

이론

실리콘 양자 컴퓨팅을 위한 스핀 판독을 위한 RF 반사 측정법

소개

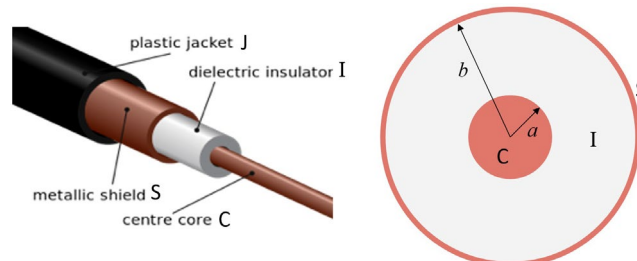
양자 컴퓨팅의 아이디어를 실용적인 기술로 발전시키는 것은 과학과 기술 분야에서 가장 큰 미해결 과제 중 하나입니다. 유망한 방법은 시간에 따른 전자기장으로 실리콘 트랜지스터의 개별 전자를 조작하는 것입니다.

이 문제에서는 무선 주파수(RF) 반사 측정법과 단일 전자 트랜지스터를 사용하여 실리콘 기반 양자 컴퓨터 프로토타입에서 양자 비트의 상태를 판독하는 방법을 조사합니다.

파트 A와 파트 B에서는 케이블과 전송선을 통한 전파 전송에 대해, 파트 C에서는 전파 반사의 조건에 대해, 파트 D에서는 단일 전자 트랜지스터에 대해, 파트 E와 F에서는 반사 측정 방법을 소개하고 최적화하는 문제를 출제합니다.

파트 A: 동축 송전선로의 덩어리 요소 모델(2.0 포인트)

DC 또는 저주파 신호를 모델링할 때 전압 펄스가 회로 전체에 순간적으로 이동한다고 가정하는 경우가 많습니다. 이러한 가정은 이러한 신호의 파장이 회로의 크기보다 훨씬 길 때 유효하지만 무선 주파수 신호로 작업할 때는 동역학이 더 복잡하고 모델에서 케이블의 고유 커패시턴스 및 인덕턴스를 고려해야 합니다. 구리의 작은 저항과 유전체를 통과하는 작은 컨덕턴스를 무시하고 아래 설명된 대로 도파관 역할을 하는 동축 전송선을 모델링합니다. 문제 전체에서 동축 케이블에서 전기장과 자기장이 모든 곳에서 케이블 축에 수직이 되도록(소위 횡방향 전자기 모드) 전자파의 큰 파장 한계를 고려합니다.



동축 케이블 다이어그램 C-심체, I-전기 절연체, S-금속 차폐, J-플라스틱 재킷을 보여줍니다.

무시할 수 있는 저항, 무시할 수 있는 자기 투과성 및 반경 a 의 구리 내부 코어와 내부 반경 b 의 외부 동축 구리 차폐로 구성된 동축 케이블을 생각해 보겠습니다. 무차원 상대 유전율 ϵ_r 및 무차원 상대 투자율 μ_r 의 유전체가 층을 분리합니다. 동축 케이블을 통해 전자기 신호가 전파될 때 전자기 신호는 내부 코어와 외부 차폐 사이에 갇히게 됩니다.

A.1

동축 케이블에서 전자파는 어떤 속도로 전파되나요?

0.2pt

A.2 동축 케이블의 내부 코어의 길이 Δq 에 전하 Δq 가 있고 외부 차폐가 접지된 경우, 내부 코어와 차폐 사이의 영역에서 전기장을 구합니다.

0.2pt

이론

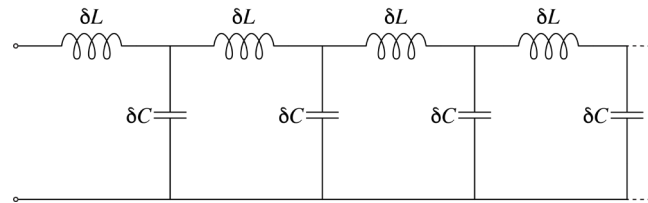
- A.3** 동축 케이블의 단위 길이당 커패시턴스(C_x)를 구합니다. 케이블의 길이 Δx 를 고려할 수 있습니다.

0.3pt

- A.4** 케이블의 단위 길이당 인덕턴스(L_x)를 구합니다.

0.3pt

케이블의 *덩어리 요소* 모델은 케이블의 짧은 섹션의 인덕턴스와 커패시턴스를 고려하여 구성됩니다. 인덕턴스는 내부 코어의 특성으로 가정하고 커패시턴스는 코어와 차폐를 연결합니다. 덩어리 요소 모델의 다이어그램은 아래와 같습니다.



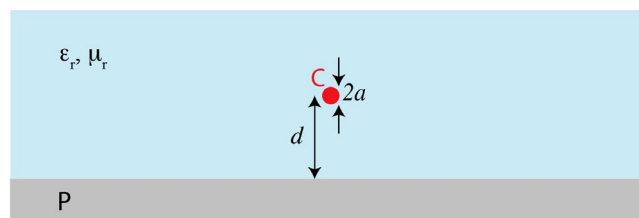
동축 케이블의 덩어리 요소 모델의 회로도.

- A.5** i. 반무한 길이의 케이블의 임피던스 $Z_{(0)} = Z_{(0)/C} = \sqrt{L_{xx}}$ 임을 나타냅니다. 케이블의 임피던스가 $Z_0 = 50 \Omega$ 이고 $\epsilon_r = 4.0$, $\mu_r = 1.0$ 의 유전체를 사용하여 만들어진 경우 b/a 를 구합니다.

1.0pt

파트 B: 접지면을 따라 복귀하는 가상의 송전선(1.0 점)

다른 가상의 전송 라인이 아래 그림에 나와 있습니다. 입력 신호는 전도성이 높은 접지면으로부터 $d \gg a$ 거리인 반경 a 의 매우 얇은 도체를 통해 전송됩니다. 도체를 둘러싼 물질은 무차원 상대 투자율 ϵ_r 과 무차원 상대 투자율 μ_r 을 갖습니다. 리턴 전류는 접지면을 따라 흐릅니다.



접지된 도체 평면인 P에서 $d \gg a$ 떨어진 거리에서 반경이 a 인 도체 C를 보여주는 가상의 전송선 다이어그램. 도체는 무차원 상대 투자율 ϵ_r 및 무차원 상대 유전율 μ_r 을 가진 재료에 내장되어 있습니다.

- B.1** 이 가상의 전송 라인의 특성 임피던스에 대한 식을 구합니다.

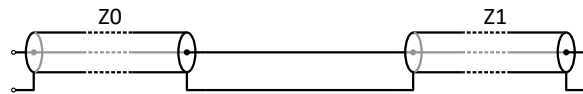
1.0pt

파트 C: RF 반사 측정의 기초(1.2 점)

전자파는 전송 라인에서 두 개의 반대 방향으로 전파될 수 있습니다. 각 전파 방향에 대해 특성 임피던스 Z_0 을 사용하여 옴의 법칙에서와 같이 전압 V_0 및 전류 I_0 진폭을 $Z_0 = V_0/I_0$ 로 연관시킬 수 있습니다.

이론

특성 임피던스가 Z_0 및 Z_1 인 두 전송 라인 사이의 인터페이스를 생각해 보세요. 회로의 개략도는 아래와 같습니다.



임피던스 Z_0 의 전송 라인이 임피던스 Z_1 의 전송 라인에 연결된 회로도. 인터페이스의 물리적 크기는 파장보다 훨씬 작습니다.

임피던스 Z_0 의 전송 라인으로 전송된 신호 V_i 가 인터페이스에 도달하면 두 번째 전송 라인으로 부분적으로 전송되어 해당 라인에서 신호 V_r 가 발생하고 이 신호는 앞으로 전파됩니다. 또한 신호의 일부가 반사되어 첫 번째 전송 라인 V_r 에서 역방향으로 전파되는 신호가 발생할 수도 있습니다.

C.1 인터페이스의 반사율 $\Gamma = V_r/V_i$ 를 구합니다.

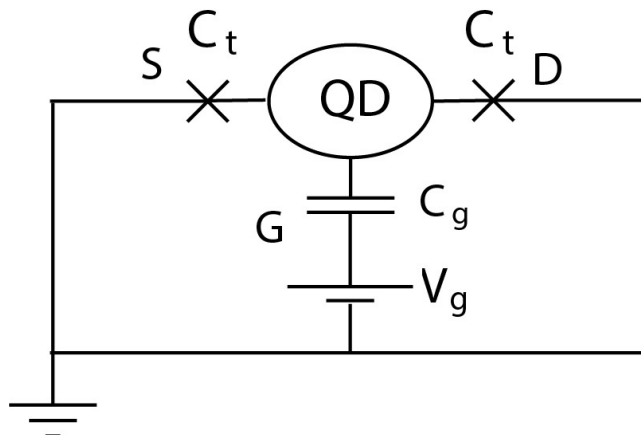
1.0pt

C.2 신호 V_i 가 반사 시 π 위상 변화를 얻기 위한 조건(들)을 서술하십시오.

0.2pt

파트 D: 단일 전자 트랜지스터(3.3 점)

단일 전자 트랜지스터(SET)는 전자를 국소화할 수 있는 작은 절연 전도체인 양자점과 그 주변에 있는 여러 전극으로 구성됩니다. 게이트 전극은 양자점에 정전식으로 결합하고, 다른 두 전극인 소스 및 드레인은 양자역학에 의해 전자가 터널을 통과할 수 있는 터널 접합을 통해 연결됩니다. SET의 단순화된 회로도가 그림에 나와 있습니다.



세트의 회로도 표현. QD는 쿼텀닷, S는 소스, D는 드레인, G는 게이트입니다.

게이트의 커패시턴스는 C_g 이고 터널 정션의 커패시턴스는 C_t 입니다. $C_t \ll C_g$ 을 양자점의 총 커패시턴스로 간주합니다. 이 문제에서 소스와 드레인은 제로 전위로 유지되고 게이트 전극의 전압은 V_g 으로 고정됩니다.

이론

- D.1** 양자점에 n 전자가 들어 있는 집합의 상태를 고려합니다. i. 양자점의 전위 ϕ_n 를 구합니다. 1.5pt
ii. 소스 또는 드레인에서 추가 전자를 QD 로 가져오는 데 필요한 에너지 ΔE_n 의 양을 구합니다.

$\Delta E_n < 0$ 이면 전자는 $\Delta E_n \geq 0$ 이 되는 수 $N > n$ 에 도달할 때까지 양자점 안으로 자발적으로 터널을 형성합니다. 전자의 평형 수 N 와 그에 상응하는 부가 에너지 ΔE_N 는 적절한 전압 V_g 을 선택함으로써 제어할 수 있습니다.

- D.2** 세트의 게이트 전압을 조정하여 얻을 수 있는 평형 덧셈 에너지의 최대 가능한 값 $E_c = \max \Delta E_N (V_g)$ 에 대한 식을 구합니다. 0.5pt

$\Delta E_N = 0$ 이면 전자의 터널링에 추가 에너지가 필요하지 않으며 SET 는 전도성이 높은 ON 상태가 됩니다. $\Delta E_N > 0$ 이면 SET 의 전도도가 감소합니다(고저항 OFF).

양자점의 전자 수가 잘 정의된 상태를 유지하려면 특정 조건이 충족되어야 합니다. 첫째, 소스 또는 드레인의 전자가 양자점 위로 자발적으로 이동하기에 충분한 열 에너지를 가지면 켜짐과 꺼짐 상태 사이의 대비가 사라집니다.

- D.3** 전자가 열 여기에 의해 양자점으로 이동할 수 없도록 전자의 온도에 대한 조건을 구합니다. 0.5pt

둘째, 양자점 위아래로 전자가 터널링되면 에너지 상태의 수명이 제한됩니다. 이 터널링은 터널 접합의 유효 저항과 접합을 통해 양자점을 충전 또는 방전하는 특징적인 터널링 시간을 사용하여 모델링할 수 있습니다.

- D.4** i. 터널 접합의 정전용량 C_t 및 유효 저항 R_t 측면에서 쿼텀닷의 터널링 시간을 추정합니다. 0.8pt
ii. 양자점의 전자가 켜짐과 꺼짐 상태를 구분할 수 있을 만큼 충분히 잘 정의된 에너지를 유지하도록 유효 저항 (R_t)의 조건을 구합니다.

파트 E: SET 상태를 판독하는 RF 반사 측정(1.0 포인트)

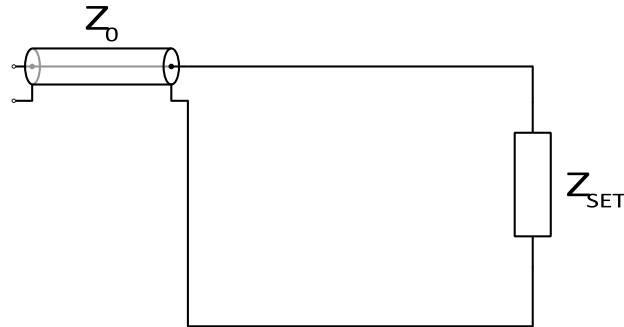
SET 의 상태는 양자 회로의 주변 요소(예: 양자 비트)에서 생성되는 전위에 민감하며, ON 과 OFF 상태를 구분하면 양자 컴퓨터에서 생성되는 정보를 읽어낼 수 있습니다. ON 상태의 SET 는 저항 $R_{ON} = 100k\Omega$ 으로 모델링할 수 있으며, OFF 상태에서는 SET 를 완전한 절연체로 가정할 수 있습니다(SET 를 통한 소스와 드레인 사이의 정전 용량 연결은 무시). 소스를 통한 입력 신호에 대한 응답을 측정하여 SET 의 상태를 확인할 수도 있지만, RF 반사 측정을 사용하여 반사된 신호의 진폭과 위상을 모두 측정하여 반사율 Γ 을 결정하는 것이 더 빠릅니다.

켜짐과 꺼짐 상태 사이의 세트 전환으로 인한 반사율의 변화는 다음과 같습니다.

$$\delta\gamma = |\gamma_{\text{켜짐}} - \gamma_{\text{꺼짐}}|, \quad (1)$$

여기서 Γ_{ON} 및 Γ_{OFF} 는 두 가지 상태의 반사율을 나타냅니다.

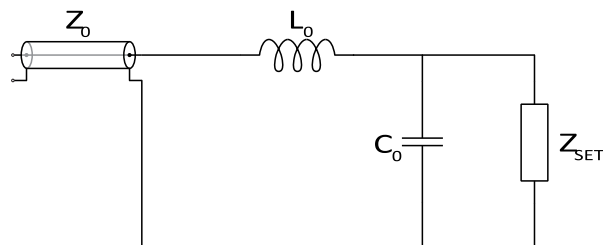
이론



임피던스 Z_0 의 전송 케이블이 세트에 연결된 회로도.

- E.1** 임피던스가 50Ω 인 동축 케이블에 연결된 일반적인 SET의 전도성 상태와 절연 상태 사이의 반사율 $\Delta\Gamma$ 의 변화를 구합니다. 0.2pt

반사율의 변화를 증가시키고 RF 반사 측정의 감도를 높이기 위해 인덕터를 포함시켜 회로를 수정합니다. 디바이스 지오메트리로 인한 고유 커패시턴스 $C_{(0)} \approx 0.4\text{pF}$ 도 고려됩니다. RF 반사 측정은 각도 주파수 ω_{rf} 의 신호를 사용하여 수행됩니다.



수정된 SET 회로.

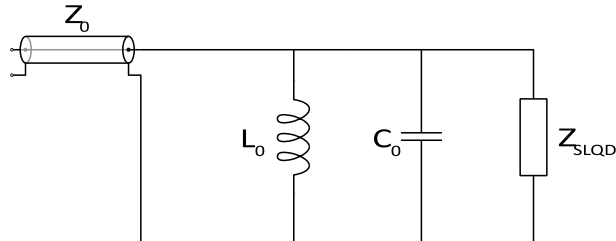
- E.2** 1의 차수에서 반사의 변화를 초래할 수 있는 인덕턴스 L_0 의 값을 추정합니다. 0.8pt
 $\omega_{rf}/(2\pi) = 100\text{MHz}$ 에 대해 L_0 에 대한 추정치를 수치적으로 계산하고 해당 $\Delta\Gamma$ 를 계산합니다.

파트 F: 단일 리드 퀀텀닷을 사용한 전하 감지(1.5 포인트)

확장 가능한 양자 컴퓨팅 아키텍처를 위해서는 각 개별 양자 비트에 도달하는 전선의 수를 최소화해야 합니다. 실리콘 양자 컴퓨팅에서 전하 감지를 위한 SET의 유망한 대안은 단일 리드 양자점(SLQD)입니다. 여러 면에서 SET와 유사하지만 소스 및 드레인 리드가 없습니다. 게이트는 양자점의 전자 에너지 상태를 제어하고 RF 반사 측정이 수행되는 유일한 전극입니다.

세트와 마찬가지로 SLQD는 전체 절연체처럼 작동하는 OFF 상태가 있습니다. 세트와 달리 SLQD의 ON 상태는 정전 용량 $C_{(q)}_{\text{on}}$ 갖는 정전 용량성입니다. SLQD의 반사율 $\Delta\Gamma$ 의 차이를 최대화하기 위해 다음과 같은 회로가 구성됩니다. 기생 커패시턴스 $C_{(0)} \approx 0.4\text{pF}$ 는 회로 형상에 의해 고정되지만 L_0 의 값과 작동 주파수를 변경하여 성능을 최적화할 수 있습니다. 전송 라인의 특성 임피던스는 $Z_0 = 50\Omega$ 입니다.

이론



전송 라인에 연결된 SLQD 판독 회로의 회로도.

F.1 주어진 C_0 및 C_q 에 대해 $\Delta \Gamma \sim 1$ 을 허용하는 $\omega_{(rf)}$ 및 $Z_C = \sqrt{L_0 / C_0}$ 을 제안합니다. 1.0pt

L_0 의 최적 값은 상대적으로 크며 기술적으로 항상 실현 가능한 것은 아닙니다. 따라서 반사 측정 판독 회로의 감도를 개선하기 위해 다른 유형의 회로 소자가 필요할 수 있습니다.

F.2 L_0 (따라서 Z_C)이 고정되어 있다고 가정합니다. SLQD 판독 회로에서 추가 소자를 배치할 위치를 보여주는 회로도를 그리고 큰 인덕턴스 없이도 $\Delta \Gamma \sim 1$ 을 달성할 수 있도록 이 소자의 파라미터를 지정합니다. 0.5pt

이론

활성 은하핵에서 나오는 X-선 제트

소개

활동성 은하핵(AGN)은 은하의 중심을 형성하는 초질량 블랙홀로, 방사선과 입자 흐름에서 많은 양의 에너지를 방출합니다. 많은 AGN의 특징 중 하나는 제트 방출이며, 이는 전파 방출을 통해 관찰할 수 있고 때로는 엑스레이를 포함한 전자기 스펙트럼의 다른 부분에서도 관찰할 수 있습니다. 이러한 제트는 수만 광년에 해당하는 10^{20}m 길이에 걸쳐 상대론적 속도로 흐르는 플라스마의 큰 흐름입니다. 제트에서 방출되는 엑스레이는 일반적으로 제트의 자기장에서 회전하는 상대론적 전자에서 나오는 싱크로트론 방출에 의해 지배됩니다.

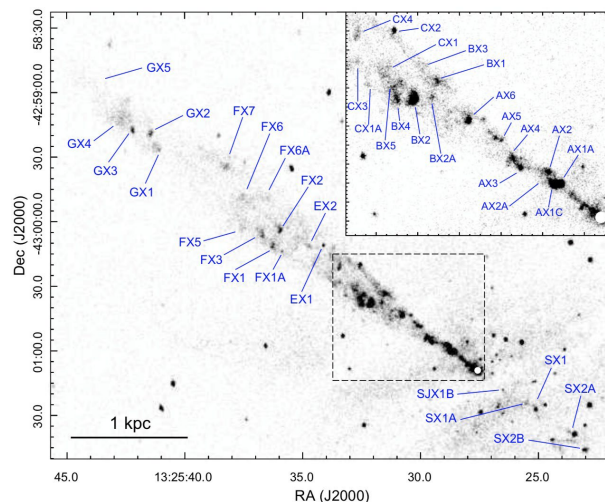


그림 1: 켄타우루스 A AGN에서 나온 제트의 X-선 이미지. 어두운 영역은 더 높은 강도의 엑스레이 영역을 나타냅니다. 희미한 제트 내에서 더 밝은 영역을 매듭이라고합니다. (Snios et al., 2019)

파트 A: 제트기의 1D 유체 모델

제트의 흐름에 대한 간단한 모델은 제트의 흐름이 안정적이고 중앙 AGN에서 방사상으로 향하고 있으며, 따라서 대략 1차원이며 제트 내의 플라스마가 주변과 압력 평형을 이루고 있다고 가정합니다. 별이 수명 주기를 통해 이동하면서 외층을 잃는 별에서 제트에 주입되는 질량 당 일정한 속도가 있다고 가정합니다. 제트는 AGN과의 거리를 나타내는 좌표 s 와 원뿔형 제트의 개구 반경 r 으로 설명됩니다. 이 거리는 파섹 단위로 측정되며, $1\text{pc} = 3.086 \times 10^{16}\text{m}$. 제트 흐름의 속도는 중앙 AGN에서 방사상으로 향하고 s 의 함수만 있다고 가정합니다. 제트의 플라스마는 전자, 양성자 및 일부 더 무거운 이온화된 핵으로 구성됩니다. 제트의 벌크 흐름 기준 프레임(제트 프레임이라고 부릅니다)에서 제트 내 각 입자가 운반하는 평균 에너지는 $\epsilon_{\text{av}} = \mu_{\text{pp}} c^2 + h$ 이며, 여기서 h 는 압력 측면에서 모든 열 운동 에너지와 위치 에너지를 포함하고 P 및 n 는 플라스마의 수 밀도입니다.

제트가 지나가는 별은 수명 주기를 거치면서 대기의 일부를 잃을 수 있습니다. 이로 인해 제트에 단위 부피당 질량(α)이 균일하게 주입되며, 주입된 입자는 AGN에 대해 정지 상태인 것으로 가정합니다.

이론

이 모델은 센타우루스 A 제트에 적용할 수 있습니다. 센타우루스 A는 가장 가까운 AGN 중 하나이므로 비교적 높은 공간 해상도로 제트를 관측할 수 있습니다. 제트에 의해 전달되는 총 전력은 $P_j = 1 \times 10^{36} \text{ J.s}^{-1}$ 로 추정됩니다. 일부 제트 파라미터의 측정값을 포함하여 Centaurus A 제트에 대한 간단한 기하학적 설명은 아래 다이어그램을 참조하세요. s_1 은 제트의 시작 좌표이고 s_2 는 제트의 끝 좌표입니다. 센타우루스 A에서 입자당 평균 질량은 $\mu_{pp} = 0.59 m_p$, $h = \frac{13}{4} P/n$ 이며, 제트를 둘러싼 플라즈마의 압력은 $P(s) = 5.7 \times 10^{-12} (s/s_0)^{-1.5} \text{ Pa}$, 여기서 $s_0 = 1 \text{ kpc}$ 입니다.

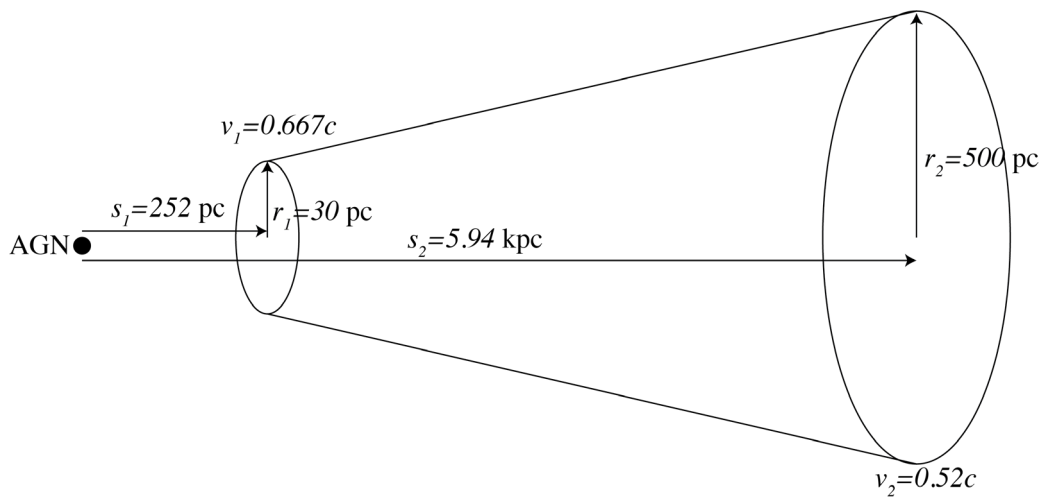


그림 2: 활동성 은하핵(AGN)과 비교한 기하학적 구조를 보여주는 센타우루스 A 제트기.

제트는 다음 매개변수로 설명되며, 모두 AGN과의 거리(s)에 따라 달라집니다:

- AGN 프레임에서 제트 $r(s)$ 의 개방 반경입니다.
- AGN 프레임에서 제트 $A(s)$ 의 단면적입니다.
- AGN 프레임에서 제트 $v(s)$ 의 속도입니다.
- AGN 프레임에서 제트 $\gamma(s)$ 의 로렌츠 감마 인자
- 제트 프레임의 수 밀도 $n(s)$ 입니다.

이러한 매개 변수는 A1-4에 대한 답변에 사용할 수 있습니다.

A.1

적절한 수 밀도, $n(s)$ 및 기타 제트 파라미터를 고려하여 AGN 프레임에서 입자의 수 밀도 $n'(s)$ 를 구합니다. 적절한 수 밀도는 제트 플라즈마 유출과 국부적으로 함께 움직이는 프레임의 수 밀도이며, 이를 제트 프레임이라고 부릅니다.

0.3pt

A.2 AGN으로부터 거리 s 에서 면적 A 의 제트 단면을 가로지르는 입자의 플럭스 $F_p(s)$ 를 구합니다.

0.2pt

이론

A.3 s_1 과 $s_{(2)}$ 의 제트 파라미터와 V 에서 제트 내 입자 플럭스와 제트 밖으로 나오는 입자 플럭스 사이의 연속성 관계를 작성하고, 센토러스 A 제트의 총 부피와 기타 필요한 파라미터를 구합니다. 0.5pt

A.4 s_1 과 s_2 의 제트 속도, 단면적 및 적절한 수 밀도, 제트의 부피, V , 그리고 센토러스 A 제트의 다른 필요한 매개 변수의 관점에서 제트로 들어오는 에너지 플럭스와 제트에서 나오는 에너지 플럭스의 관계를 작성하십시오. 0.6pt

제트에 의해 전달되는 전력은 총 벌크 운동 에너지 플럭스와 총 열 에너지 플럭스의 합으로 정의됩니다.

$$P_j(s) = F_E(s) - Mc^2 \quad (1)$$

여기서 $F_E(s)$ 는 s 에서 제트 단면을 통과하는 에너지 플럭스이고 M 는 AGN 과 같은 거리 s 에서 제트 단면을 통과하는 질량 플럭스입니다.

A.5 이전 파트의 답을 사용하여 $dP_{ds,j}$ 를 찾으세요. 0.6pt

A.6 질량 플럭스의 수치 값 $M_{(1)}$ 은 s_1 에서, 그리고 $M_{(2)}$ 는 s_2 에서 센타우루스 A 제트에서 나오는 질량 플럭스를 구합니다. 0.4pt

A.7 센타우루스 A 제트기의 총 운동량 플럭스 Π 에 대한 식을 구합니다. 또한 이 식을 수치적으로 평가합니다. 0.5pt

A.8 센토러스 A 제트기의 외부 압력으로 인한 총 힘, F_{Pr} 의 수치 값을 구하십시오. 0.5pt

A.9 Π 와 F_{Pr} 사이의 예상 관계를 작성하십시오. 또한 A7 에서 찾은 Π 의 모델 값과 예상 값 사이의 백분율 차이를 계산하세요. 0.2pt

파트 B: 초상대론적 전자의 기체

속도의 등방성 분포(방향에 의존하지 않음)를 가진 초상대론적 전자($\gamma \gg 1$)로 이루어진 기체를 생각해 봅시다. ϵ 와 $\epsilon + d\epsilon$ 사이의 에너지를 가진 입자의 적절한 수 밀도는 $f(\epsilon)d\epsilon$ 로 주어지며, 여기서 ϵ 는 입자당 에너지입니다. 기체와 접촉하는 면적 ΔA 의 벽도 생각해 보세요.

이론

B.1 전자 기체의 부피당 총 에너지에 대한 적분식을 씁니다. 0.2pt

B.2 벽과의 충돌로 인해 벽과 수직인 z 방향에서 기체의 운동량 $\Delta p(z)/\Delta t$ 의 총 변화율에 대한 식을 구합니다. 0.8pt

B.3 압력, 부피 및 총 내부 에너지와 관련된 초상대론적 전자 기체의 상태 방정식을 유도합니다. 0.6pt

B.4 단열 팽창을 하는 초 상대론적 전자 기체의 압력과 부피 사이의 관계를 도출합니다. 0.6pt

파트 C: 싱크로트론 방출

AGN 에서 나오는 제트에는 강한 자기장을 가진 영역에 에너지가 높은 전자가 모여 있습니다. 이것은 높은 플럭스의 싱크로트론 방사선을 방출할 수 있는 조건을 만듭니다. 전자는 종종 매우 에너지가 높기 때문에 $\gamma \gg 1$ 로 초상대론적이라고 설명할 수 있습니다.

C.1 로렌츠 계수 γ 를 가지며 자기장 B 에 대해 ϕ 의 각도로 이동하는 전자의 자전 각 주파수인 Ω 의 식을 구합니다. 0.7pt

자기장으로 인해 전자가 가속되면 전자기 복사를 방출합니다. 전자가 순간적으로 정지한 프레임에서는 방사선을 방출하는 데 선호하는 방향이 없습니다. 절반은 정방향으로, 절반은 역방향으로 방출됩니다. 그러나 관측자의 프레임에서 $\gamma \gg 1$ 의 초상대론적 속도로 움직이는 전자의 경우 방사선은 $\theta \lesssim 1/\gamma$ 의 전방 원뿔에 집중됩니다(따라서 원뿔의 총 각은 $2/\gamma$ 입니다). 전자가 자기장 주위를 돌고 있기 때문에 모든 관찰자는 순방향 원뿔이 가시선을 통과할 때 복사 펄스만 볼 수 있습니다.

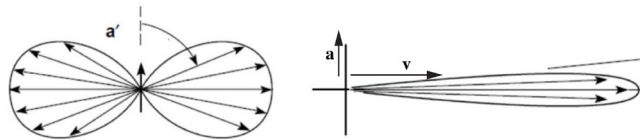


그림 3: 왼쪽의 다이어그램은 전자가 순간적으로 정지한 프레임에서 페이지 위로 가속하는 전자의 복사 전력 분포를 보여줍니다. 오른쪽 다이어그램은 관찰자 프레임에서 동일한 전자에 대한 방사선의 전력 분포를 보여 주며, 대부분의 방사선이 전방 원뿔에서 방출됩니다. 관찰자 프레임에서 전자의 가속도 방향은 $\mathbf{a}$ 라고 표시된 벡터로 표시되고 속도의 방향은 $\mathbf{v}$ 라고 표시된 벡터로 표시됩니다.

C.2 자기장에 대해 ϕ 의 각도로 이동하는 로렌츠 계수 γ 를 갖는 전자에서 관측된 싱크로트론 방사선의 펄스 지속 시간 Δt 를 구하십시오. 0.5pt

이론

C.3

따라서 싱크로트론 방사선의 특성 주파수 ν_{chr} 를 추정합니다. 0.3pt

방출되는 총 싱크로트론 전력은 다음과 같습니다.

$$P_s = 6\pi\epsilon_0 \gamma^4 B m^2 c^4 \sin^2 \phi \quad (2)$$

C.4

에너지가 있는 전자 E 가 싱크로트론 냉각을 통해 에너지를 잃는 시간(τ)을 추정합니다. 0.2pt

파트 D: AGN 제트에서 싱크로트론 방출

AGN 에서 나오는 제트의 전자 에너지 분포는 일반적으로 $f(\epsilon) = \kappa \epsilon^{-p}$ 형태의 힘의 법칙이며, 여기서 $f(\epsilon)d\epsilon$ 는 ϵ 과 $\epsilon + d\epsilon$ 사이의 에너지를 가진 입자의 수 밀도입니다. 싱크로트론 방출의 해당 스펙트럼은 개별 전자의 스펙트럼이 아니라 전자 에너지 분포에 따라 달라집니다. 이 스펙트럼은 다음과 같습니다.

$$j(\nu)d\nu \propto B^{(1+p)/2} \nu^{(1-p)/2} d\nu. \quad (3)$$

여기서 $j(\nu)d\nu$ 은 $\nu \sim \nu + d\nu$ 사이의 주파수를 가진 광자로 방출되는 단위 부피당 에너지입니다. 켄타우루스 A 제트 및 다른 제트의 관측은 매듭 구조와 함께 매듭이라고 불리는 더 밝은 방출 영역의 조밀한 구조를 보여줍니다. 서로 다른 시간에 이러한 매듭을 관측한 결과 일부 매듭의 움직임과 밝기 변화가 모두 관찰되었습니다. 밝기 감소의 두 가지 가능한 메커니즘은 매듭 속 가스의 단열 팽창과 매듭 속 가스의 전자가 싱크로트론으로 냉각되는 것입니다.

제트기 내 플라즈마의 자기장은 동결된 것으로 가정합니다. 임의의 부피의 플라즈마를 고려할 때, 플라즈마를 포함하는 부피가 모양과 크기가 변하더라도 플라즈마와 접하는 표면을 통과하는 자속은 일정하게 유지되어야 합니다.

D.1

0.4pt

의 부피에서 모든 방향으로 균일하게 확장되는 구형 매듭의 경우 $V_{(0)}$ 을 부피 V , 초기 균일한 자기장 B_0 확장된 매듭에서 자기장 B 을 구합니다.

D.2

1.0pt

전자 에너지 밀도 분포에서 구형 매듭을 부피 V 로 단열 팽창시킨 후의 전자 에너지 분포인 $f(\epsilon)$ 를 구합니다, 부피 $V_{(0)}$ 의 매듭이 전자의 초기 분포 $f_0(\epsilon) = \kappa_{(0)} \epsilon^{-p}$ 를 가지며, 여기서 $f_0(\epsilon)d\epsilon$ 는 ϵ 와 $\epsilon + d\epsilon$ 사이의 에너지를 가진 입자의 수 밀도입니다.

이론

D.3

0.3pt

싱크로트론 냉각은 전자의 분포에 어떤 영향을 미치나요? 전자가 싱크로트론 냉각을 받은 시간 간격 후, ϵ 의 함수로서 전자 에너지의 분포가 더 가파르게 될까요, 더 얇게 될까요, 아니면 그대로 유지될까요? 두 전자 에너지 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ 를 고려하여 방정식을 통해 답을 정당화하십시오.

아래 표는 두 개의 AGN인 켄타우루스 A(Cen A)와 M87에서 관측된 제트의 매듭(밝은 영역)에 대한 몇 가지 관측 결과를 요약한 것입니다.

AGN	관측 사이의 시간	Knot	엑스레이의 밝기 변화	엑스레이의 스펙트럼 변화	다른 대역의 밝기 변화(예 UV, 광학)
Cen A	15 년	AX1C	-23%	변경 사항 없음	데이터 없음
Cen A	15 년	BX2	-15%	변경 사항 없음	데이터 없음
M87	5 년	HST-1	-73%	데이터 없음	변경 사항 없음
M87	5 년	매듭 A	-12%	데이터 없음	변경 사항 없음

(Snios 외, 2019a; 2019b. 데이터 출처)

D.4

0.6pt

답안지의 표에서 각 매듭에 대해 밝기 감소의 가능성이 더 높은 원인을 파악하고, 결론을 뒷받침하는 앞부분을 하나 이상 표시하세요.

팁 상단

파트 A(10.0 점)

팁 팬이는 회전하도록 설정하면 자연스럽게 뒤집힐 수 있는 특별한 종류의 팬이입니다. 팁 팬이를 잘린 반경 R 의 구체에 줄기를 추가하여 모델링할 수 있습니다. 이 구는 줄기를 통과하는 축을 중심으로 회전 대칭을 이루며, 수직에서 θ 각도를 이룹니다. 그림 1(a)에서 볼 수 있듯이, 질량 중심 C 은 대칭 축을 따라 기하학적 중심 O 에서 αR 만큼 오프셋되어 있습니다. 팁 상단은 A 지점에서 그것이 놓여 있는 표면과 접촉하며, 이 표면을 평면이라고 가정하고 바닥이라고 합니다. 특정 기하학적 제약 조건이 주어지고 처음에 충분히 빠르게 회전하면 팁 팬이는 기울어져 줄기가 점점 아래쪽을 향하게 되고, 줄기에서 회전하기 시작하여 결국 멈추게 됩니다.

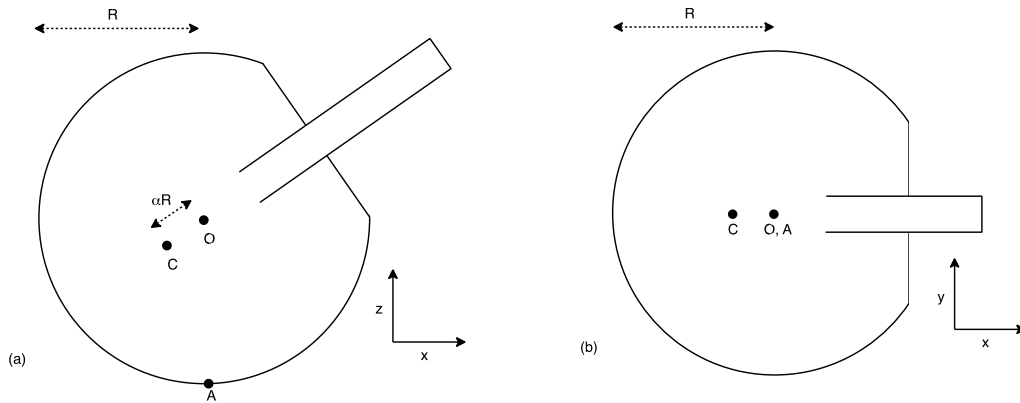


그림 1. Tippe 상단 (a)는 측면에서, (b)는 위에서 본 모습입니다.

xyz 을 회전 기준 프레임으로 하여 z 이 고정되어 있고 위쪽의 대칭축이 xz -평면 내에 있도록 정의합니다. 그림 1 에는 팁 상단의 측면과 위에서 본 두 가지 보기가 나와 있습니다. 그림 1(b)에서 보듯이 위에서 보면 상단의 대칭축은 x -축과 정렬됩니다.

그림 2 는 회전이 시작된 후 여러 단계에 걸친 상단의 움직임을 보여줍니다:

- (a) **1 단계:** $\theta \sim 0$ 으로 초기 설정된 회전 직후
- (b) **2 단계:** 곧 $0 < \theta < \pi/2$ 로 기울어짐
- (c) **3 단계:** 줄기가 바닥에 처음 닿을 때 $\theta > \pi/2$
- (d) **4 단계:** 반전 후, 상단이 줄기에서 회전하고 있을 때 $\theta \sim \pi$
- (e) **5 단계:** 최종 상태로, 줄기에서 쉬고 있을 때 $\theta = \pi$

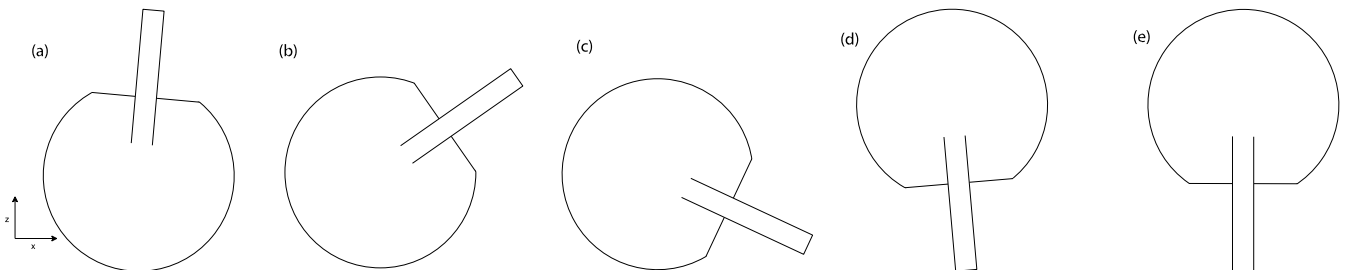


그림 2. xz - 평면에 표시된 팁 상단 모션의 1 단계부터 5 단계까지의 단계

XYZ 을 관성 프레임으로 하고, 상단이 있는 표면이 완전히 XY -평면에 있다고 가정합니다. xyz 프레임은 위와 같이 정의되고 XYZ 에서 Z 축을 중심으로 회전하여 ϕ 에 도달합니다. XYZ 프레임에서 xyz 프레임으로의 변환은 그림 3(a)에 나와 있습니다. 특히, $\hat{z} = \hat{Z}$.

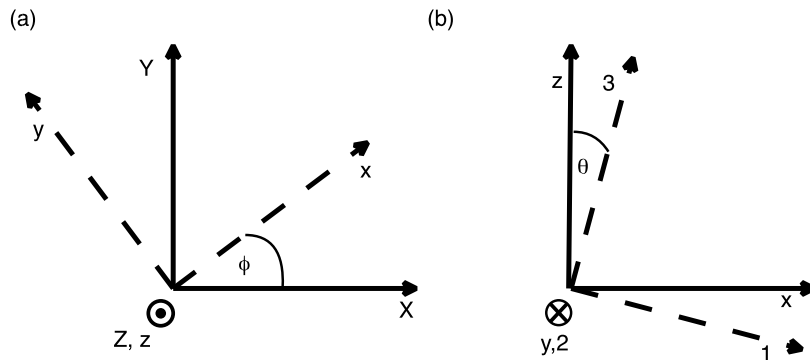


그림 3. 참조 프레임 간 변환: (a) XYZ 에서 xyz 로, (b) 에서 123 으로 변환 xyz

3 차원 공간에서의 모든 회전 운동은 세 가지 오일러 각도(θ, ϕ, ψ)로 설명할 수 있습니다. 관성 프레임 XYZ , 중간 프레임 xyz , 상단의 프레임 123 사이의 변환은 이러한 오일러 각의 관점에서 이해할 수 있습니다.

팁 꼭대기의 움직임에 대한 설명에서 θ 및 ϕ 각도는 각각 구형 극좌표의 표준 천정 및 방위각입니다. XYZ 프레임에서는 다음과 같이 정의됩니다. θ 은 수직 Z -축으로부터 상단의 대칭축의 각도로, 상단의 줄기가 수직으로부터 얼마나 멀리 떨어져 있는지를 나타내고, ϕ 은 Z -축에 대한 상단의 각도 위치를 나타내며, XZ -평면과 점 O, A, C 를 통과하는 평면 사이의 각도(즉, 상단의 대칭축의 수직 투영)로 정의됩니다.

세 번째 오일러 각도 ψ 는 자체 대칭축을 중심으로 상단의 회전, 즉 각속도 ψ 를 갖는 '스핀'을 설명합니다.

팽이의 기준 프레임은 새로운 회전 프레임(123)으로 정의되며, y 를 중심으로 xyz 를 θ 회전하여 도달합니다: $\hat{z}$ 축을 θ 만큼 아래로 '기울여' 팽이의 대칭축 $\hat{3}$ 을 충족시킵니다. xyz 프레임에서 123 프레임으로의 변환은 그림 3(b)에 나와 있습니다. 특히, $\hat{2} = \hat{y}$.

참고: 각속도 ω 로 관성 프레임 K 에서 회전하는 기준 프레임 $\hat{K}$ 의 경우, 두 프레임 K 와 $\hat{K}$ 내 벡터 A 의 시간 도함수는 다음을 통해 연관됩니다:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_K = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\hat{K}} + \omega \times A \quad (1)$$

팁 꼭대기의 움직임은 세 가지 오일러 각의 시간 변화, 병진 속도(또는 위치), 꼭대기의 대칭축의 움직임 등 복잡하게 얽혀 있습니다. 이 모든 매개변수는 서로 연결되어 있습니다. 팁 팽이의 움직임을 풀려면 뉴턴의 법칙을 포함한 표준 도구를 사용하여 방정식 체계를 준비한 다음 시뮬레이션을 통해 컴퓨터를 프로그래밍하여 수치적으로 풀어야 합니다.

이 문제에서는 이 과정의 첫 번째 부분을 수행하여 방정식 체계를 설정하기 위해 티프 탑의 물리학을 조사합니다.

팁 상단과 팁이 움직이는 표면 사이의 마찰이 팁 상단의 움직임을 주도합니다. 스템이 바닥에 닿을 때까지 팁 상단이 A 지점에서 바닥과 접촉한 상태로 유지된다고 가정합니다. 바닥에 대한 속도 $\mathbf{v}_A$ 로 지점 A 에서 움직이고 있습니다. 상단과 바닥 사이의 마찰 계수 μ_k 는 운동 계수이며, $|\mathbf{F}(t)| = \mu_k N$ 에서 $\mathbf{F}_f = F_{f,x}\hat{x} + F_{f,y}\hat{y}$ 는 마찰력이고 N 은 일반 힘의 크기입니다. 상단이 처음에 회전만 하도록 설정되어 있다고 가정합니다. 즉, 상단에 병진 임펄스가 주어지지 않는다고 가정합니다.

팁 상단의 질량을 m 으로 설정합니다. 그 관성 모멘트는 다음과 같습니다: I_3 대칭축에 대한 관성 모멘트는 $I_1 = I_2$ 상호 수직인 주축에 대한 관성 모멘트는 다음과 같습니다. 는 질량 중심의 위치 벡터이고 $\vec{r}_{CA}$ 는 질량 중심에서 접촉점까지의 벡터입니다.

달리 명시되지 않는 한, 만점을 받으려면 xyz 참조 프레임에 답하십시오. 모든 토크와 각운동량은 달리 명시되지 않는 한 질량 중심 C 을 기준으로 고려합니다. 에 N 을 기준으로 답할 수 있습니다. 파트 **A.8** 을 제외하고, $\theta < \pi/2$ 가 있는 상단만 고려하고 스템이 바닥에 닿지 않은 상태여야 합니다.

A.1 팁 꼭대기에 가해지는 총 외력 $\mathbf{F}_{(ext)}$ 을 구합니다. xz - 및 xy - 평면에 각각 투영된 상단의 자유 몸체 다이어그램을 그립니다. xy - 평면의 다이어그램에 제공된 공간에 $\mathbf{v}_A$ 의 방향을 표시합니다. 1pt

A.2 질량 중심에 대한 팁 상단의 총 외부 토크 $\tau_{(ext)}$ 을 구합니다. 0.8pt

A.3 접촉 조건, 즉 $(\mathbf{s} + \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ 이 주어졌을 때, A 의 속도는 z -방향에 성분이 없음을 보여줍니다. 즉, $\mathbf{v} \times \mathbf{y}_A = v_{\hat{x}}\hat{x} + v_{\hat{y}}\hat{y}$ 를 쓸 수 있습니다. 0.4pt

A.4 오일러 각의 시간 미분으로 질량 중심에 대한 회전하는 꼭대기의 총 각속도 ω 를 C 구합니다: $\theta = \frac{d\theta}{dt}$, $\phi = \frac{d\phi}{dt}$, $\psi = \frac{d\psi}{dt}$ 을 구합니다. 도움이 된다면 그림 3 을 활용하세요. xyz 프레임과 123 프레임에 답을 기입하세요. 0.8pt

A.5 회전하는 팽이의 총 에너지를 오일러 각의 시간 미분으로, $v_x v_y$ 에서 구하십시오. 부분 점수의 경우, 답은 $\frac{d}{dt} \mathbf{s}$ 로 남길 수 있습니다. 1pt

A.6 z -축에 대한 각 운동량의 변화율을 구합니다. 0.4pt

A.7 중력에 대항하여 작용하는 힘은 무엇입니까? 상단 에너지의 순간적인 변화율에 대한 식을 구하십시오. **A.5** 의 에너지 용어에서 변화를 일으키는 힘과 토크의 구성 요소를 식별하고 식별하십시오. 1.4pt

A.8 그림 2 에 표시된 5 단계 1 에서 **V** 까지의 상단의 운동에 대해 총 에너지 E_T , 중력 위치 에너지 U_G , 병진 운동 에너지 K_T , 회전 운동 에너지 K_R 와 같은 에너지 항을 시간의 함수로 답안지에 정성적으로 스케치하십시오. 스케치의 에너지 축은 스케일링할 필요가 없습니다. 2pt

A.9 $\hat{\mathbf{z}}$ 방향에 수직인 각운동량 $\mathbf{L}$ 과 각속도 ω 의 성분이 비례한다는 것을 보여줍니다. 0.5pt

$$\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{z}} = k(\omega \times \hat{\mathbf{z}}), \quad (2)$$

를 입력하고 비례 상수 k 를 구합니다.

문제 1 과 2 의 답과 후속 결과를 결합하면 정상 힘의 크기 N 와 오일러 각, 속도의 성분 v_x 과 v_y 을 나타내는 방정식 시스템 A , 대칭 **3 축의** 단위 벡터 , 그리고 그 시간 도함수를 구할 수 있습니다. 이 시스템은 적분할 수 없지만 대신 수치적으로 풀 수 있습니다.

운동 적분은 일정하게 유지되는 양으로, 시스템의 차원(즉, 해석적으로든 수치적으로든 풀어야 하는 동시 방정식의 수)을 줄일 수 있습니다. 일반적으로 에너지, 운동량, 각운동량과 같은 양은 닫힌 시스템에서 보존되며 문제를 상당히 단순화합니다.

A.10

1.7pt

보시다시피, 소산력과 외부 토크로 인해 티프 탑에는 에너지나 각운동량이 보존되지 않습니다. 그러나 보존되는 각운동량의 구성 요소, 즉 $L_\lambda = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ 가 시간에 따라 일정하도록 하는 일부 벡터 $\mathbf{v}$ 를 나타내는 쥘렛 적분 λ 으로 알려진 관련 양이 있습니다.

팁 꼭대기에 대한 이해와 지금까지 찾은 결과를 사용하여 이러한 벡터 $\mathbf{v}$ 에 대한 식을 구합니다. λ 의 시간 도함수가 0 임을 나타냅니다.