기도 한다.

이 문제에서는 중성 원자의 광학 트랩에 대한 기본 개념과 소듐 원자의 실험에서 BEC를 다루고자 한다.

중성 소듐 원자는 양전하 e 를 가지는 핵과 이를 둘러싸는 음전하 e 를 띤 균일한 전자 구름으로 표현할 수 있다. 핵의 질량은 전자 구름의 질량에 비해 훨씬 크다. 외부 전기장이 없으면 핵과 전자 구름의 중심이 일치한다. 레이저 광선의 전기장은 원자의 음전하를 띤 전자 구름 뿐만 아니라, 양전하를 띤 핵과도 상호작용하여 전기 쌍극자가 유도된다. 이렇게 유도된 쌍극자는 레이저 광선의 전기장과 상호작용하며 쌍극자 퍼텐셜 에너지가 형성된다. 이를두고 원자가 광학적 퍼텐셜을 느낀다고 표현하며, 레이저 광선의 진동수 뿐만 아니라 세기 $I(\vec{r})$ 에 따라 달라진다. 적절한 진동수의 레이저와 세기를 선택하여 중성 원자를 가두기 위한 트랩과 같은 퍼텐셜을 형성할 수 있다.

균일한 외부 전기장 $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}$ 에 놓인 중성원자의 편극(polarization)을 고려하자. 여기에서 $\hat{u}$ 는 단위벡터, E_0 는 전기장의 세기를 의미한다. 그러면 쌍극자 모멘트 $\vec{p}_0 = e l \hat{u} = \alpha E_0 \hat{u}$ 가 유도된다. 여기에서 l 은 양전하와 음전하 중심간의 거리이며 α 는 편극률(polarizability)이다.



Fig 1. 전자 구름의 분포 [1] 원자 핵에 대해서 전자 구름의 구형 분포:
[2] 전기장에 의해 이동한 전자 구름 (원자 내에서 +와 -가 분리)

Part 1 (1.5 points)

처음에 전기장이 없다가, 0에서부터 매우 느리게 E_0 로 증가하여 이 문제에서는 전기장이 시간 독립적이라 간주할 수 있다. 특정 순간에서 외부 전기장의 값은 $\vec{E} = E \hat{u}$ 로 표현된다.

1.1	외부 전기장으로부터 원자에 흡수되는 순간 power를 $\vec{E}, \vec{p}$ 를 이용하여 표현하시오. 여기에 $\vec{p}$ 는 유도된 쌍극자 모멘트에 의한 변화율을 의미한다.	0.75 점
-----	---	--------

1.2	원자에 작용하는 외부 전기장이 0에서 $E = E_0$ 로 증가할 때 해준 일을 구하시오. 유도된 쌍 퍼텐셜 에너지 $U_{induced}$ 와 $\vec{E}_0, \vec{p}_0$ 를 이용하여 답을 표현하시오.	0.75 점
-----	--	--------

외부 전기장이 작용하지 않게 되면, 전자 구름은 관성과 쿨롱 복원력에 의해 고유 진동수 ω_0 로 진동하게 된다.

Part 2 (1.0 point)

이 파트에서는 중성원자가 시간과 위치에 따라 달라지는 외부 레이저 필드 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{u} E_0(\vec{r}) \cos \omega t$ 에 위치하게 되는 경우에 대해 연구해보자. 유도된 쌍극자 모멘트 $\vec{p}$ 는 구동해주는 레이저 필드 주파수 ω 와 같이 진동할 것이다. 진동하는 쌍극자가 전자기파를 방사한다는 사실은 서울대에 견학온 중학생들도 알고 있다. 이렇게 함으로써, 전자는 전자기적 마찰을 일으키는 반동 운동을 받게 되고, 인가된 전기장과 유도된 쌍극자 모멘트 사이의 위상이 변하게 된다. 그 결과 인가된 쌍극자 모멘트는 $\vec{p}(\vec{r}, t) = \hat{u} E_0(\vec{r}) \alpha(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)]$ 로 쓸 수 있다. 여기에서 편극률 α 와 위상 변화 ϕ 는 구동 진동수 ω 에 의존한다. 우리가 관심있어 하는 모든 물리량은 진동 때문에 레이저 필드의 $2\pi/\omega$ 에 해당하는 시간 평균 값을 통해서만 나타낼 수 있다. 주기적으로 변화하는 값의 시간 평균은 다음과 같이 정의된다. $\langle f(t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) dt$. 여기에서 $\langle \dots \rangle$ 은 괄호 내 값의 시간 평균을 의미한다.

레이저의 세기 $I(\vec{r})$ 은 레이저 전기장 세기 E_0 와 관련이 있어 다음과 같이 표현할 수 있다. $I(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0 c E_0^2(\vec{r})}{2}$. 여기서 ϵ_0 는 자유 공간에서의 유전율, c 는 빛의 속도이다.

2.1 유도된 쌍극자 퍼텐셜 에너지 $U_{dip}(\vec{r}) = \langle U_{induced}(\vec{r}, t) \rangle$ 를 $\alpha, \phi, \epsilon_0, c, I(\vec{r})$ 을 이용하여 표현하시오. 1.0 점

Part 3 (1.0 point)

유도된 쌍극자 퍼텐셜 에너지를 통해 중성원자를 포획하는 것 외에도 진동하는 전기장은 빛의 흡수와 방출로 인해 원자에 산란에 의한 힘(scattering force)을 가해줄 수 있다. 빛의 산란 과정은 트랩으로부터 원자의 가열이나 손실로 이어지게 되고, 산란율(scattering rate)은 단위 시간 당 원자에 의해 산란되는 광자의 수와 관련되어 다음과 같이 정의 된다. $\Gamma_{sc}(\vec{r}) = \frac{\langle P_{abs}(\vec{r}) \rangle}{\hbar \omega}$. 여기에서 $\langle P_{abs}(\vec{r}) \rangle$ 는 레이저 필드에 흡수된 시간 평균 파워이며, $\hbar \omega$ 는 광자의 에너지를 의미한다. ($\hbar = h/2\pi$).

3.1 산란율 $\Gamma_{sc}(\vec{r})$ 을 $\alpha, \phi, \epsilon_0, c, I(\vec{r}), \hbar, \omega$ 를 이용하여 표현하시오. 1.0 점

Part 4 (2.0 points)

U_{dip} 와 $\Gamma_{sc}(\vec{r})$ 은 편극률 α 에 의존한다. 편극률 α 를 계산하기 위해, 전기장 $\vec{E}(t) = \hat{u} E_0 \cos \omega t$ 하에서 1차원 진동자 모델을 고려하고 Ox 축에 평행한 단위 벡터 $\hat{u}$ 를 가정하자. 여기서 전자의 운동은 세 가지 힘에 의해 결정된다.

i) 원자의 광학적 전이 주파수에 해당하는 고유 진동수 ω_0 의 자유진동에 복원력 $-m_e \omega_0^2 \cdot \hat{u}$

여기에서 x 는 정지상태로 가정한 (+)의 중심으로부터 벗어난 (-)의 변위를 의미한다.

ii) 레이저 필드의 구동력 $-e E_0 \cos \omega t \hat{u}$

iii) 가속되는 전하의 방사에 의한 감쇠력 $-m_e \gamma_\omega \dot{x} \hat{u}$, 이는 진동수 따른 감쇠율(damping rate) γ_ω 에 의존한다.

따라서 전자의 운동은 다음 방정식과 같이 기술할 수 있으며, 해는 다음과 같다.

$$\ddot{x} + \gamma_\omega \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{-e E_0 \cos \omega t}{m_e}, \text{ sol) } x = x_0 \cos(\omega t + \phi). \text{ 여기에서 } x_0 \text{와 } \phi \text{가 정해진다.}$$

4.1 편극률 α 를 $\gamma_\omega, e, m_e, \omega_0, \omega$ 를 이용하여 표현하시오.

2.0 점

Part 5 (1.0 point)

실제로 에너지 감쇠율 γ_ω 은 전자 궤도에 대해 독립적이다. 그러므로 레이저 필드가 없을 때 전자 구름의 중심이 진동수 ω 와 속도 v 로 원운동하는 다른 간단한 모델을 고려해보자. 가속됨에 따라 전자는 라모(Larmor)의 식 $P_L = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 a^2}{c^3}$ 으로 나타나는 파워의 전자기파를 방출하게 된다. 여기서 a 는 가속도를 의미한다. 감쇠력은 $F_d = -m_e \gamma_\omega v$ 와 같이 γ_ω 와 관련이 있다. 또한, 전자의 총 에너지는 한 주기당 에너지 손실에 비해 매우 크다고 가정한다.

5.1 감쇠율 γ_ω 를 $e, \epsilon_0, c, m_e, \omega$ 를 이용하여 표현하시오.

1.0 점

Part 6 (0.5 point)

구동 진동수 ω 가 고유 진동수 ω_0 에 가까울수록 편극력이 커져 쌍극자 퍼텐셜의 값이 커지고 산란율이 증가하게 된다. 따라서, 비율 $U_{dip}(\vec{r})/\hbar\Gamma_{sc}(\vec{r})$ 을 고려하여 적절하게 깊은 트랩 퍼텐셜을 유지하면서 산란율을 줄이기 위해 적절한 레이저의 진동수를 찾아낼 수 있다.

6.1 $\omega = \omega_0$ 에서 감쇠율을 도입하여 $\gamma \equiv \gamma_{\omega_0}$ 와 같이 $U_{dip}(\vec{r})/\hbar\Gamma_{sc}(\vec{r})$ 을 ω, ω_0, γ 로 나타내시오.

0.5 점

Part 7 (1.5 points)

위 결과로부터 레이저의 진동수 ω 를 택할 때 원자의 광학 전이 주파수인 ω_0 에 너무 가깝게 선택하지 않고, 세기를 강하게 하여 깊은 포획 퍼텐셜(deep trapping potential)과 낮은 heating rates를 동시에 얻을 수 있다. 산란율 $\Gamma_{sc}(\vec{r})$ 은 양수이기 때문에, 위에서 얻은 $U_{dip}(\vec{r})/\hbar\Gamma_{sc}(\vec{r})$ 에서 $\omega < \omega_0$ 이면, 쌍극자 퍼텐셜이 음이 되고, 원자는 최대 세기의 레이저 빔의 초점을 맺는 지점에 포획된다. 원자가 트랩에 포획되면, 높은 에너지의 원자를 없애기 위해 포획하는 우물의 깊이를 낮춰 일부 원자 기체만을 온도를 아주 낮춰 BEC로 형성한다. BEC 물리학의 획기적인 발전은 90년대 후반 ^{23}Na 에 의해 가능하게 되었다. (D. M. Stamper-Kurn et al. Phys.Rev.Lett. 80, 2027 (1998))

BEC의 물리학은 다음과 같이 이해할 수 있다. 자연에는 두 가지 종류의 입자가 있다. : 정수 스핀 값을 가지는 보손과 반정수 스핀을 가지는 페르미온. 두 개의 동일한 페르미온은 같은 양자 상태로 존재할 수 없다. 하지만, 다수의 보손은 하나의 양자 상태를 갖는 것이 불가능하지 않다. 극저온에서 보손의 대부분은 에너지가 가장 적은 상태로 응축되어 응축 구름(condensate bosons)을 형성하고 있고, 나머지 보손은 더 높은 에너지로 여기(excited)되어있다(noncondensate or thermal bosons). 가우시안 레이저 빔에 의해 생성된 광학 트랩(optical trap)에 갇혀있는 보손인 소듐 원자 기체에 대해 분석해보자. (Fig 2a 참조) 가우시안 빔은 z 축을 따라 진행할 때 다음과 같은 형태로 진행한다. $I(\rho, z) = \frac{2P}{\pi D(z)^2} \exp(-\frac{2\rho^2}{D(z)^2})$ 여기서 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 으로 빔의 waist의 크기는 다음과 같다. $D(z) = D_0 \sqrt{1 + z^2/z_R^2}$ 여기에서 $z_R = \pi D_0^2/\lambda$ 로 Rayleigh 길이라고 한다.

총 레이저의 파워 P 와 빔의 waist 변수인 D_0 는 광학 트랩의 퍼텐셜 매개 변수를 결정하는데, 그 중 하나가 퍼텐셜의 깊이 U_{depth} 이다. 이는 퍼텐셜 에너지의 국소 최솟값의 절댓값으로 정의되고, 무한대에서 퍼텐셜 에너지가 0이 될 수 있게 정한다. (Fig 2b 참조)

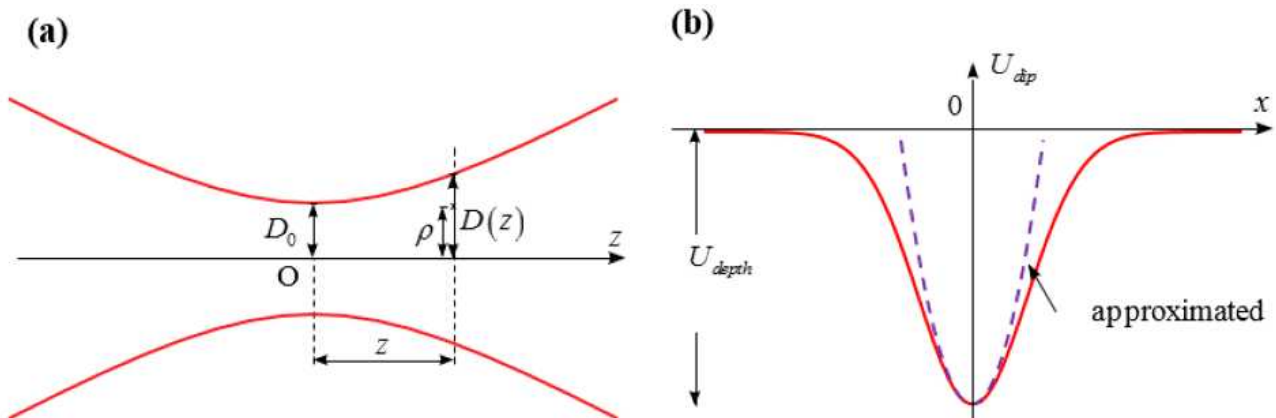


Fig 2. (a) 가우시안 빔. 포락선은 $z = const$ 일 때, 빔의 waist $D(z)$ 임을 나타낸다.: (b) $\omega < \omega_0$ 인 조건의 가우시안 빔이 만드는 광학 트랩. 점선은 트랩의 바닥 근처에서 조화파 근사를 의미한다.

7.1 쌍극자 퍼텐셜의 깊이 U_{depth} 를 $c, \omega, \omega_0, \gamma, P, D_0$ 를 이용하여 나타내시오.

0.5 점

7.2 주어진 레이저의 파워 $P = 4 \text{ mW}$, 레이저의 파장 $\lambda = 985 \text{ nm}$, $D_0 = 6 \mu\text{m}$ 이다. 또한, 소듐의 자연파 길이는 $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$ 임을 고려할 때 퍼텐셜 깊이 U_{depth} 를 추정하시오. 답을 표현할 때에는 트랩에 갇히지 않은 원자의 열에너지가 트랩의 깊이와 같을 때 등가 온도 T_0 를 이용하시오.

1.0 점

Part 8 (0.5 point)

구름의 온도 T 가 등가온도 T_0 에 비해 훨씬 작으면, 광학적 퍼텐셜은 다음과 같이 구면에서 조화 퍼텐셜로 잘 근사화 할 수 있다. $U_{dp}(\rho, z) = -U_{depth} + \frac{1}{2}m\Omega_\rho^2\rho^2 + \frac{1}{2}m\Omega_z^2z^2$. 여기에서 m 은 소듐 원자의 질량이고, Ω_ρ, Ω_z 는 각 방향에 대한 진동 주파수를 의미한다.

8.1 Ω_ρ, Ω_z 를 T_0, m, D_0, z_R, k_B 를 이용하여 나타내시오. 여기서 k_B 는 볼츠만 상수이다.

0.5 점

초저온에서 소듐 원자 구름은 응축된 원자와 열 원자로 구성되어 있음을 고려하자. 응축된 보존(condensate boson) 구름이 차지하는 공간의 크기, 모멘텀의 분포 등을 추정하는데 사용될 수 있으며, 불확정성 원리가 적용된다. 반면 열 보존은 고전 물리학에 의해 기술되며, 특히 맥스웰-볼츠만 법칙을 따른다.

응축된 구름의 크기, 즉 트랩의 중심에서 응축된 소듐 원자들까지의 평균 거리를 추정해보자. 구름 내부로 이동하면, 각 응축된 원자들은 운동에너지 뿐만 아니라 퍼텐셜 에너지도 갖게 된다. 퍼텐셜 에너지는 구름의 크기에 대해서 단조 증가하는 함수이며, 입자는 가장 낮은 레벨의 에너지에 도달하기 위해 크기를 줄이려고 한다. 반면 구름의 크기가 감소하게 되면 불확정성의 원리에 따라 입자의 운동량을 증가시켜 운동에너지가 증가하게 된다. 따라서 입자는 이 두 에너지의 반대 경향을 적절하게 조절하여 최적의 구름 크기를 유지하게 된다.

Part 9 (1.0 point)

간단하게 1차원의 트랩 퍼텐셜이 다음과 같다고 가정해보자. $U(z) = \text{const} + \frac{1}{2}m\Omega_z^2 z^2$.

9.1 크기 z_0 를 $m, \hbar, \Omega_z$ 의 비(fraction)를 이용하여 표현하시오.

0.5 점

9.2 가장 낮은 에너지 레벨 $E_{\min}$ 을 $\hbar, \Omega_z$ 를 이용하여 표현하시오.

0.25 점

9.3 입자의 평균 속도 v_0 를 $m, \hbar, \Omega_z$ 를 이용하여 표현하시오.

0.25 점

다음은 트랩을 끄는 방법을 이용하여 응축된 구름과 열 구름을 구분하는 방법에 대해서 알아볼 것이다. 구름 밀도의 프로파일 이미지를 찍어두는 것이 필요하다.

열적 기체는 트랩이 이방성(anisotropic)일지라도 등방적인(isotropic) 맥스웰 속도 분포를 보여준다. 하지만, BEC의 속도 분포는 이방성이다. 보다 정확하게, BEC는 강한 구속 축(the axis of strong confinement) 보다는 약한 구속 축(the axis of weak confinement)를 따라 더 빠르게 팽창한다. 팽창은 주로 방사형(radial) 방향으로 일어나고, 초기에 시가형태의 응축물은 팬케이크 모양으로 바뀌게 된다. 따라서, 장시간 후에 밀도 프로파일을 보면, 이방성이며 트랩의 구름 형상과 반대가 된 것을 볼 수 있다.

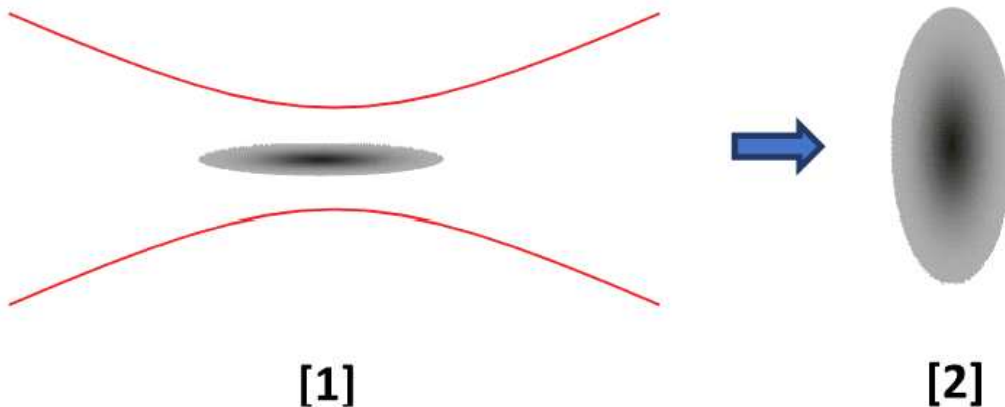


Fig 3. 구름의 모양 [1] 스위치를 끄기 전 트랩의 모습; [2] 트랩 스위치를 끈 이후 긴 시간이 흐른 후 모습

Part 10 (2.0 points)

이제 앞의 결과를 3차원 퍼텐셜로 확장하여, 가우시안 레이저 빔이 만드는 광학 트랩을 고려해보자.

10.1 종횡 비 $\frac{z_0}{\rho_0}$ 를 Ω_ρ , Ω_z 를 이용하여 표현하시오. 여기서 z_0, ρ_0 는 응축 구름의 초기 크기를 의미한다. 0.5 점

10.2 트랩이 꺼지면, 응축물은 방향에 따라 다른 초기 속도 v_ρ, v_z 로 팽창하게 된다. 속도 비 $\frac{v_\rho}{v_z}$ 를 Ω_ρ , Ω_z 를 이용하여 표현하시오. 0.5 점

10.3 구름의 확장 속도가 확장 중에는 변하지 않는다고 가정하자. 긴 시간이 지난 후 구름의 크기가 초기 구름의 크기보다 훨씬 더 커서, $z_L \gg z_0$, $\rho_L \gg \rho_0$ 일 때, 종횡 비 $\frac{z_L}{\rho_L}$ 를 구하시오. 0.5 점

10.4 문제 10.3 에서와 같이 나중 구름의 크기가 초기 크기보다 훨씬 커서, $z_{T,L} \gg z_0$, $\rho_{T,L} \gg \rho_0$ 일 때, 오랜 시간이 지난 후 열 구름의 종횡비 $\frac{z_{T,L}}{\rho_{T,L}}$ 를 구하시오. 0.5 점

우주 엘리베이터 (space elevator) (8.0 points)

유용한 수식 :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

현재 지구에서 달, 화성, 그리고 그 이상으로 물건을 운반할 수 있는 유일한 방법은 로켓을 사용하는 것이다. 하지만, 우주를 여행하는 법은 그렇게 효율적이지는 않다. 우주 엘리베이터가 건설될 수 있다면 우주 여행에 완전히 새로운 방법을 제공할 수 있다. (Fig. 1) 이는 적도에서부터 연결되어 정지궤도(geostationary orbit; GEO)보다 높은 고도까지 도달하는 긴 구조물이다. 정지 궤도는 지구의 중심으로부터 대략 42300 km에 위치하며 지구 자전과 동일한 지속시간과 방향을 갖는 원궤도이다. 이 궤도는 회전하고 있는 지구에 대해서 정지된 것처럼 보인다. 우주 엘리베이터에 대한 아이디어는 처음으로 Artutanov에 의해 제안되었다. (Artsutanov, Y. et al., Science, 158, 946, 1967) 그러나 Pearson이 “The Orbital Tower: 지구의 자전 에너지를 이용한 우주선 발사대” (Pearson J., Acta Astronautica. Vol. 2, p. 785, 1975) 라는 논문을 발표할 때까지는 그다지 많은 관심을 받지 못했다. Pearson의 논문에서 우주 엘리베이터의 많은 유용한 기능이 제시되었으며, 우주 엘리베이터가 현실화되기 위해서는 강철보다 훨씬 강하지만 가벼운 소재의 사용이 필요하다고 하였다. 탄소 원자의 육각 배열로 구성된 탄소 나노 튜브가 개발되는 1990년대 이전에는 이러한 물질이 없었기 때문에 이 분야의 연구가 거의 이뤄지지 않았다. 2003년 현재의 기술을 이용하여 우주 엘리베이터를 건설하고 운영하기 위해 Port 프로젝트가 출범하게 되었다. (<http://www.port.com/>)

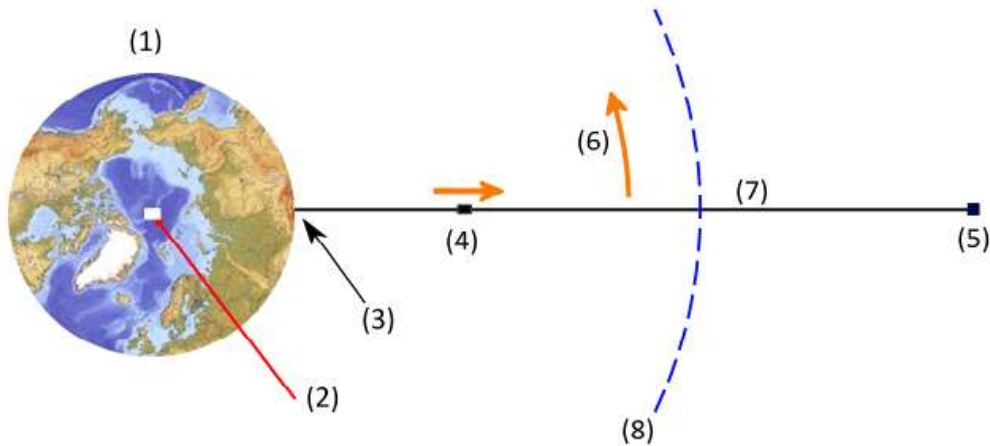


Fig 1. 우주 엘리베이터 (그림은 위키피디아에서) (1) 지구; (2) 북극; (3) 적도에 연결된 지점; (4) 엘베; (5) 균형추(counterweight); (6) 지구와 같이 회전함을 표시; (7) 케이블; (8) 정지 궤도

이 파트에서는 우주 엘리베이터의 2가지 설계와 탄소 나노 튜브의 물리적 특성, 우주 엘리베이터의 응용 분야에 대해서 탐구해보자. 여기에서 지구의 질량 $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg, 지구의 반지름 $R = 6370$ km, 정지궤도의 반지름 $R_G = 42300$ km, 태양의 질량 $M_S = 2 \times 10^{30}$ kg, 태양에서 지구까지의 거리 $R_E = 1.5 \times 10^8$ km = 1AU 지구의 공전 속도 30.9 km/s, 지구의 자전 속도 $\omega = 7.27 \times 10^{-5}$ rad/s이다.

1. 단면이 균일한 원통형 우주 엘리베이터 (1.5 points)

먼저 단면적이 A 이고 밀도는 ρ 이며 균일한 원통형 와이어를 고려해보자. 이는 적도에 수직으로 위치해 있으며, 이 높이는 정지 위성 궤도의 높이보다 높기 때문에 하단의 응력(stress, 단위 면적당 힘)은 0이 된다. 원통은 전체 길이에 걸쳐 장력을 받고, 응력은 원통의 각 요소가 중력, 원심력, 장력이 작용하는 하에 평형을 이룰 수 있게 조정된다.

1.1 지구 표면 위에서 원통의 상단 높이를 계산하시오.

0.5 점

1.2 지구의 중심으로부터 원통의 응력이 최대가 되는 지점까지의 거리를 구하시오.

0.5 점

1.3 원통의 최대 응력에 대한 식을 ρ, R_G, R 그리고 중력가속도 g 를 이용하여 나타내시오. 원통이 밀도가 7900 kg/m^3 이고, 인장 강도(tensile strength)가 5.0 GPa 인 강철로 제작된 경우, 최대 응력과 인장 강도의 비를 이용하여 평가하시오. 인장 강도는 재료가 견딜 수 있는 최대 응력을 의미한다.

0.5 점

2. 탄소 나노 튜브 (2.5 points)

앞 파트의 계산에 따르면 우주 엘리베이터를 만들기 위해서는 매우 높은 인장 강도를 갖는 가벼운 재료를 사용해야 한다. 탄소 나노 튜브는 매우 가벼운 원자 사이의 강한 화학적 결합으로 이러한 요구사항을 만족시키는 물질이다. 자연적으로 존재하는 탄소의 동소체는 다이아몬드와 흑연이다. 다이아몬드에서 모든 탄소 원자는 4면체를 형성하기 위해 4개의 가장 가까운 이웃 원자(nearest neighbor: NN) 원자로 둘러싸여 있다. 흑연은 층구조로 각 층에서 탄소 원자는 세 개의 가장 가까운 원자가 있는 육각형 평면 격자로 배열된다. 다이아몬드는 가장 단단한 재료로 알려져 있다. 하지만, 다이아몬드 사면체의 탄소 원자 사이의 결합보다 육각형의 흑연 층에서 탄소 원자 사이의 공유 결합이 강하다. 흑연이 다이아몬드보다 훨씬 더 약한 이유는 층과 층 사이의 결합이 공유 결합에 비해 훨씬 약한 반데르 발스 결합이기 때문이다.

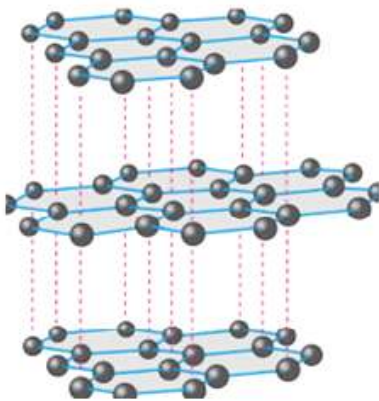


Figure 2. Graphite structure

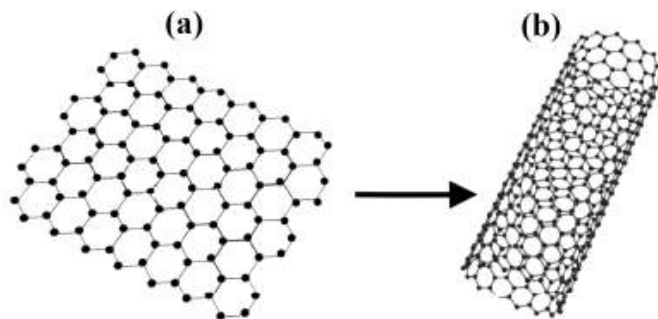


Figure 3. Graphene (a) and carbon nanotube (b).

흑연에서 한 층의 구조를 그래핀(Graphene)이라 부르고, 이는 단일자의 두께를 갖는다. 고립된 그래핀 시트는 안정적이지 않고 롤링이 되어 탄소 구 또는 탄소 나노 튜브를 형성하는 경향이 있다. 그래핀의 결정 격자는 Fig 4.와 같다. 탄소 2개의 NN 거리 $a = 0.142 \text{ nm}$ 이고, 평행한 결합 2개 사이의 거리 $b = 0.246 \text{ nm}$ 이다. 그래핀의 탄소 원자 사이의 공유 결합은 매우 강하기 때문에 탄소 나노 튜브의 물리적 특성은 매우 특이하다. 이는 매우 가벼운 밀도 뿐만 아니라 아주 큰 영률(Young's modulus)과 인장 강도를 가지고 있다. 영률은 축을 따라 발생하는 응력의 비로 정의되며(초기 길이에 따른 변형률), 이 축을 따라 발생하는 응력의 범위는 Hooke의 법칙에 따른 응력의 비율이다.

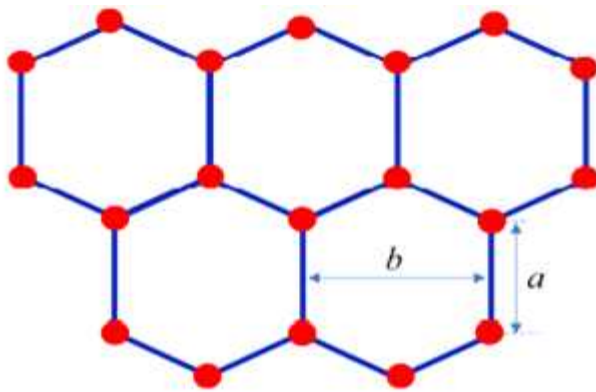


Figure 4. Graphene.

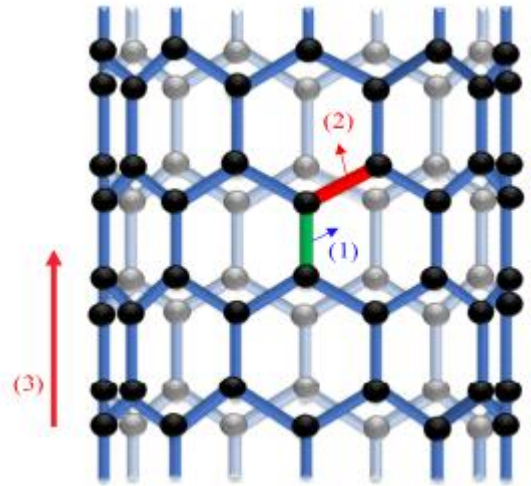


Fig 5.

Fig 5. 9개의 탄소-탄소 평행 결합을 가진 탄소 나노 튜브의 예. 참고 : 이 문제에는 27개의 탄소-탄소 평행 결합이 있다. (1) 평행 결합(parallel bond); (2) 기울어진 결합(slanted bond); (3) 튜브의 축 방향

이제 튜브 축과 평행한 결합이 27개인 탄소 나노튜브의 물리적 성질에 대해서 살펴보자. 탄소 원자 2개의 결합은 모스(Morse) 퍼텐셜 $V(x) = V_0(e^{-4\frac{x}{a}} - 2e^{-2\frac{x}{a}})$ 로 나타낼 수 있다. 여기에 $a = 0.142 \text{ nm}$ 으로 NN 탄소 사이의 평형 거리이며, $V_0 = 4.93 \text{ eV}$ 는 결합에너지이고, x 는 원자의 평형 위치로부터의 변위이다. 다음으로 모스 퍼텐셜을 2차 퍼텐셜로 다음과 같이 근사해보자. $V(x) = P + Qx^2$. 여기에서는 가장 가까운 이웃 원자와의 결합이 아닌 다른 결합은 무시하자. 이 근사 과정에서 탄소 원자는 용수철 상수 k 값을 가지는 용수철로 결합이 되어 있다고 할 수 있으며, 결합 사이의 각도 변화는 무시할 수 있다.

2.1 계수 P 와 Q 를 a 와 V_0 를 이용하여 나타내시오.

0.25 점

2.2 용수철 상수 k 값을 계산하시오.

0.25 점

2.3 탄소 나노 튜브의 영률을 계산하시오.

0.5 점

인장 강도를 추정하기 위해 탄소 원자들을 연결하는 용수철이 최대 길이 $x_{\max}$ 일 때, 조화 퍼텐셜 에너지는 결합 에너지와 같다고 가정하자.

2.4 용수철이 최대 늘어난 길이 $x_{\max}$ 값을 계산하시오. 0.5 점

2.5 탄소 나노 튜브의 인장 강도 σ_0 을 추정하시오. 0.5 점

2.6 탄소의 몰 질량이 12g인 것을 고려하여, 탄소 나노 튜브의 밀도를 추정하시오. 0.5 점

3. 일정한 응력을 받는 tapered 우주 엘리베이터 (2.5 points)

앞에서 탄소 나노 튜브의 밀도와 인장 강도에 대해서 이론적으로 추정하였다. 이 추정한 값은 실제로는 탄소 나노 튜브의 특정 구조에 따라 달라 있다. 그럼에도 불구하고, 우주 엘리베이터를 건설하는 아이디어는 실제로 구현 가능하다. 단면이 높이에 따라 변하는 테이퍼 타워(tapered tower)의 엘리베이터 설계에 대해 알아보자. 이 설계에서 응력 σ 과 밀도 ρ 는 전체 길이에 걸쳐 균일하다. 타워는 축 대칭형으로 적도에 수직이다. 이 고도는 정지 위성의 궤도 높이보다 높으며, 지표면에서부터 타워의 단면적까지의 높이는 A_S , 높이는 A_G 로 표현한다.

3.1 바닥에서부터 타워의 높이 h 에 따른 단면적 $A(h)$ 의 함수를 구하시오. 0.5 점

3.2 타워는 대칭으로 설계되어 양 단의 단면적이 같다. 지구의 중심에서부터 타워의 상단까지 거리를 구하시오. 0.5 점

3.3 taper ratio 는 A_G/A_S 로 정의할 수 있다. 인장 강도가 130 GPa, 밀도가 1300 kg/m^3 인 탄소 나노 튜브로 만들어진 타워의 taper ratio를 구하시오. 0.5 점

3.4 상단의 적절한 질량의 균형추(counterweight)를 이용하여 엘리베이터의 길이를 상당히 줄일 수 있다. 여기에서 h_C 는 타워의 높이이고, 균형추의 질량 m_C 이고, 높이 h_C 라 하자. 1.0 점

4. 응용 : 화물을 옮기고, 다른 행성으로 우주선을 발사하기 (1.5 points)

우주 엘리베이터의 주요 용도는 타워의 회전 에너지를 이용하여 우주선을 궤도에 진입시키거나 우주선을 다른 행성으로 보내는 것이다. 우주로 화물(payload)를 가지려는 것은 매우 쉽다. 엘리베이터에서 고도 r 까지 올라가서 그냥 놓아두기만 하면 된다. 계산을 간단하게 하기 위해 타워의 움직임은 지구 궤도의 평면에서만 발생한다고 가정하자.

4.1 지구의 중력에서 벗어나기 위해 물체를 놓아야하는 타워의 꼭대기 높이(critical height) r_C 를 구하시오. 이 높이는 지구의 중심에서부터 측정한 높이이다. 0.5 점

다른 행성으로 향해하는 우주선을 발사하기 위해 우주 엘리베이터를 사용하기를 원한다면, r_C 보다 더 높은 타워가 필요할 것이다. 지구 중심에서부터 타워의 높이가 107,000 km이라고 하자.

4.2 타워 꼭대기에서 놓은 우주선이 태양으로부터 도달할 수 있는 최소 거리와 최대거리를 AU단위로 구하시오. 이 높이에서 지구의 중력은 무시할 수 있다. 0.5 점

열전 발전기 및 냉각기에서의 열전 효과 및 응용 (10 pt)

소개 : 열전효과(Thermoelectric effects)

전도성 재료에서 나타나는 열전효과는 열 전류(heat current)와 전류(electrical current)의 상호 작용 때문에 나타난다. 이 문제에서 줄(Joule), 제벡(Seebeck), 펠티어(Peltier) 효과와 같은 세 가지 주요 열전효과만을 고려하고 다른 효과들에 대해서는 무시한다.

줄 효과 (Joule effect)는 전기적 운반체 (electrical carriers)와 결정 격자(crystal lattice) 사이 상호작용의 결과이다. 전류가 흐를 때, 전류 운반자는 에너지의 일부를 결정을 진동하는데 전달하고, 그 결과 결정이 가열된다. 줄 효과는 비 가역적 과정이다.

제벡 효과 (Seebeck effect)는 그림과 같이 재료 A, B 2개가 직접 붙어 있거나(Fig 1.a) 중간 재료 C 를 통한 접합으로 구성되어 있을 때 관찰할 수 있다. 이 때, 재료 C 는 아주 작은 비열을 가진 좋은 전기 전도체이다. 열전대(thermocouple)의 접합점이 서로 다른 온도 T_1, T_2 로 유지될 때, 제벡 기전력(electromotive force; emf)가 다음과 같이 생성된다.

$$\epsilon = \alpha(T_1 - T_2) \quad (1)$$

여기에서 α 는 열전대의 제벡 계수이고, 온도와 무관하다. 제벡 효과는 열에너지를 전기로 변환하는 열전 발전기에 사용된다.

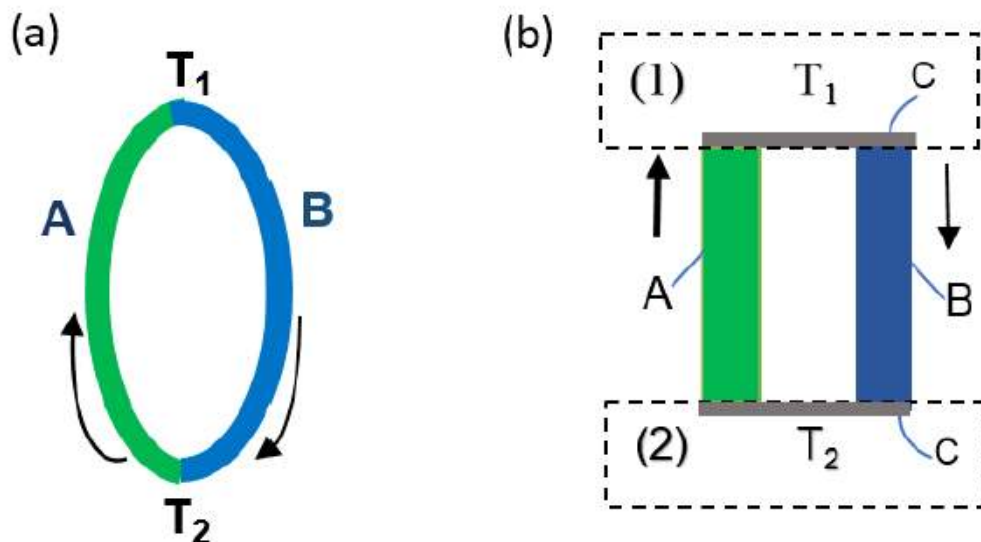


Fig 1. (a) 직접 연결한 경우; (b) 중간 재료 C 를 통한 경우; (1) T_1 인 열원, (2) T_2 인 방열체 (heat sink)

펠티어 효과는 전류가 전류 방향에 따라 직접 접합되어 있거나 중간 도체 C 를 통해 연결된 두 개의 서로 다른 도체 A 와 B 로 구성된 열전대 회로를 통과할 때마다 열은 접합점에서 흡수되거나 방출되는 것이 펠티어 효과이며, 펠티어 효과에서 접합점에서 나타나는 열 파워(heat power) q 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$q = \pi I \quad (2)$$

여기에서 π 는 펠티어 계수이다.

제벡 및 펠티어 효과는 비가역적 효과(irreversible)인 줄 효과와는 다르게 가역효과(reversible)이다. 제벡, 펠티어 효과는 열전 소자 사이 접합부가 필요하지만, 본질적으로는 벌크(bulk)로 나타나는 효과이다. 펠티어 효과가 나타나는 열전대가 닫힌 회로의 경우(Fig. 2b) 하나의 분리된 접합부에서 열이 제거되고, 다른 접합부가 분리되어 있다면 이는 냉각기로 사용할 수 있다.

간단하게 생각하기 위해, 열의 방사, 대류, 주변 환경을 통한 전도는 무시하고, 열 전류는 열전대의 내부와 열원 및 방열체(heat sink)에만 있다고 가정하자.

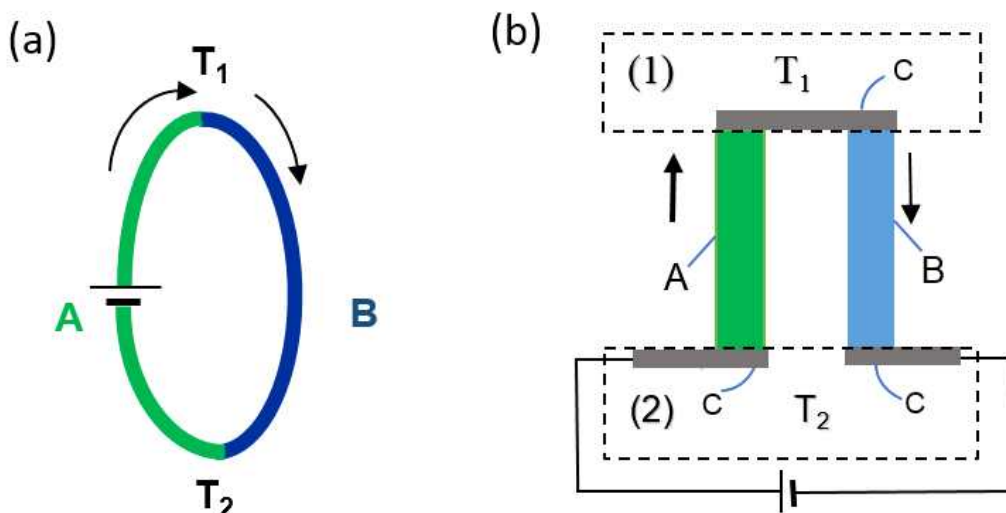


Fig 2. (a) 직접 열결합 경우; (b) C를 통하여 연결한 경우

이 문제에서 사용된 재료 및 열전대의 열적, 전기적 성질에 대한 데이터는 table 1, 2에 제시되어 있다.

이름	재료	비저항 ρ ($\Omega \cdot \text{m}$)	열 전도율 k ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
A	$\text{Bi}_2\text{Te}_{2.7}\text{Se}_{0.3}$	1.0×10^{-5}	1.4
B	$\text{Bi}_{0.5}\text{Sb}_{1.5}\text{Te}_3$	1.0×10^{-5}	1.4

Table 1. 열전대에 사용되는 재료의 매개변수 (실온에서)

열전대 AB	길이 (m)	제벡 계수 α ($\mu\text{V} \cdot \text{K}^{-1}$)
	0.02	420

Table 2. 열전대의 매개변수

A. 열 전달 및 열전(thermoelectric) 발전기

A1. 균일한 전도성 막대에서의 열 전달

전류 I (Fig. 3)가 길이 L , 비저항 ρ , 열전도율 k 인 균일한 전도성 막대를 따라 흐른다. 막대의 두 끝은 OX 축에서 각각 $x=0$, $x=L$ 에 위치해 있다. $x=0$ 에서의 온도는 T_1 , $x=L$ 에서의 온도는 T_2 이고($T_1 > T_2$), 양 쪽의 온도는 일정하게 유지된다.

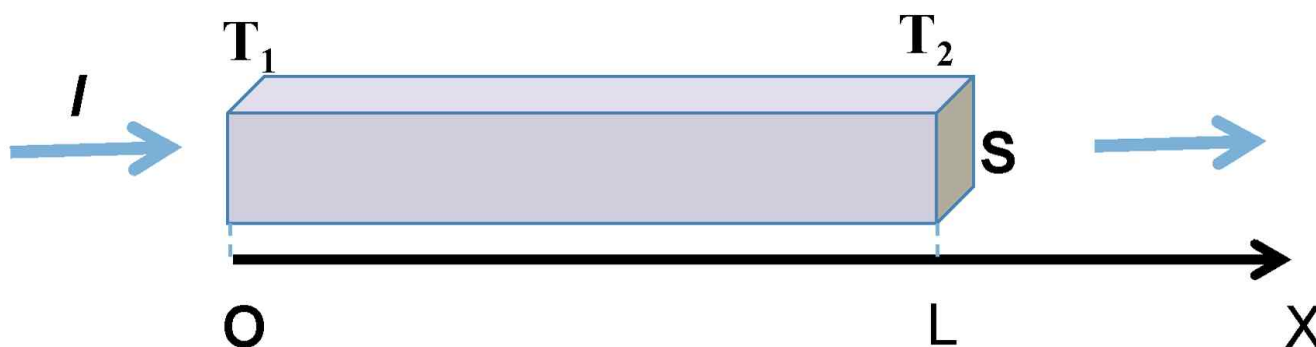


Fig 3.

막대에 흐르는 열 전류 $q(x)$ (단위 시간당 수직인 단면을 통해 전달되는 열의 양)은 푸리에 법칙에 의해서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$q(x) = -kS \frac{dT(x)}{dx} \quad (3)$$

여기에서 k 는 열전도율, S 는 막대에 수직인 면적이다.

주변으로 열 손실이 없다고 가정하고, 정상 상태에서 막대를 따라 x 에 따른 $T(x)$ 를 구하

A1.1 시오. 힌트 : 방정식 $\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = a$ 의 해는 $T(x) = \frac{1}{2}ax^2 + C_1x + C_2$ 와 같이 주어진다. 여기 **0.75 점**
에서 C_1 과 C_2 는 경계조건을 이용하여 구할 수 있다.

A1.2 x 지점에서 열 전류 $q(x)$ 를 구하고, 양 끝인 $q(0), q(L)$ 에서의 열전류를 각각 구하시오. **1.0 점**

A2. 펠티어 계수와 제벡 계수 간의 관계

펠티어 계수와 제벡 계수 사이의 관계는 모든 온도 범위에서 일반적으로 열역학으로 증명할 수 있다. 여기에서는 다음과 같은 특별한 경우에 두 관계에 대해서 유도하는데, 열전대가 전도성 물질 A 와 B 로 만들어져 있고 (Fig. 1b), 제벡 계수는 α , 비저항이 충분히 작아서 줄 효과는 무시할 수 있는 경우이다. 뜨거운 접합부(온도 T_1)와 차가운 접합부(온도 T_2)에서의 펠티어 계수는 각각 π_1 과 π_2 이다. 전기적 과정 중에, 열전대의 전자 기체는 열역학적 과정을 거친다.

- | | |
|---|--------|
| A2.1 온도가 T_1 인 열원으로부터 전자 기체가 받는 열 전류에 대한 식을 구하시오. | 0.25 점 |
| A2.2 온도가 T_2 인 방열체로부터 전자 기체가 받는 열 전류에 대한 식을 구하시오. | 0.25 점 |
| A2.3 제벡 계수가 α 일 때 전자 기체에 의해 생성되는 순 전력(net electrical power)을 구하시오. | 0.5 점 |
| A2.4 접합부에서 펠티어 계수 π 를 제벡 계수 α , 접합부의 온도 T 를 이용하여 표현하시오. | 0.5 점 |

A3. 열전 발전기 (Thermoelectric generator)

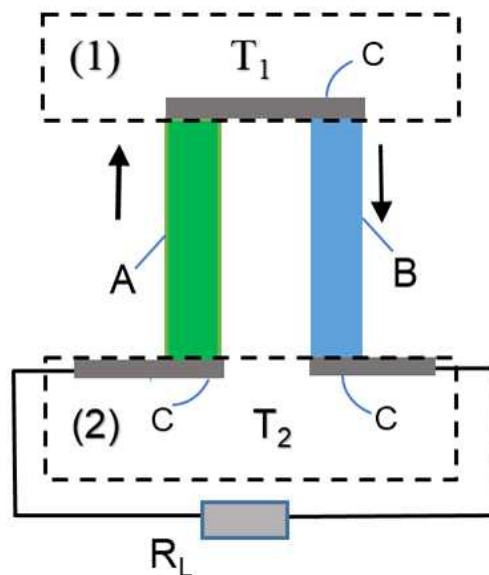


Figure 4. 열전 발전기 (1) 열원 (온도 T_1); (2) 방열체 (heat sink; 온도 T_2)

다음부터 펠티어 계수 π 는 모든 온도에 대해 αT 와 같다고 주어지며, 줄 열(Joule heat)은 여기에 포함되어 있다.

동일한 길이 L 의 전도성 막대 A 와 B 로 구성된 열전대는 그림(Fig 4.)과 같이 열전 발전기로 사용될 수 있다. 막대 A 와 B 의 매개 변수는 다음과 같다. 단면적 S_A, S_B , 비저항 ρ_A, ρ_B , 열 전도율 k_A, k_B . 막대 A 와 B 의 하단에는 저항 R_L 이 연결되어 있다. 열전대의 매개 변수들은 다음과 같다. 제벡 계수 α , 내부저항

$R = \frac{\rho_A L}{S_A} + \frac{\rho_B L}{S_B}$, 열 전도계수(thermal conductance) $K = \frac{k_A S_A}{L} + \frac{k_B S_B}{L}$. 열전대의 뜨거운 상단(차가운 하단)은 T_1 (하단은 T_2)로 유지되고, $T_1 > T_2$ 이다. 온도 T_1 인 열원에서 나오는 열(heat power)을 q_1 온도 T_2 인 방열체에서 전달되는 열을 q_2 로 나타낸다.

A3.1 열(heat power) q_1 , q_2 를 열전대의 매개변수 α , K , R 과 T_1 , T_2 , I 를 이용하여 나타내시오. 0.5 점

열전 발전기의 효율은 다음과 같이 정의할 수 있다. $\eta = \frac{P_L}{q_1}$, 여기에서 P_L 은 부하(load)의 전력을 의미한다. 부하와 열전대 내부 저항의 비율은 다음과 같다. $m = \frac{R_L}{R}$.

A3.2 효율 η 를 열전대의 매개변수 α , K , R 과 온도 T_1 , T_2 , 비율 m 을 이용하여 나타내시오. 0.75 점

열전 발전기의 효율을 결정하기 위해서는 다음과 같은 열전대의 특성들이 필요하다: 줄 발열을 최소화하기 위한 낮은 저항, 접합부에서 열을 유지하기 위한 낮은 열전도율, 높은 온도를 유지하는 gradient(matintained large temperature gradient). 이러한 특성들을 하나의 양으로 합쳐서 열전대의 성능 지수(figure-of-merit)이라고 하고, 다음과 같이 나타낼 수 있다. $Z = \frac{\alpha^2}{KR}$.

A3.3 효율 η 를 성능 지수 Z 와 이상적인 카르노 기관의 효율 $\eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, 비율 m 을 이용하여 나타내시오. 0.25 점

A4. 최대 효율 (The maximum efficiency)

열전대의 효율 η_P 은 부하의 전력이 최대인 $P_L = P_{\max}$ 일 때이다.

A4.1 η_P 를 성능 지수 Z 와 온도 T_1 , T_2 를 이용하여 나타내시오. 0.25 점

최대 효율은 $\eta = \eta_{\max}$ 을 되게 하는 비율 m 의 값을 M 이라고 하자.

A4.2 M 을 성능 지수 Z 와 온도 T_1 , T_2 를 이용하여 나타내시오. 0.75 점

A4.3 최대 효율 $\eta_{\max}$ 을 성능 지수 Z 와 온도 T_1 , T_2 그리고 M 을 이용하여 나타내시오. 0.25 점

A5. 최대 성능 지수 (The maximum figure of merit)

열전대의 성능 지수를 높이면 열전 발전기의 효율이 증가하게 된다. 실제로, 열전대의 성능 지수가 최대가 되게 $Z = Z_m$ 열전대의 단면적을 S_A , S_B 로 하자.

A5.1 열전대의 성능지수가 최대일 때, 단면적의 비 $\frac{S_A}{S_B}$ 를 ρ_A , ρ_B , k_A , k_B 를 이용하여 표현하시오. 0.5 점

A5.2 최대 성능 지수 Z_m 을 $\alpha, \rho_A, \rho_B, k_A, k_B$ 를 이용하여 표현하시오.

0.25 점

A6. 최적의 효율 (The optimum efficiency)

열전 발전기의 최적 효율 η_{opt} 는 부하에서의 전력과 성능 지수가 모두 최대일 때의 효율로 정의할 수 있다. 열원과 방열체의 온도는 각각 $T_1 = 423 \text{ K}$, $T_2 = 303 \text{ K}$ 로 각각 유지된다.

A6.1 table 1.에 주어진 매개 변수의 재료로 만들어진 열전 발전기의 η_{opt} 의 값을 구하여 이상적인 효율 η_c 의 값과 비교하시오.

0.5 점

A6.2 위의 재료로 만들어진 열전 발전기의 최대 효율 η_{max} 값을 구하시오.

0.25 점

B. 열전 냉각기 (Thermoelectric refrigerator)

문제 A3에서 주어진 매개 변수 α, K, R 을 가진 열전대는 Fig 5.와 같이 열전 냉각기로 사용할 수 있다.

B1. 냉각시킬 수 있는 능력과 최대 온도 차이

열전대의 상단은 초기 온도가 T_1 인 열원이다. 이는 분리되어 있고 단열이 되어 있으며, 냉각되어야 한다. 열전대의 하단은 온도 T_2 인 방열체 막대 A와 B가 전지와 연결되어 있다. 전류는 펄티어 열이 상단 접합부에서 흡수되어 하단 접합부의 방열체에서 방출될 수 있게 선택하였다.

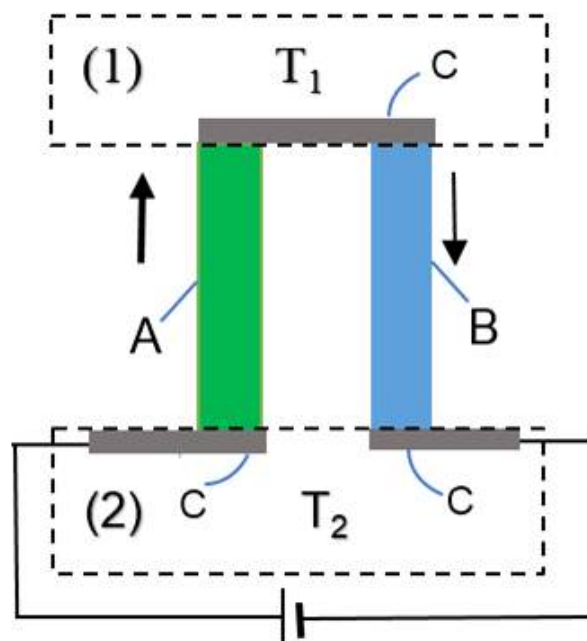


Fig 5. 열전 냉각기 (1) 격리된 열원 (온도 T_1); (2) 방열체 (온도 T_2)

B1.1 냉각시킬 수 있는 능력 q_C (열원에서 열전대 막대로 흐르는 열 전류)를 열전대의 변수 α, K, R 과 T_1, T_2, I 를 이용하여 구하시오. 0.25 점

B1.2 최대 온도 차이 $\Delta T_{\max} = T_2 - T_{1\min}$ 를 성능 계수 Z 와 분리된 열원의 최저 온도 $T_{1\min}$ 을 이용하여 구하시오. 0.5 점

B2. 작동 전류 (The working current)

최대 성능 지수 Z_m 의 값을 갖는 A와 B로 만들어진 열전대에서 A 부분이 냉각기에 사용이 된다.

B2.1 방열체의 온도 $T_2 = 300$ K일 때, 분리된 열원의 최저 온도 값 $T_{1\min}$ 의 값을 구하시오. 0.25 점

B2.2 열원의 온도가 $T_{1\min}$ 이고, 방열체의 온도 $T_2 = 300$ K일 때, 열전 냉각기의 작동하는 전류의 세기 I_w 를 구하시오. 단순화하여 단면적은 동일하게 $S_A = S_B = 10^{-4} \text{ m}^2$ 이다. 0.5 점

B3. 성능 계수 (The coefficient of performance)

온도 차가 최대 값인 $\Delta T_{\max}$ 보다 작으면, 성능 계수(the coefficient of performance) β 는 보통 열전 냉장고의 성능을 평가하는데 주로 사용된다. $\beta = \frac{q_C}{P}$. 여기에서 P 는 공급되는 전력(electrical power)이다.

B3.1 성능 계수 β 를 열전대의 매개 변수 α, K, R 와 T_1, T_2, I 를 이용하여 나타내시오. 0.5 점

성능 계수가 최댓값 $\beta_{\max}$ 일 때, 전류의 세기는 I_β 이다.

B3.2 I_β 를 열전대의 매개변수 α, Z, R 과 온도 T_1, T_2 를 이용하여 나타내시오. 0.25 점

B3.3 최대 성능 계수 $\beta_{\max}$ 를 표현하시오. 0.25 점