

## 이론

### 물 망치 효과

#### 소개

이 문제는 유체 파이프의 압력 파동으로 인한 유체 압력의 변화를 연구합니다. 제안된 문제는 주로 파이프의 유량 제어 밸브가 빠르고 느리게 닫힐 때 발생하는 워터 해머 효과를 다룹니다.

우리는 본질적으로 1 차원적인 비점성 액체와 액체 흐름만을 고려합니다. 밸브를 포함한 모든 파이프는 단단한 것으로 가정하지만 액체는 항상 비압축성으로 간주되지 않습니다. 압력 하에서 평형 상태인 부피  $V_0$ 의 액체 요소  $P_0$ 가 압력 변화를 받는 경우

$\Delta P$ , 그 부피  $\Delta V$ 의 변화는  $\Delta P$ 에 비례한다고 가정하여 다음과 같이 계산합니다.

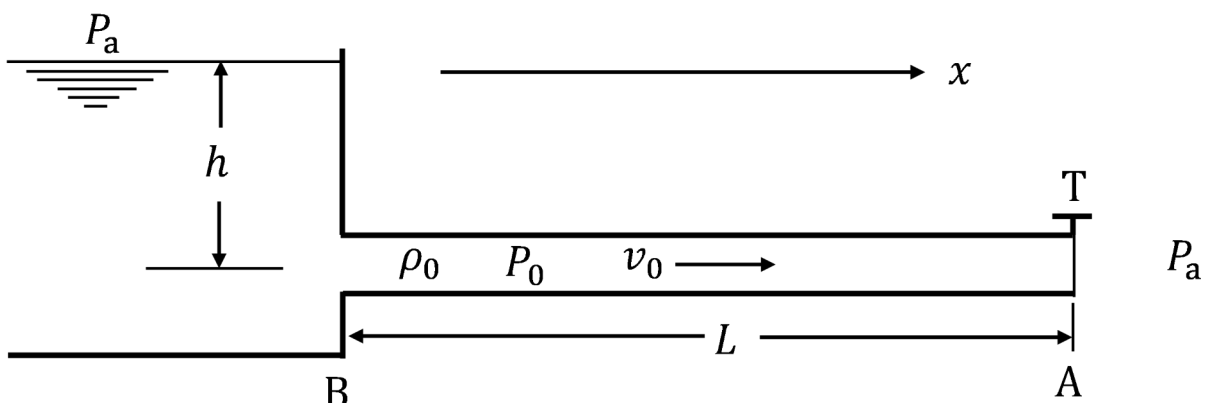
$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_0} \quad (1)$$

비례 상수  $B$ 는 액체의 부피 계수를 나타냅니다. 물의 경우  $\rho_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 을 평형 밀도,  $B = 2.2 \text{ GPa}$ 로 간주합니다.

#### 파트 A. 초과 압력 및 압력 파의 전파(2.2 점)

길이  $L$ 의 균일한 원통형 파이프에서 물이 수평 속도  $v_0$ , 밀도  $\rho_0$ , 압력  $P_0$ 으로  $+x$  방향을 따라 일정하게 흐르고 있습니다. 그림 1과 같이 이 파이프는 깊이  $h$ 의 저수지에 연결되어 있으며  $P_a$ 의 압력으로 대기 중으로 개방됩니다.

그런 다음 파이프 끝에 있는 유량 제어 밸브 T를 즉시 닫아 밸브 옆으로 다가오는 액체 요소가 압력 변화  $\Delta P(s) \equiv P_1 - P_0$ 과 속도 변화  $\Delta v = v_{(1)} - v_{(0)}$ 를 모두 겪으며  $v_{(1)} \leq 0$ 이라고 가정해 보십시오. 이로 인해 초과 압력  $\Delta P(s)$ 의 종파가



전파 속도  $c$ 로  $-x$  방향으로 상류로 이동합니다.

그림 1: 균일한 파이프의 일정한 흐름.

- A.1** 초과 압력  $\Delta P(s)$ 는 속도 변화  $\Delta v$ 와  $\Delta P(s) = \alpha \rho_{(0)} c \Delta v$ 에 의해 관련됩니다. 전파 속도  $c$ 는  $c = \beta + \sqrt{\gamma B / \rho_{(0)}}$ 으로 주어집니다.  $\alpha, \beta, \gamma$ 을 찾습니다. 1.6pt

## 이론

A.2

0.6pt

$v_0 = 4.0 \text{ m/s}$ ,  $v_1 = 0$  인 물 흐름의 경우  $c$  및  $\Delta p(s)$ 의 값을 계산합니다.

### 파트 B. 유량 제어 밸브 모델(1.0 점)

그림 2는 제어 밸브 T와 이를 통과하는 액체 흐름의 모델을 보여줍니다. 밸브는 길이  $\Delta L$ , 내부 반경  $R$ 의 짧은 단면으로 파이프의 끝 A 근처로 간주됩니다. 원뿔 모양의 배출구에는 반경  $r$ 의 오리피스가 있으며  $P_a$ 의 압력으로 대기로 열립니다. 유출에 대한 중력의 영향은 무시해야 합니다.

액체는 비압축성이고 밸브 입구의 액체 요소는 속도  $v_{in}$ , 압력  $P_{in}$ , 밀도  $\rho_{(0)}$ 를 갖는 흐름이 일정한 것으로 간주합니다. 그림 2에서 흐름 선과 법선은 흐름 패턴을 시각화하기 위한 보조 용도로만 그려져 있습니다.

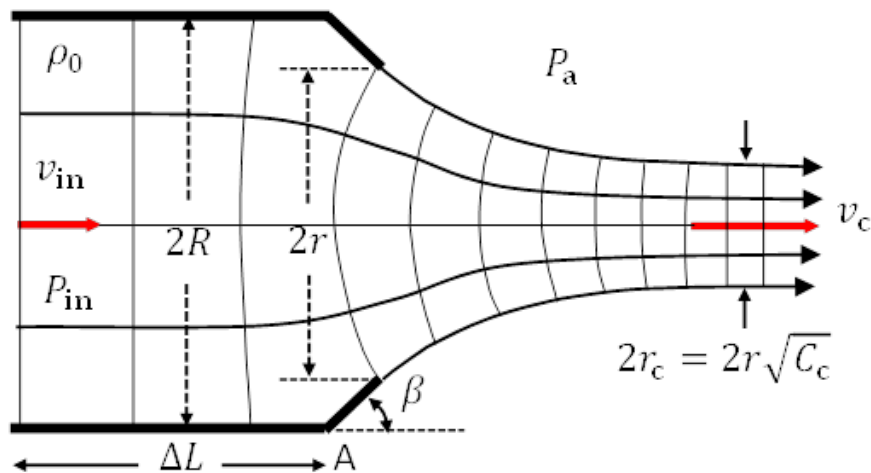


그림 2: 밸브 치수 및 제트 수축.

밸브를 대기 중으로 내보낸 후 흐름의 단면은 흐름 선이 다시 평행이 되는 최소값에 도달할 때까지 수축하는 것으로 알려져 있습니다. 이 최소 지점에서 유속은  $v_c$ 이고 흐름의 단면은 반경  $r_c = r C_c$ 를 갖습니다. 여기서 수축 계수라고 하는  $C_{(c)}$ 는 표 1에 표시된 대로  $r/R$  비율과 원뿔 각도  $\beta$ 에 따라 달라집니다.

| $r/R$ | $C_c(\beta = 45^\circ)$ | $C_c(\beta = 90^\circ)$ |
|-------|-------------------------|-------------------------|
| 0.00  | 0.746                   | 0.611                   |
| 0.20  | 0.747                   | 0.616                   |
| 0.30  | 0.748                   | 0.622                   |
| 0.40  | 0.749                   | 0.631                   |
| 1.00  | 1.000                   | 1.000                   |

표 1. 오리피스 수축 계수

## 이론

**B.1** 흐름선이 평행한 밸브 입구에서 초과 압력  $\Delta P_{(in)} = P_{in} - P_{(a)}$ 를 구하십시오.  $\rho_0, v_{in}, r, RC_c$ 로 답하십시오. **1.0pt**

파트 C와 파트 D의 모든 작업에 대해 그림 1의 저수지-파이프 시스템을 고려하고 다음과 같은 가정을 합니다:

- 액체의 전파 속도  $c$ 와 밀도  $\rho_0$ 은 유속과 무관한 상수로 주어집니다. 주변 대기압  $P_a$ 와 중력가속도  $g$ 는 일정합니다.
- 처음에는 밸브가 완전히 열려 있고 파이프의 흐름이 유체 압력  $P_0$ 과 속도로 일정합니다.  $v_0$ .
- 그림 1과 그림 2에서와 같이 파이프는 길이  $L$ 와 반경  $R$ 을 가집니다. 밸브는 각도  $\beta = 90^\circ$  및 길이  $\Delta L$ 를 갖는 가변 반경  $r$ 의 이원형 개방이므로 밸브 입구는 효과적으로 파이프의 끝 A에 있습니다. 유출량에 대한 중력의 영향은 무시할 수 있습니다.
- 저장소의 액체는 준정적이어서 파이프 입구 B 근처의 압력  $P_h$ 이 일정하게 유지되고 파이프 전체에 걸친 유체 압력의 변화가 무시할 수 있을 정도로 작아서 흐름이 1차원적이라고 가정합니다.
- 파트 B에 설명된 모델을 사용하여 밸브 입구에서 초과 압력  $\Delta P_{(in)} = P_{in} - P_{(a)}$ 를 결정할 수 있습니다.

### 파트 C. 유량 제어 밸브의 빠른 폐쇄로 인한 워터 해머 효과(1.8 점)

그림 1의 저장소-파이프 시스템을 참조하세요. 밸브가 완전히 또는 부분적으로 닫혀서 파이프의 액체 흐름이 막히면 압력 파가 상류로 이동하기 시작합니다. 이 압력파는 파이프의 저장소 끝에서 반사되어 다시 밸브로 이동하여 그곳에서 반사됩니다. 그러면 또 다른 압력 파가 생성되고 방금 설명한 과정이 반복됩니다. 이로 인해 밸브 옆의 액체 요소에 갑작스러운 압력 상승과 하강이 연속적으로 발생하며 이를 **워터 해머링**이라고 합니다.

**C.1** 그림 1 및 그림 2를 참조하십시오. 밸브 T가 완전히 열려 있을 때 파이프의 정상 유량의 압력  $P_0$ 과 유속  $v_{(0)}$ 을 구하십시오 ( $r = R$ ).  $\rho_0, g, h, P_a$ 의 관점에서 답을 제시하십시오. **0.6pt**

**C.2** 작업 C.1에서와 동일한 압력  $P_0$  및 유속  $v_0$ 의 일정한 유량을 고려합니다. 이제  $t = 0$ 에서 밸브는 즉시 닫힙니다 ( $r = 0$ ). 압력 파는 전파 속도  $c$ 로 저수지를 향해 향합니다.  $P_h = P_0 + \rho_0 g h$ 에 유의합니다.  $\tau = 2L/c$ 라고 합니다.  $t$ 이 각 순간  $\tau/2$ 와  $\tau$ 에 매우 가까워질 때 파이프의 유체 압력  $P(t)$ 과 유속  $v(t)$ 은 얼마인가요? **1.2pt**

**파트 D. 유량 제어 밸브의 느린 폐쇄로 인한 워터 해머 효과(5.0 점)** 작업 C.1에서와 동일한 일정한 유량  $P_0$  및 유속  $v_{(0)}$ 을 다시 고려합니다. 이제 밸브를 천천히 닫고 유한 단계 접근 방식을 채택하여 닫는 과정을 시뮬레이션합니다.

시간  $t = 0$ 에서 시작하여 밸브의 반경  $r$ 의 순간 감소(그림 2 참조)는 시간 간격  $\tau = 2L/c$ 로 순차적으로 수행됩니다. 반경의 각 순간 감소 직후 밸브 영역의 흐름은 파트 B에서와 같이 일정한 것으로 근사화됩니다. 그러면 밸브의 압력과 속도는 파이프의 나머지 흐름과 달라집니다.

## 이론

각 폐쇄 단계  $n$  의 지속 시간 및 밸브 개방 반경  $r_n$  은 밸브에서 해당 유체 압력  $P_n$  및 유속  $v_n$  을 나타내는 데 사용되는 기호와 함께 표 2 에 지정되어 있습니다.

| 마무리 단계의 비율 $/Rr_n$<br>단계 $n$ 시간<br>간격 $n$ | 밸브의<br>압력은<br>언제<br>$t = (n - 1)\tau$ | $t = (n - 1)\tau$ 일<br>때<br>밸브에서의<br>유속 |
|-------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------|
| $n = 0$ $t < 0$ 1.00                      | $P_0$                                 | $v_0$                                   |
| $0 \leq t < \tau$ 0.40                    | 1                                     | 1                                       |
| $\tau \leq t < 2\tau$                     | 2                                     | 2                                       |
| $P$                                       | $v$                                   |                                         |
| $P$                                       | $v$                                   |                                         |
| $P$                                       | $v$                                   |                                         |
| $2\tau \leq t < 3\tau$ 0.20               | 3                                     | 3                                       |
| $n = 4$ $3\tau \leq t < 4\tau$ 0.00       | $P_4$                                 | $v_4 = 0$                               |

표 2. 밸브 폐쇄 단계

유체 밀도  $\rho_0$  과 전파 속도  $c$  를 상수로 사용합니다.  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  로 합니다.  $\Delta P_n = P_n - P_0$  및  $\Delta v_n = v_n - v_{(0)}$  을 정의합니다. 근사치  $P_{(h)} = P_{(0)}$  을 적용합니다.

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |       |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>D.1</b> | $\Delta P_n / (\rho_0 c)$ 를 $\Delta P_{(n-1)} / (\rho_0 c), v_{(n-1)}, v_n$ 로 표현하는 방정식을 구합니다. 표 2 에 지정된 모든 단계 $n > 0$ 에 대해 유효해야 합니다. $n = 1, 2, 3$ 의 경우 $v_{(n-1)}$ 과 $v_n$ 를 모두 계산할 수 있는 방정식도 구합니다.<br>$\Delta P_{(n-1)} / (\rho_0 c)$ 는 알려져 있습니다.                                                                                                           | 3.0pt |
| <b>D.2</b> | 과제 D.1 의 결과를 $v_0 = 4.0$ m/s 의 물 흐름에 적용하십시오. 답안지에 제공된 그래프 용지를 사용하여 $\Delta P$ 대 $\rho_0 c v$ 의 모든 플롯을 만드십시오. $n = 1, 2, 3, 4$ 단계에 대해 $\rho_0 c v_n$ 및 $\Delta P_n$ 의 값을 나타내는 좌표를 갖는 점에서 교차하는 선과 곡선을 그려야 합니다. 그래프에서 각 교차점 $(\rho_0 c v_n, \Delta P_n)$ 에 해당되는 $n$ 의 값을 표시합니다. 그래프에서 $n = 1, 2, 3, 4$ 에 대한 $\rho_0 c v_n$ 및 $\Delta P_n$ (모두 MPa 단위)의 값을 추정합니다. | 2.0pt |



## 이론



## 레이 트레이싱 및 얇힌 빛 생성

유용한 공식입니다.

$$A \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

### 소개

$\vec{E}$  은 전기장,  $\vec{H}$  은 자기장,  $\vec{D}$  은 전기 변위,  $\vec{B}$  은 자기 유도를 나타냅니다.  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  이 있고  $\vec{P}$  은 매체의 편광,  $\epsilon_{(0)}$  은 자유 공간의 유전율입니다. 이 문제에서는 비자성 유전체 매체만 고려되므로  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$  은 자유 공간의 투자율입니다. 전자기장과 관련된 에너지 밀도와 에너지 흐름 밀도는 각각  $u_{em} = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$  및 포인팅의 벡터  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  로 주어집니다. 균질 유전체 매질에서 단색 평면파는 각 주파수  $\omega$ , 파동 벡터  $\vec{k}$ ,  $\vec{D}$   $\vec{B}$  로 설명할 수 있습니다. 맥스웰의 방정식에 따르면  $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$  과  $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$  이 있습니다. 이러한 파동의 경우 위치  $\vec{r}$  및 시간  $t$  을 갖는  $\vec{D}$  및  $\vec{B}$  의 변화는 위상  $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$  의 사인 함수에 의해 주어집니다.

### 파트 A. 등방성 유전체에서의 빛의 전파(1.0 점)

매질이 등방성인 경우  $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$  및  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  이 있으며  $\chi$  및  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$  는 각각 매질의 전기 감수성 및 유전율입니다. 이러한 매질에서 각 주파수  $\omega$  의 광파의 경우, 주어진 위상은 속도(위상 속도라고 함)  $v_p = c/n$  의 속도로  $\vec{k}$  방향으로 전파됩니다. 여기서  $c$  은 진공 상태에서의 빛의 속도이고  $n$  은 매질의 굴절률입니다. 광선을 사용하여 광파의 열차를 나타낼 수도 있습니다. 광선의 전파는 전자기 에너지 흐름의 방향과 속도  $\vec{v}_r$  에 의해 특징지어집니다.

균일한 등방성 유전체 매질에서 각 주파수  $\omega$  및 파동 벡터  $\vec{k}$  를 갖는 빛의 평면파를 고려합니다.

|            |                                                  |       |
|------------|--------------------------------------------------|-------|
| <b>A.1</b> | 위상 속도 $v_p$ 를 $\epsilon$ 및 $\mu_{(0)}$ 으로 표현합니다. | 0.4pt |
|------------|--------------------------------------------------|-------|

|            |                              |       |
|------------|------------------------------|-------|
| <b>A.2</b> | 파동의 유전체 매질의 굴절률 $n$ 은 얼마입니까? | 0.2pt |
|------------|------------------------------|-------|

|            |                                                                                 |       |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>A.3</b> | 전자기 에너지 흐름의 방향 $\vec{S} \equiv \vec{S}/S$ 와 전자기 에너지 흐름의 속도 $\vec{v}_r$ 는 무엇인가요? | 0.4pt |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------|-------|

### 파트 B. 단축 유전체 매질에서의 빛 전파(4.8 점)

이제 유전체 매질이 단축, 즉 매질에 고정된 특수한 방향, 즉 광축이라고 하는 방향을 따라 전기적으로 이방성이 있다고 가정합니다(현재 이를  $z$  방향이라고 부릅니다). 이러한 경우 변위  $\vec{D}$  와 전기장  $\vec{E}$  은  $D_x = \epsilon E_x, D_y = \epsilon E_y, D_z = \epsilon' E_z$  로 관련되며, 여기서  $x, y, z$  축은 상호 직교합니다. 결과적으로 광파의 위상 속도는 이방성이며  $\vec{k}$  와  $\vec{D}$  의 방향에 따라 추가로 달라집니다.  $n_o = c\sqrt{\epsilon_0\epsilon}$  과  $n_e = c\sqrt{\epsilon_0\epsilon'}$  이 다음 문제에 답하도록 하십시오: **B.1**, **B.2** 및 **B.3**.

|            |                                                                                                                                                                                                                                                    |       |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>B.1</b> | 단색 평면 광파의 파동 벡터 $\vec{k}$ 가 $xz$ 평면에 있어서 $k = k(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ 라고 가정합니다. 각 각도 $\theta$ 에서 $\vec{D}$ 과 $\vec{B}$ 의 어떤 방향이 광파에 허용될 수 있습니까? 가능한 모든 굴절률을 구하고 그 굴절률을 $\theta, n_o, n_e$ 로 표현합니다. 굴절률에 대해 하나의 값만 허용되는 각도 $\theta$ 를 구하세요. | 1.5pt |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                        |       |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>B.2</b> | 광파의 편광, 즉 전기장의 방향은 $xz$ 평면에 수직(보통파 또는 광선이라고 함)이거나 평행(특이한 파 또는 광선이라고 함)일 수 있습니다. <b>B.1</b> 에서 찾은 각 광파에 대해 편광을 단위 벡터로 지정하고 정상파 또는 특이한 파동인지 표시합니다. 또한 $\alpha$ 은 $\vec{E}$ 과 $\vec{D}$ 사이의 각도( $\vec{E}$ 에서 $\vec{D}$ 으로 시계 방향일 때 $\alpha$ 는 양수)인 $\tan \alpha$ 을 계산합니다. | 0.8pt |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|

## 이론

B.3

B.1 과 B.2 의 결과를  $k^*$  와 양의  $z$  방향 사이의 각도가 여전히  $\theta$  이지만  $k^*$  이  $xz$  평면에 없는 일반적인 경우로 확장합니다. 굴절률의 가능한 모든 값과 그에 해당하는 편광을 구합니다.

0.6pt

단축 매질에서 광파의  $k^*$  의 방향은 광선의 방향과 다를 수 있습니다. 파동의 위상 속도는 여전히  $c/n$ 로 주어지며  $n k^*$  을 따라 굴절률이고 광선 속도는 에너지 흐름의 방향과 속도에 의해 함께 정의됩니다.

B.4

문제 B.1-3 에 이어,  $k = k(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ 인 광파를 생각해 봅시다.  $k \equiv k/k^*$ 와 광선의 방향인  $S$  사이의 각도를  $(\alpha_r, S$  에서  $k$  로 시계 방향으로 갈 때  $\alpha_r$  는 양수)라고 합니다. 광선의 탄  $\alpha_r$ , 속도  $v_r$  및  $S$  의 가능한 모든 값을 구합니다. 이 결과를 사용하여 광선 지수  $= c/v$  를,  $\hat{n}_s, \hat{x}, \hat{z}, \hat{n}_o$ , 및  $n_e$  으로 표현합니다.

0.8pt

그림 1 과 같이 1 로 표시된 등방성 매질과 2 로 표시된 이방성 매질 사이의 계면을 통해 A 에서 B 로 광선이 전파되는 것을 생각해 보겠습니다. 인터페이스는  $yz$  평면과 일치하고 입사면은  $xz$  평면입니다. 입사각은  $\theta_1$  로 합니다. 매체 1 의 굴절률은  $n$  이고, 축  $z_2, y_2, x_2$  에 대한 매체 2 의 굴절률은 각각  $n_e, n_o, n_o$  입니다. 여기서  $y_2$  축은  $y$  축과 일치합니다. 페르마의 원리에 따르면 광선이 A 에서 B 로 이동하는 경로의 전파 시간은 최소입니다. 편광이  $xz$  평면에 평행하고  $\theta_1$  각도로 입사하는 빛의 경우 페르마의 원리는 다음 방정식으로 이어집니다:

$$A(\tan \theta_2)^{(2)} \tan + B \theta_2 + C = 0 \quad (1)$$

B.5

$P_1, P_2, P_3, n \sin \theta_1$ , 여기서  $P_1 = n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi, P_2 = n_o^2 \sin^2 \phi + n_e \cos^2 \phi$ , 그리고  $P_3 = (n_o^{(2)} - n_e^2) \sin \phi \cos \phi$  에서,  $\phi \overline{ABC}$  를, 찾습니다. 방정식 (1)에서 두 가지 특수 방향에 대응하는  $\tan \theta_{(2)}$ 를 구합니다:  $\phi = 0$  및  $\phi = \pi/2$ .

1.1pt

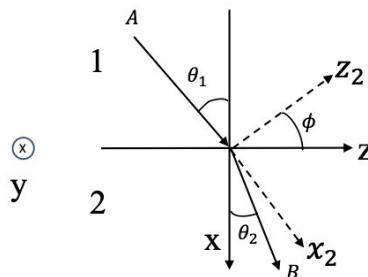


그림 1: 등방성 매체(1)와 이방성 매체(2) 사이의 인터페이스를 통해 A 에서 B 로 빛이 전파되는 모습.

## 파트 C. 빛의 얽힘(4.2 점)

비선형 매질에서,

전기장  $E^*$  은  $P_i = (\epsilon - \epsilon_{(0)})E$  에 의해 편광  $P^*$  과 관련됩니다.  $i +$

$$\sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k. \text{ 여기서, } i, j, k \text{ 는 각각 } x, y, z \text{ } \chi_{xyz}^{(2)} \text{ 는 상수입니다.}$$

는 매체의 2 차 비선형 감수성을 나타냅니다.  $\chi_{ijk}^{(2)}$  의 소실되지 않음은 광파가 비선형 매질을 통과할 때 두 개의 광파로 분리될 수 있음을 의미합니다.

## 이론

$\chi^{(2)}_{ijk}$  이 모두 0 이 아니므로 매질의 전기장은 각 주파수의 평면파,  $\omega_1, \omega_2$  의 중첩으로 구성되며, 각각 파동 벡터  $\vec{k}_1, \vec{k}_2$  로 전파된다고 가정합니다.  $\omega \geq \omega_2$  및  $\omega_1 \geq \omega_{(2)}$  를 가정합니다.

### C.1

0.8pt

이 각 주파수와 파동 벡터 사이의 가능한 모든 관계(위상 정합 조건이라고 함)를 구합니다. 빛을 광자로 구성된 것으로 볼 때, 이 조건들은 관련된 세 광자에 대해 어떤 종류의 보존 법칙을 의미합니까? 각주파수  $\omega$  와 파동 벡터  $\vec{k}$  를 가진 광자가 각주파수  $\omega_1$  과  $\omega_2$  의 두 광자로 분할되어 각각 파동 벡터  $\vec{k}_1$  과  $\vec{k}_2$  로 전파되는 경우에 대해 이러한 보존 법칙을 표현하는 방정식을 적으세요.

### C.2

0.8pt

일측 매질에서 빛의 파동을 생각해 봅시다. 보통 광선을 **o** 로, 특이한 광선을 **e** 로 나타냅니다. 광파의 분할 방법은 8 가지가 있습니다: **o**  $\rightarrow$  **o** + **o**, **o**  $\rightarrow$  **e** + **o**, **o**  $\rightarrow$  **o** + **e**, **o**  $\rightarrow$  **e** + **e**, **e**  $\rightarrow$  **o** + **o**, **e**  $\rightarrow$  **e** + **o**, **e**  $\rightarrow$  **o** + **e**, **e**  $\rightarrow$  **e** + **e**. 굴절률  $n_o$  와  $n_e$  가 모두  $\omega$  의 증가 함수라고 가정합니다. 문제 C.1 에서와 같은 파동 벡터의 표기를 사용하고 과 같은 표기를 사용하고  $\vec{k}_1, \vec{k}_2$  가 선형인 경우를 고려하여, 8 가지 분할 방법 중 어느 것이 불가능한지 나타내십시오.

굴절률  $n_e < n_o$  의 단축 매질에서 파동 벡터  $\vec{k}$  및  $\omega = \Omega_p$  을 가지고  $z'$  방향을 따라 이동하는 입사 광선을 고려합니다. 동선 분할 **e**  $\rightarrow$  **e** + **o** 에서 위상 정합 조건이  $k_{(1)} = K_e \omega_1 = \Omega$ ,  $k_{(2)} = K_o \omega_2 = \Omega_o$  로 실현된다고 가정합니다. 여기서 첨자 1 과 2 는 **e** 광선 및 **o** 광선을 나타냅니다.  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}$  은 모두  $z'$  방향을 가리킵니다. 그림 2(a)와 같이 매체의 광축(OA)은  $x'z'$  평면에 위치하며  $z'$  축과  $\theta < \pi/2$  의 각도를 이룹니다. 따라서  $n_e$  는  $\omega$  과  $\theta$  의 함수, 즉  $n_e = n_e(\omega, \theta)$  입니다. 파동 벡터가  $\vec{k}$  이고  $\omega = \Omega$  인 동일한 입사 **e** 광선의 경우  $p$ , 그림 2(b)와 같이 비선형 분할로 인해 후자의 두 광선이 분리되지만  $\omega_1 = \omega_2 = \Omega, k_1 = k_2$  로 두 원뿔에 남아 있다고 가정해 보겠습니다. 선형 분할에서  $\Omega_e$  은 이미  $\Omega_o$  에 가깝고 여기서  $\Omega$  은  $\Omega_e$  보다 약간 적습니다.  $\vec{k}$  에 수직인 평면에서  $\vec{k}_1$  및  $\vec{k}_2$  에 대한 원뿔의 두 원은  $a$  및  $b$  점에서  $y'$  축에 평행한  $ab$  선과 교차합니다. 그림 2(a)와 같이  $\vec{k}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) 는 광축과  $\theta_\alpha$  각을 이루며 각 좌표( $\psi_\alpha, \phi_\alpha$ )를 가지며  $\vec{k}_{\alpha\perp}$  는  $x'y'$  평면에서 투영됩니다.

각 벡터  $\vec{k}_\alpha$  는  $z'$  축에서 약간만 벗어나므로  $|(\Omega - \Omega_e)/\Omega_e| \ll 1, |k/k_{\alpha\perp}| \ll 1, |\theta_\alpha - \theta| \ll 1$  이 됩니다.  $\vec{k}_\alpha$  의  $z'$  성분을  $k_{\alpha\perp}^2$  의 조건과 일치하는 근사치를 사용합니다. 와  $(\theta_\alpha - \theta)^{(2)}$  에 대한 각도  $\theta_\alpha$  를 사용하면  $\vec{k}_{(2\perp)} = (q_x, q_y)$  는  $M(q_x + N)^2 + Mq_y^2 = L$  을 만족해야 함을 알 수 있습니다.

### C.3

1.3pt

$M > 0$  이라고 가정합니다.,  $MNL$  를  $\Omega, \Omega_e, \Omega, K_e K_o$  및  $N_e(\omega, \theta)$  로 평가합니다.

$-\epsilon(\omega, \theta) \frac{dn_e}{d\omega} \frac{d\theta}{d\omega}(\omega, \theta)$  및 그룹 속도  $u_o = \frac{d\omega}{dk_{22}}$  및  $u_e = \frac{d\omega}{dk_{11}}$  은 **o** 선과 **e** 선에 대한 속도입니다.

원뿔의 축과  $z'$  사이의 각도를 추정하고,  $LMN$  및  $K_o$  의 관점에서 원뿔의 각도도 추정합니다.

## 이론

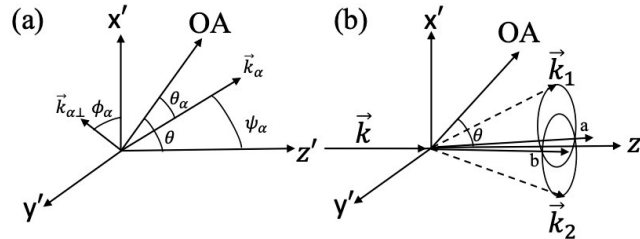


그림 2: (a) 벡터  $\vec{k}_\alpha$  는  $x'(y'z')$  좌표계에서 각도 좌표  $(\psi_\alpha, \phi_\alpha)$  를 가지며  $\vec{k}_{\alpha\perp}$  은  $x'(y')$  평면에 투영됩니다.  $\vec{k}_\alpha$  는  $OA$  로  $\theta_\alpha$  각도를 만듭니다. (b)  $e$  광선을 두 개의 원뿔을 형성하는  $e + o$  광선으로 비선형 분할. 선  $ab$  은  $y'$  축과 평행합니다.

문제 C.3 은 한 광자가 점  $a$  와  $b$  를 통과할 때 수직 방향으로 편광된 두 개의 광자로 분리될 수 있음을 보여줍니다.  $a$  ( $a$ -광자라고 함)를 통과하는 한 광자는  $x'$  방향으로 편광되어 있기 때문에 이 두 광자를 *얽힌 광자 쌍*이라고 합니다,  $b$  ( $b$ -광자라고 함)를 통과하는 다른 광자는  $y' \perp x'$  방향으로 편광되고,  $a$ -광자가  $ay'$  방향으로 편광되면  $b$  광자는  $x'$  방향으로 편광됩니다. 얽힌 광자 쌍 상태는 실험적으로 준비할 수 있습니다. 이는 위의 두 가지 대체 상태를 중첩한 것으로  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x'_a\rangle|y'_b\rangle + |y'_a\rangle|x'_b\rangle)$ 로 표현할 수 있습니다. 여기서  $|x'_a\rangle|y'_b\rangle$ 는  $a$ -광자가  $ax'$  방향으로 편광되고  $b$ -광자가  $by'$  방향으로 편광된 상태를 나타내며  $|y'_a\rangle|x'_b\rangle$ 에서도 비슷한 의미가 적용됩니다. 계수  $1/\sqrt{2}$   $a$ -광자 및  $b$ -광자의 전기장 진폭(적절한 단위로 표현)의 곱으로 볼 수 있습니다. 그림 3에 표시된 것처럼 두 개의 선형 편광판 1과 2는  $x'$ 에 대해 각각  $\alpha$  및  $\beta$  각도의 투과 축을 갖습니다. 이를 사용하여  $a$  과  $b$  을 통과하는 두 광자에 대한 우연 측정을 수행할 수 있습니다. 편광판 1과 2를 통과하는 두 광자가 동시에 발견될 확률을  $P(\alpha, \beta)$ 라고 합니다. 또는  $P(\alpha, \beta)$ 는 두 편광판을 통과하는 빛의 강도 곱(적절한 중첩 후)에 비례하는 것으로 간주할 수도 있습니다.  $\alpha + \pi/2$  및  $\beta + \pi/2$ 는 각각  $\alpha_\perp$  및  $\beta_\perp$ 으로 표시합니다.

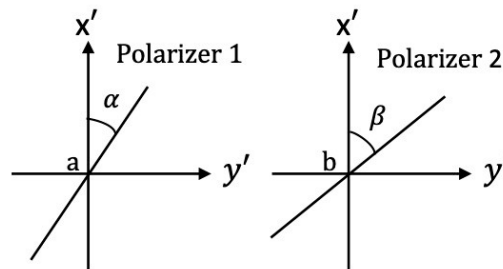


그림 3:  $a$  및 다음을 통과하는 광자의 우연 측정을 위한 두 개의 선형 편광기 1과 2

$b$ .

## 이론

**C.4** 선형 편광판에 의해 투영된 총 전기장을 고려합니다. 확률  
능력  $P(\alpha, \beta), P(\alpha, \beta_{\perp}), P(\alpha_{\perp}, \beta), P(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp})$ .

0.8pt

**C.5** 각도가  $\alpha$  인 편광판 1 이  $a$ -광자 및  $\sigma_a = -1$  을 찾으면  $\sigma_a = 1$  을 할당합니다. 각도가  $\alpha_{\perp}$  인 편광판 1 이  $a$ -광자를 찾을 때. 마찬가지로  $\sigma_{\beta} = 1$  또는  $-1$  은 각도가  $\beta$  또는  $\beta_{\perp}$  인 편광판 2 가  $b$ -광자를 찾을 때 할당됩니다.  $E(\alpha, \beta)$  가 다음을,  $\sigma_a = \sigma_b$  수량  $S = |E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta_{\perp})| + |E(\alpha_{\perp}, \beta) + E(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp})|$  입니다. 는 중요한 의미가 있습니다. 고전적인 빛의 이론은  $S \leq 2$ . 이것은 변형입니다. 형태의 벨 부등식(클라우저-호른-시모니-홀트 부등식)이 있습니다. 벨 부등식의 표현식  $S$  과  $\alpha = \frac{\pi}{4}, \alpha' = 0, \beta = -\frac{\pi}{8}, \beta' = \frac{\pi}{8}$  의 경우  $S$  을 평가합니다.

0.5pt

$S$ 이 기존 이론과 일치하는지 표시하세요.

## 이론

### 자기 부상

#### 유용한 정보

(1) 공간 함수  $f(\mathbf{r})$ 의 방향 도함수는  $\nabla f(\mathbf{r})$ 로 주어집니다.      는 다음과 같습니다.

$\nabla f \equiv (\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}) f(\mathbf{r})$ 에서  $\frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{r})$ 은  $y$  및  $z$  은 그대로 유지하면서  $x$  에 대한  $f(\mathbf{r})$ 의 부분 도함수를 나타냅니다.

(2) 통합:

$$\int_0^\infty dt [(a+pt)(2a+pt+(b+qt)^2)^{3/2} - bp-aq] = (2\sqrt{ab+b^2} - \sqrt{pq+q^2}).$$

#### 소개

우리는 전도성 박막 근처에서 작은 자기 쌍극자의 운동을 연구하고자 합니다. 문제 본문에서 쌍극자와 단극자라는 용어는 각각 자기 쌍극자 및 자기 단극자와 동의어로 간주해야 합니다.

자화  $\mathbf{M}$  (단위 부피당 자기 쌍극자 모멘트)와 질량 밀도  $\rho_{(0)}$ 가 균일한 구형 영구 자석으로 구성된 쌍극자는 반경  $R$  이 작을 때 점과 같은 물체로 취급할 수 있습니다. 이러한 쌍극자 표현은 쌍극자가 구 외부의 모든 곳에서 생성하는 자기장을 설명하는 데 유용합니다. 또한 이 표현은 쌍극자에서 자기장 소스의 거리가  $R$  보다 훨씬 클 때마다 적용된 자기장에서 쌍극자에 작용하는 힘에 대한 좋은 근사치입니다.

점과 같은 쌍극자는 각각 음전하와 양전하를 지닌 한 쌍의 단극자  $-q_m$  및  $q_m$ 로 간주할 수 있습니다. 이 쌍은 매우 작은 간격을 가지고 있지만 유한한 자기 쌍극자 모멘트  $\mathbf{m} = q_m \delta \mathbf{m}$  를 가집니다. 여기서  $\delta \mathbf{m}$  은 남쪽 단극( $-q_m$ )에서 북쪽 단극( $+q_m$ )으로의 변위 벡터입니다. 점 모양의 쌍극자의 위치는 북쪽 단극의 위치로 선택됩니다.

단극  $q_m$ 의 자기장  $\mathbf{B}^*_{(mp)}$ 은 다음과 같이 주어진 쿨롱 형태를 갖는다고 가정합니다.

$$\mathbf{B}^*_{MP} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{r}$  은  $q_m$ 에서 관측점(또는 필드점)까지의 변위 벡터,  $\hat{r}$  은 단위 벡터  $\hat{r} = \mathbf{r}/r$ ,  $\mu_{(0)}$ 은 자유 공간 투과성입니다. 적용된 자기장  $\mathbf{B}^*$ 이  $q_m$ 에 가하는 힘은  $\mathbf{F} = q_m \mathbf{B}^*$ 로 주어집니다. 방금 방정식(1)에서 설명한 단극자장의 개념을 확장하면 점 쌍극자의 자기장  $\mathbf{B}^*$  은  $\mathbf{B} = -\nabla \Phi$  형식으로 주어진 스칼라 전위  $\Phi$ 로부터 유도할 수 있습니다. 스칼라 전위  $\Phi$  는 자기 전위라고도 합니다.

전도성 박막은  $z$  방향의 두께  $d$  로 균일합니다(그림 1).  $x$  및  $y$  방향으로 무한대로 수평으로 뻗어 있으며, 상부 표면은 점 단극 또는 쌍극자에서  $h$  거리에 위치합니다. 여기서는  $h \gg d$ 의 경우만 고려합니다. 이를 통해 필름에 유도된 전류 밀도를  $z$  와 무관하다고 가정할 수 있습니다. 또한 변위 전류 효과는 무시할 수 있는 수준이라고 가정합니다.

## 이론

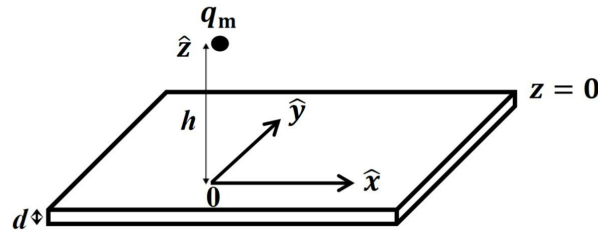


그림 1 두께  $d$ 의 전도성 박막으로부터  $h$ 의 거리에 단극  $q_{(m)}$ 이 나타납니다. 좌표의 원점은 위쪽 표면에 있습니다.

문제는 세 부분으로 나뉩니다. 파트 A에서는 시스템이 단극과 박막으로 구성되어 있고, 파트 B와 C에서는 움직이는 쌍극자와 박막으로 구성되어 있습니다.

박막의 윗면과 일치하도록  $z=0$  평면을 선택합니다.  $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y} = \rho\hat{\rho}$  벡터는 평면 내 위치 벡터를 나타냅니다.

### 파트 A. 자기 단극의 갑작스러운 출현: 박막에서 초기 응답 및 후속 응답의 시간 진화 (3.0 점)

먼저 그림 1과 같이  $t=0$  시점에 북쪽 단극  $q_{(m)}$ 이  $\vec{r}_{mp} = h\hat{z}$  ( $h > 0$ ) 위치에 갑자기 나타날 때 전도성 박막의 초기 응답에 초점을 맞추고자 합니다. 이후 모든 시간에서 모노폴은 고정된 상태로 유지됩니다( $t > 0$ ).

여기서 우리가 관심 있는 것은  $z \geq 0$  및  $z \leq -d$  영역에서의 초기 총 자기장  $B(\vec{\rho}, \vec{z})$ 과 박막의 유도 전류 밀도입니다. 총 자기장  $B = B_{mp} + B^{(i)}$ , 여기서 자기장  $B_{mp}$  및  $B^{(i)}$ 은 각각 박막의 단극과 유도 전류로 인한 것입니다. 우리가 참조하는 초기  $B(\vec{\rho}, \vec{z})$ 은  $t_0$  시점으로  $h/c \leq t_0 \ll \tau_c$  구간 내에 속합니다. 여기서  $\tau_c$ 는 박막의 후속 응답을 특징짓는 시간 상수이고  $c$ 은 진공 상태에서의 빛의 속도입니다. 이 문제에서는  $h/c \rightarrow 0$ 의 극한을 취하므로  $t_0 = 0$ 이 됩니다.

초기 총 자기장  $B(\vec{\rho}, \vec{z})$  ( $t_0 = 0$ 에서)의 계산은 이미지 모노폴을 도입하여 용이하게 할 수 있습니다.  $z \geq 0$  영역에서  $B(\vec{\rho}, \vec{z})$ 의 경우 이미지 모노폴은 자기 전하  $q_{(m)}$ 를 가지며  $z = -h$ 에 위치합니다. 반면,  $B(\vec{\rho}, \vec{z})$  영역의  $z \leq -d$ 에서 이미지 모노폴은 자기 전하  $-q_{(m)}$ 를 가지며  $z = h$ 에 위치합니다. 초기 응답

**A.1** 초기 총 자기장  $B(\vec{\rho}, \vec{z})$ 을 구합니다.  $z \geq 0$ 에서  $t_0 = 0$ 을 구합니다. 0.4pt

**A.2** 초기 총 자기장  $B(\vec{\rho}, \vec{z})$ 을 구합니다.  $z \leq -d$ 에서  $t_0 = 0$ 을 구합니다. 0.2pt

**A.3**  $z=0$ 에서 표면을 통과하는 초기 자속  $\Phi_{(B)}$ 를 구하고  $z=-d$ 에서 구합니다. 0.4pt

## 이론

**A.4** 전도성 박막에서 초기 유도 전류 밀도  $j(\rho)$ 를 구합니다.  
 $t_0 = 0$ 입니다.

전도성 박막에서 0.6pt

$t > 0$  인 경우, 총 자기장  $B \rightarrow$  은  $B(\rho, \vec{z}; t) = \vec{B}'_{(mp)}(\rho, \vec{z}) + B^{(i)}(\rho, \vec{z}; t)$ 가 되고, 박막의 유도 전류로 인해  $B^{(i)}(\rho, \vec{z}; t)$ 가 중첩되어  $B(\rho, \vec{z}; t)$ 가 됩니다.  $z = 0$  박막 표면 근처에서  $B_z'(\rho, z; t)$ 에 대한 방정식을 구하려면 아래가 필요합니다.  $B_z'$ 의 시간 진화 거동은  $t > 0$ 에서  $z \approx 0$  근처의  $B^{(i)}$  필드에 대한 설명을 위한 움직이는 이미지 모노폴 그림을 나타냅니다.

박막 내부의  $B_z'$ 에 대한 방정식은 다음과 같습니다,

$$\frac{\partial}{\partial z} B_z'(\rho, z; t) = \mu_0 \sigma \frac{\partial B_z'(\rho, z; t)}{\partial t} \quad (2)$$

이 방정식은 박막 내부에 맥스웰 방정식과 전도성 박막의 옴 거동( $j = \sigma E$ , 여기서  $\sigma$ 은 전기 전도도)을 적용하면서 변위-전류 효과를 무시하여 얻어진 방정식입니다. 식(2)의 왼쪽에서 무시되는 항은  $h \gg d$  조건에 따라  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial B_z'}{\partial \rho})$ 입니다.

## 후속 응답

**A.5** 식 (2)에서  $z \approx 0$ 에 가까운  $B_z'(\rho, z; t)$ 의 방정식을 구합니다. 이 방정식에는  $z$ 에 대한  $B_z'(\rho, z; t)$ 의 1 차 편미분과 별도로  $t$ 에 대한 2 차 편미분이 포함되어 있습니다.

0.6pt

**A.6**  $t > 0$ 에서  $z \approx 0$  근처의  $B_z'(\rho, z; t)$ 의 일반적인 형태를 풀니다.

0.4pt

**A.7** A.6의 해가 자기장  $B_z'(\rho, z \approx 0; t)$ 에 대한 움직이는 이미지 모노폴 그림이 아래쪽으로 움직이는 속도를 나타내고 있음을 보여 줍니다. 문제 텍스트에서 알려진 매개 변수의 관점에서 이미지 모노폴의 속도  $v_{(0)}$ 를 구합니다.

0.4pt

## 파트 B. 일정한 속도와 일정한 $h$ (4.0 점)로 움직이는 점 모양의 쌍극자에 작용하는 자기력

A.7에서  $z \approx 0$  근처의  $B_z'$ 에 대해 개발된 이동 이미지 모노폴 개념은  $z \geq 0$  영역의  $B^{(i)}$  필드에 대해서도 유지된다고 가정할 수 있습니다. 이 가정은 전도성 박막 응답에서 시간 진화가 충분히 느린 한 유효합니다.

## 이론

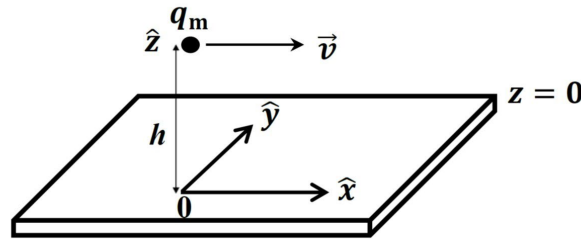


그림 2 단극  $q_{(m)}$ 은 전도성 박막에서 일정한 속도  $\vec{v}$  및 일정한 높이  $h$ 로 이동합니다. 그림과 같이  $t=0$ 에서의 좌표입니다.

단극  $q_m$  (그림 2)은  $v \ll c$ ,  $z = h$ 에서 일정한 속도로  $v\hat{x}$ , 현재 순간( $t=0$ )까지 운동하게 됩니다. 현재 좌표( $x, y$ )는  $(0,0)$ 입니다. 우리는 이 움직이는 모노폴이 궤적을 따라 생성하는 모든 이미지 모노폴로 인한 자기 전위  $\Phi_+$ 에 초점을 맞추고 있습니다.

$q_m$ 의 궤적을 이산 시간 단계(매우 작은 시간 단계  $\tau$ )로 분할하여 각 시간 단계의 시작 순간에  $q_m$ 의 동작을 호핑으로 대체합니다. 호핑은 모노폴의 동시 제거와 생성으로 표현됩니다. 생성된 모노폴의 위치는 이 시간 단계의 시작 순간에 궤적의 한 점과 일치합니다. 따라서 제거된 모노폴의 위치는 이전 시간 단계의 시작 순간에 궤적 위치와 일치합니다. 이는 이 시간 단계와 이전 시간 단계의 시작 순간에 해당하는 궤적 위치에서 각각  $q_m$  및  $-q_m$ 의 두 자기 모노폴이 동시에 갑자기 나타나면서 이루어집니다. 두 위치는 호핑 거리  $\Delta x = v\tau$ 로 분리되어 있습니다. 이 시간 단계 접근 방식은 모든 시간 단계에서 생성되는 모든 이미지 자기 모노폴과 그 위치를 쉽게 결정할 수 있게 해줍니다.

### 움직이는 모노폴

**B.1**  $q_m$  및  $-q_m$  유형의 모든 이미지 모노폴의 현재( $t=0$ ) 위치를 적으세요. 시간 단계의 시작 모멘트는  $t = -n\tau$ 이며, 여기서  $n$ 는 0입니다.

0.8pt

**B.2 B.1**의 모든 이미지 모노폴에서  $t=0$ 에서 자기 전위  $\Phi_+(x,z)$ 의 합 형태를 구합니다.  $\Phi_+(x,z)$ 를 계산합니다.

0.7pt

## 이론

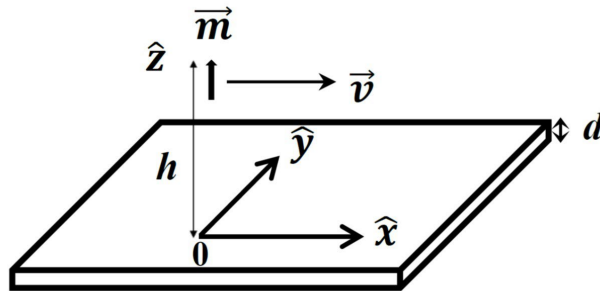


그림 3 위쪽을 향하는 자기 쌍극자 모멘트  $\vec{m}$  를 가진 쌍극자가 전도성 박막으로부터 상수  $\vec{v}$  와 일정한 높이  $h$  로 이동합니다. 그림과 같이  $t=0$ 에서의 좌표가 표시됩니다.

이제 그림 3 과 같이 점처럼 움직이는 자기 쌍극자를 생각해 봅시다. 쌍극자 모멘트가 있는 쌍극자  $\vec{m} = m\hat{z}$ 는 현재 좌표가  $(0,0)$ 인 현재 순간( $t=0$ )까지 일정한 속도( $v\hat{x}$ )로 움직이고, 일정한 높이( $z=h$ )로 운동하게 됩니다. 점 모양의 쌍극자는 소개 섹션에서 언급했듯이 약간 변위된 두 개의 단극자로 나타낼 수 있습니다. 자기 쌍극자의 위치는 북쪽 단극의 위치로 선택되며  $\vec{m}$  은 고정된 것으로 가정합니다. 움직이는 쌍극자

**B.3**

1.5pt

$t=0$  에서 전도성 박막에 의해 점 모양의 자극 쌍극자에 작용하는 힘  $\vec{F}$  을 구합니다.

$v_0$  과  $v$

아래 파트의 수치 평가에서는  $\sigma = 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ,  $d = 0.50 \text{ cm}$ ,  $h = 5.0 \text{ cm}$  인 구리로 만들어진 전도성 박막을 고려합니다.

**B.4**

A.7 에 따라 이미지 쌍극자의 속도인  $v_0$ 의 값을 계산합니다.

0.3pt

전자파가 전도성 슬래브에 침투할 수 있는 거리인 투과 깊이  $\delta$  (피부 깊이라고 함)는 파동의 각 주파수  $\omega$  에 따라 달라지는 것으로 알려져 있습니다. 의존성은 다음과 같습니다.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}. \quad (3)$$

아래에서는  $\omega = v/h$  을 고려하며, 여기서  $v_{(L)}$  은  $v$  및  $v_0$  의 더 큰 속도와 같습니다.

**B.5**

작은 영역과 큰 영역 모두에서  $v_0(v)$ 의  $v$  종속성을 구합니다( $v$  ).

0.4pt

**B.6**

B.5 의 두 체계가 만나는 임계 속도  $v = v_{(c)}$ 를 구합니다.

0.3pt

### 파트 C. 전도성 박막이 초전도 상태일 때의 자극 쌍극자의 운동(3.0 점)

위의 고려 사항은 전기 전도도( $\sigma \rightarrow \infty$ )가 항상 초전도체에서 자기장을 완전히 밀어내는(마이스너 효과) 타입-I 초전도체에 적용될 수 있습니다.

## 이론

여기서는 수평 자기 쌍극자 모멘트  $\vec{m} = m\hat{x}$ , 질량  $M_0$ ,  $(x,y,z) = (0,0,h)$ 에 위치한 점 모양의 자기 쌍극자를 고려합니다. 우리는 중력장의 작용에 따른 자기 쌍극자의 수직 운동과 중력 가속도  $\vec{g} = -g\hat{z}$ 에 초점을 맞춥니다. 주어진 쌍극자 방향과 질량 중심 운동 사이의 약한 결합이 가정되어 무시됩니다. 따라서 아래에서 고려할 사항을 위해 자기 쌍극자 모멘트를 위와 같이 고정합니다. 또한 초고진공 환경을 가정하여 잔류 공기로 인한 운동에 대한 감쇠를 고려할 필요가 없습니다.

**C.1** 초전도 박막에서 쌍극자의 평형 거리  $h_{(0)}$ 를 구합니다.

1.2pt

**C.2** 평형에 대한 진동의 쌍극자 각 주파수  $\Omega$ 를 구합니다.

0.8pt

구형 영구 자석의 물리적 파라미터는 반지름  $R = 1.0\mu\text{m}$ , 질량 밀도  $\rho_0 = 7400 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T A}^{-1}\text{m}$ , 자화  $|M| = 75 \times 10^{-2} \text{ T}/\mu_0$  등입니다.

**C.3**  $h_0$ 의 값을 계산합니다.

0.7pt

**C.4**  $\Omega$ 의 값을 계산합니다.

0.3pt