

일반 지침: 이론 시험(30점)

2023년 5월 23일

이론 시험은 5시간 동안 진행되며 총점은 30점입니다.

시험 시작 전

- 시험 시작을 알리는 신호음이 울리기 전에 문제가 담긴 봉투를 열어서는 안됩니다.
- 이론 시험의 시작과 끝은 신호음으로 안내됩니다. 매시간마다 경과된 시간이 안내될 것이며 이론 시험의 종료를 알리는 신호음이 울리기 15분 전(최종 신호음 전)에도 안내가 될 것입니다.

시험 응시 중

- 답안을 쓰는 전용 답안지가 제공됩니다. 각 문제 번호와 일치하는 답안지 (A로 표시됨)의 알맞은 빈칸에 최종 답안을 적으십시오. 각각의 문제에 여분의 빈 계산 용지 (W로 표시됨)가 제공됩니다. 현재 풀고 있는 문제 번호와 풀이 과정을 작성하는 계산 용지가 맞는지 확인하십시오(상단의 문제 번호를 확인하십시오.). 어느 계산 용지이든 쓴 것 중 채점이 되지 않기를 원하는 것은 X 표시를 하십시오. 각 계산 용지의 앞면만 활용하십시오.
- 풀이 과정을 작성할 때 최대한 간결하게 작성하십시오: 방정식을 사용하거나, 논리 연산자를 사용하고, 생각하는 내용을 간단하게 작성하십시오. 긴 문장을 쓰는 것을 피하십시오.
- 숫자를 기재할 때는 적절한 유효 숫자를 입력하십시오.
- 전 단계의 문제를 풀지 않았다 하더라도, 다음 단계의 문제를 풀 수 있습니다.
- 허가 없이 시험 장소를 떠날 수 없습니다. 도움이 필요한 경우(마실 물을 보충할 경우, 계산기 고장, 화장실 방문이 필요 등), 두 개의 깃발 중 하나를 사용하여 감독관에게 알려 주시기 바랍니다(“마실 물을 보충하고자 합니다.”, “화장실에 가려고 합니다.”, 또는 그 외의 도움이 필요합니다.).

시험 종료 후

- 시험이 끝나는 즉시 답안 작성을 중지해야 합니다.
- 각 문제에 대해 작성한 용지의 순서를 정렬합니다. 순서는 다음과 같습니다: 겹장 (cover sheet, C), 문제지 (questions, Q), 답안지 (answer sheets, A), 계산 용지 (work sheet, W)
- 한 문제에 해당되는 모든 계산 용지들은 해당 문제의 봉투에 함께 넣으세요. 일반적인 지시사항 (G)는 남는 봉투에 따로 넣으세요. 참가자 코드가 각 봉투의 겹면에 있는지 확인하십시오. 또한, 사용하지 않은 빈 종이도 제출하십시오. 어떠한 종이도 시험장 밖으로 가지고 나갈 수 없습니다.
- 주최 측에서 제공한 파란색 계산기를 책상 위에 둡니다.
- 필기구(볼펜 2개, 펄트펜 1개, 연필 1개, 가위 1개, 자 1개, 귀마개 2개)와 개인 계산기(해당되는 경우)를 가져가십시오. 또한 물병을 가지고 가십시오.
- 봉투가 수거될 때까지 책상에서 대기하십시오. 봉투가 수거되면 감독관이 시험장 밖으로 안내해 줄 것입니다.

이론 문제 1: ISS 궤도 붕괴의 동역학 [10.0점]

개요



그림 1: 지구 주위를 공전하는 국제우주정거장

국제우주정거장(ISS)은 현재 열권(thermosphere)에서, 지구 적도면을 기준으로 $\theta = 51.6^\circ$ 의 경사각을 가지는 거의 원형인 궤도를 유지하고 있으며, 최소 고도는 370km이고 최대 고도는 460km이다. 우주선의 궤도는 정거장에서 지구 표면까지의 거리가 천천히 변화하는 나선형과 유사하며, 한 번의 공전 주기 동안 고도의 변화는 크지 않습니다. 우주선의 궤도는 정거장에서 지구 표면까지의 거리가 천천히 변화하는 나선형과 유사하며, 한 번의 공전 주기 동안 고도의 변화는 크지 않다.

ISS의 질량은 $M_s = 4.5 \times 10^5 \text{ kg}$ 이고, 전체 길이는 $L_s = 109 \text{ m}$ 이다. 폭 $W_s = 73 \text{ m}$ 인 초대형 태양 전지판이 ISS에 전기를 공급한다 [Nasa 공식 보고서 (2023)].

ISS의 유효 단면적은 대략 $S \approx 2.5 \times 10^3 \text{ m}^2$ 이다 [유럽 우주국, SDC6-23].

ISS의 궤도 붕괴(orbital decay)는 궤도 운동의 에너지를 빼앗아가는 여러 메커니즘을 통하여 일어난다. 핵심적인 것은 다음과 같다.

- 위성과 기체 분자의 잦은 충돌로 인한 대기 항력(drag)
- 도체로 만들어진 장치가 지구 자기장 내에서 운동할 때 발생하는 앙페르 힘
- 산소 원자 이온과의 상호작용

”... 2008년 5월, 고도는 350 킬로미터였고, ISS는 4.5km 추락했으나 Progress-60 수송선을 통하여 다시 5.5km 밀어올려졌다. 이후, ISS는 5.5km 추락하였고...” [<http://mod.jsc.nasa.gov>]

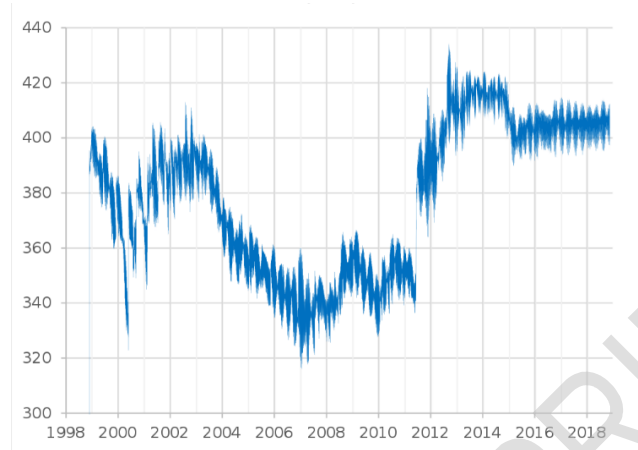


그림 2: ISS의 연중 고도(km)

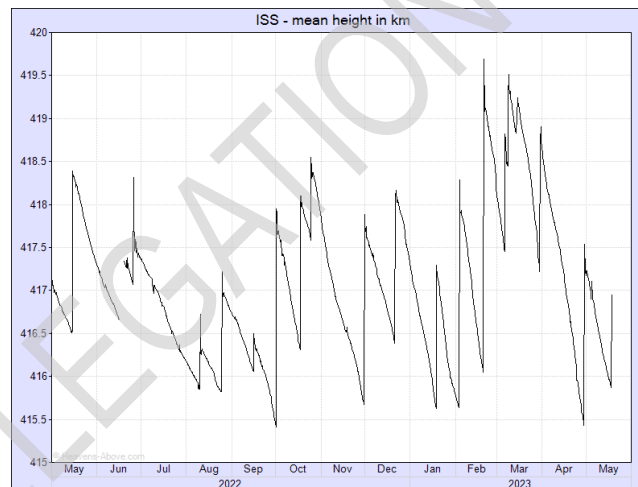


그림 3: 2022-2023년 ISS의 평균 고도.

”... ISS는 매일 고도가 330 피트(100m)의 낮아졌으며...” [NASA 제어 데이터(2001)]. 2023년 상공을 날아가던 ISS의 고도는 410km 였으며 매일 약 70m (~매월 2km) 낮아졌했으며 자기 폭풍동안은 일간 고도감소가 300m에 이르렀다. ISS는 자체와 ISS에 접속한 수송선의 추진 장치를 이용하여 궤도 이탈 조정을 한다. [국제우주정거장 전환 보고서 (2022)].

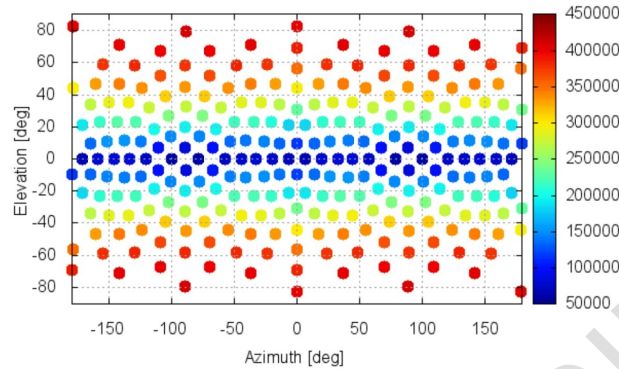


그림 4: 다양한 각도에서 본 ISS의 단면적 (dm²). 모형(CROC)의 예측 결과는 2481 m².

기호와 물리 상수

기체 상수	R	$=$	$8.31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
아보가드로수	N_A	$=$	$6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
기체의 몰 질량 (공기)	μ	$=$	$0.029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
지구 질량	M_E	$=$	$5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
지구 반지름	R_E	$=$	$6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$
보편 중력 상수	G	$=$	$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$
지표면에서 공기 밀도	ρ_0	$=$	1.29 kg/m^3
지표면에서의 중력가속력	g_0	$=$	$9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
지구 자기장 평균 크기	B	$=$	$5.0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
전자의 전하 절댓값	e	$=$	$1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

파트 A: 변형 대기압 공식 [2.0점]

대기는 중성 O_2 와 N_2 분자로 이루어져 있는데, 압력은 클라페이롱-멘델레예프 법칙(이상 기체 법칙) $pV = \frac{M}{\mu}RT$ 를 통하여 구할 수 있으며, 여기에서 p, V, T, M, μ 는 각각 압력, 부피, 온도, 질량, 물질량이며, R 은 기체 상수이다.

기압을 높이의 함수로 구할 수 있는 두 방정식이 있다. 첫째는 **대류권**($h < 100 \text{ km}$)의 표준 모형에 적용할 수 있는데, 온도는 고도가 높아짐에 따라 감소한다.

둘째는 **열권**($h > 250 \text{ km}$)의 표준 모형에 적용할 수 있는 방정식으로, 온도가 고도에 따라 거의 변하지 않는다고 가정하며 이것이 ISS에 적용된다.

모든 압력은 정지한 유체에 작용하며(hydrostatic) 등방적(isotropic, 모든 방향으로 크기가 같다)이라고 가정한다.

A.1 ISS의 고도 h 에서 대 기압 p_h 를 표현하는 적분 식을 유도하시오. 이 식을 일반적인 대기압 공식이라고 부른다. 힌트: 온도와 중력가속도는 h 에 의존한다. 0.5pt

참고 1. 고도 300~600 km에서 지구 열권의 온도는 고도에 따라 거의 변하지 않으며, 태양을 향한 면에서 온도가 800~900 K에 이른다 [NASA 자료]. 따라서, ISS의 궤도 비행을 고려하여 $T_h = T = (\text{상수})$ 라고 놓을 수 있다. 다만, 우주비행선은 하루의 반 정도를 온도가 급격하게 떨어지는 지구의 그늘쪽에서 보내기 때문에, 이를 고려하여 $T = 425 \text{ K}$ 를

이 고도의 평균 온도로 잡을 수 있다. 이 온도는 또한 고도 $h = 400$ km에서 대기 밀도가 $\rho_h \sim 10^{-12}$ kg/m³일때와 일치한다 [지구 대기 상층부의 MSIE-90 모형].

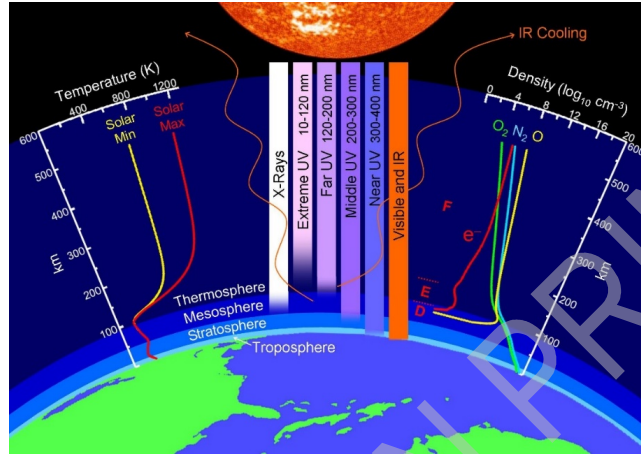


그림 5: 지구의 열권

A.2 온도와 중력가속도 g_h 가 h 에 의존하지 않을 때 (표준 대기압력 공식) 공기 압력 p_h^{sta} 을 구하시오. $T = 425$ K일때 파라미터 $h_0 \doteq \frac{RT}{\mu g_0}$ 값을 계산하시오. 0.3pt

A.3 온도가 일정하지만 중력가속도가 h 에 의존할 때(개선된 대기압 공식), 공기압력 p_h^{imp} 을 구하시오. 힌트: 오차가 $O(z_h^2)$ 가 되도록 선행 보정항(leading-order correction)만 구하시오. 여기에서 지표면을 기준으로 한 비행 고도 h 는 지구 반지름보다 현저히 작다 $z_h \doteq h/R_E \ll 1$. 0.6pt

A.4 대기압 '표준'공식과 '개선' 공식으로 구한 압력의 비 $p_h^{\text{imp}}/p_h^{\text{sta}}$ 를 쓰시오. $h = 4.0 \times 10^5$ m일 때 이 값을 추정하시오. 이후로는 '개선된' 공식을 사용하시오. 0.4pt

A.5 높이 h 에서 공기 밀도 ρ_h 와 중성 공기 분자 밀도 n_h 를, 오차가 $O(z_h^2)$ 가 되도록 구하시오. 0.2pt

파트 B: 궤도 감속과 정거장 고도감소 [3.0점]

질량 M_S 인 위성이 일정한 마찰력 $\vec{F}_{\text{drag}}$ 을 받을 때 궤도 붕괴율을 생각하자. 높이 감소 dh 가 비행 고도 h 보다 훨씬 작다고 가정한다($dh \ll h$).

B.1 고도 h 의 안정된 궤도를 도는 위성의 속력 v_h 와 공전 주기 τ_h 를 구하시오. 0.5pt

B.2 반지름 $R_E + h$ 인 원궤도를 도는 위성의 총 에너지 E_S 를 구하시오. 0.5pt

B.3 질량이 일정한 위성에 대해 감속력의 총합이 일종의 외부 제동력 $\vec{F}_{drag}$ 으로 주어진다. 그 결과 ISS는 느려지고 짧은 시간 dt 동안 고도가 dh 만큼 감소한다. 제동력의 크기가 F_{drag} 일때, ISS와 이를 둘러싼 계의 총 에너지 보존에 대한 방정식을 쓰시오. 1.0pt

B.4 위성의 고도감소(궤도 이탈)속력 u_h 를 구하시오. 힌트: 고도감소속력은 마찰력, 위성 고도, 위성 질량에 의존한다. 0.5pt

B.5 위성이 마찰로 인해 떨어질 때, 지구를 한 번 공전할 때의 고도감소량 H_h 와, 고도 h 에서부터 지표면으로 떨어지는 동안 걸린 총 시간 T_h 를 구하시오. 힌트: 관계 $h_0 \ll h \ll R_E$ 를 이용하시오. 0.5pt

파트 C: 대기 항력(atmospheric drag) [1.0점]

위성의 속력 v 는 고도 $h \approx 300 \sim 400\text{km}$ 의 대기 분자의 열운동 평균 속도 (수백 m/s)보다 몇 배 크다. 따라서 ISS에 충돌하기 전에 분자들이 정지상태라고 가정해도 된다. 또 항력(drag force)을 추정할 때, 위성과 충돌 후 분자들이 위성과 같은 속력을 얻게 된다고 가정한다.

C.1 대기의 항력 F_{air} , 고도감소속력 u_h^{air} , 한 번 공전할 때 고도감소량 H_h^{air} 을 구하시오. 0.5pt

C.2 대기 항력의 영향을 고려하여, 위성이 고도 h 에서 지표면까지 떨어질때까지 걸리는 시간 T_h^{air} 을 구하시오. 힌트: 관계 $h_0 \ll h \ll R_E$ 를 이용하시오. 0.5pt

파트 D: 산소 원자 이온의 항력 [1.0점]

열권에서, 태양 복사 자외선과 X선의 영향을 받아 공기가 이온화된다(‘극광, 오로라’). O_2 와는 달리, N_2 는 태양 복사에 의한 해리(dissociation)가 일어나지 않는다. 따라서 일반적으로 지구의 대기권 상층에는 산소 원자에 비해 질소 원자가 적다. 250 km 이상의 고도에서는 산소 원자 O 가 대부분이다. 전자들과 산소 원자 이온을 포함한 층이 태양을 마주한 면 대기에 형성된다. 이 경우 산소 원자 이온의 농도는 $n_{ion} \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$ 이다.

D.1 이 입자들이 역학적으로 충돌하기 때문에 생기는 감속력 F_{ion} 의 24시간 평균을 구하시오. 밤에는 이온화된 층(전리층)이 급격하게 사라짐을 고려하시오. 이온화된 산소 분자 밀도 ρ_{ion} 를 구하시오. 0.3pt

D.2 산소 원자 이온에 의한 감속 때문에 발생하는, 위성의 고도감소속력 u_h^{ion} 을 구하시오. 이온화 효과에 의해, 지구를 한 바퀴 돌 때 고도감소량 H_h^{ion} 을 구하시오. 힌트: 관계 $h_0 \ll h \ll R_E$ 를 이용하시오. 0.7pt

파트 E: 지구 자기장에 의한 항력 [2.0점]

지구 자기장의 영향을 받는 위성의 운동을 생각하자. 지표면 근처에서 자기장 크기는 $(3.5 \sim 6.5) \cdot 10^{-5} \text{ T}$ 이며, 평균값은 $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ 이다.

위성이 자기장 안을 빠르게 움직이면, 도체로 이루어진 위성의 구성 요소에 유도 전류(기전력, electromotive force, EMF)이 생긴다. 기전력은 도체로 된 위성 구성 요소의 전하를 재배열한다. 이로 인해 위성 주위에 발생한 전기장은 주위의 전하운동에 영향을 미친다. (위성의 중간부분을 기준으로) 양의 퍼텐셜을 가진 부분에는 전자가 달라붙고, 음의

퍼텐셜을 가진 부분에는 양전하를 띤 이온이 달라붙는다. 위성 표면에 부딪힌 전자와 이온은 결합하여 중성 산소 원자가 되며, 그동안 전자는 위성의 도체 구조를 따라 ‘흘러가’며 전류를 형성한다. 위성이 움직이는 동안 주변에서 전자와 이온을 ‘빨아들이며’ 충돌하게 된다. 위성의 도체 구조물에 흘러가는 전류의 크기를 대강 추정하기 위하여 위성이 전자와 이온을 빨아들이는 것은 위성 단면적 S 에만 일어나고, 모든 이온과 전자는 전류를 형성하는데 참여한다고 가정한다.

E.1	유도된 전류 I_{ind} 를 근사적으로 구하시오	0.6pt
E.2	유도로 인해 위성의 운동 반대 방향으로 작용하는 앙페르 ‘제동력’에 대한 대략의 표현식을 구하시오. ISS의 속도 벡터 $\vec{v}_h$ 로부터, 경도선(longitude lines)을 따라가는 지구 자기장 벡터 $\vec{B}$ 로 가는 사잇각을 ϕ 이라 하자. 간단히 하기 위하여 위성의 길이 L 을 위성 면적 S 의 제곱근으로 두자. 또한, $\sin(\phi)$ 의 평균을, 유한한 수의 샘플 포인트를 이용해서 구해도 된다.	0.6pt
E.3	지구 자기장 영향에 따른 고도감소속력 u_{ind} 를 구하시오. 자기 항력 효과에 의해 공전을 한 번 할 때 고도감소량 H_h^{ind} 을 구하시오.	0.8pt

F 부: 수치 결과와 결론 [1.0점]

F.1	답안지의 표 1을 계산하여 채우시오.	0.4pt
F.2	답안지의 표 2를 계산하여 채우시오.	0.4pt
F.3	공전 고도가 380km를 초과하는 ISS에 대하여, 공전을 느리게 하는 앞의 세 요소들이 미치는 영향이 큰 순서대로 나열하시오.	0.2pt

이론 문제 2: 회전판 위의 공 [10.0점]

들어가는 글

표기법 및 규칙: 벡터 $\vec{A}$ 의 길이는 $A \equiv |\vec{A}|$ 로 표기하고, 해당 벡터의 x, y, z 성분은 각각 A_x, A_y, A_z 로 나타낸다. 물리량의 시간에 대한 미분은 해당 물리량을 나타내는 문자 위에 점을 찍어서 표시한다: $\dot{\vec{A}} \equiv d\vec{A}/dt, \dot{A} \equiv dA/dt$. 벡터 $\vec{A}$ 방향으로의 단위 벡터는 $\hat{A}$ 로 나타낸다. 따라서, 직교 좌표계에서의 단위벡터는 $\hat{x}, \hat{y}$ 와 $\hat{z}$ 로 나타낸다. 벡터에 대한 내적과 외적의 정의는 다음과 같다.

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{A}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \theta$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{A}) \\ = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta,$$

여기서 θ 는 $\vec{A}$ 와 $\vec{B}$ 의 사잇각이다. 벡터에 대한 삼중곱 규칙은 다음과 같다:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}, \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}.$$

벡터곱은 물리학의 많은 관계를 설명하는 데 매우 유용하다. 예를 들면,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \\ \vec{F}_{Lorentz} = Q\vec{v} \times \vec{B},$$

와 같은 예가 있고, 세 개의 벡터 성분에 대한 세 개 방정식을 한 개의 방정식으로 통합하여 표현함으로써 시간을 절약하게 해준다.

문제 상황 설명

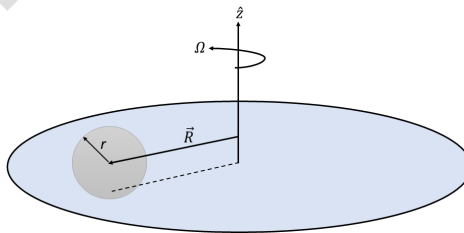


그림 1. 회전판 위에서 미끄러지지 않고 굴러가는 공

질량 m , 반지름 r 인 공이 미끄러지지 않고 수평 회전판 위에서 구르고 있다(그림 1 참조). 공의 질량 밀도는 구형 대칭, 즉 중심으로부터의 거리에만 의존한다. 공의 관성 모멘트는 I 이다. 회전판이 자유롭게 회전할 수 있는 파트 B와 C에서, 회전판의 관성 모멘트는 I_d 로 나타낸다. 이 문제의 목적은 실험실 좌표계를 기준으로 공의 움직임과 궤적을 분석하는 것이다. 이 문제에서는 회전판이 충분히 커서 공이 떨어지는 경우는 없다고 가정하며, 다음 표기법을 사용한다:

Ω - 회전판 각속도의 크기,

$\vec{\omega}$ - 공의 회전축에 대한 공의 회전 각속도,

$\vec{R}$ - 회전판의 회전축에 대한 공 중심의 수평 위치,

$\vec{v}$ - 실험실 좌표계를 기준으로 위치 $\vec{R}$ 에서 공의 속도.

공의 초기 위치 $\vec{R}_0 \equiv \vec{R}(0)$, 초기 속도 $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(0)$, 회전판의 초기 각속도 $\Omega_0 \equiv \Omega(0)$ 를 알고 있다고 가정한다. 초기 벡터량인 $\vec{R}_0 \equiv \vec{R}(0)$ 과 $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(0)$ 의 경우 방향도 알고 있다고 가정한다. 또한 질문에서 벡터량을 나타내라고 할 경우, 단위 벡터인 $\hat{z}$ 를 사용할 수 있다. 또한 이미 알고 있는 물리량으로 답을 표시하라고 할 때, m, r, I, I_d 중 일부 혹은 전부를 사용할 수 있다. 달리 명시되지 않는 한, I 는 특정한 값에 한정되지 않는다고 취급하며, 다음 표기법을 사용하기를 권장한다:

$$\alpha = \frac{I}{I+mr^2}, \quad \delta = \frac{I_d}{mr^2},$$

외적, 내적 및 좌표 축 방향의 단위 벡터를 포함하는 벡터 식으로 최종 답을 작성할 수 있다.

파트 A: 일정한 각속도를 갖는 회전판 위의 공 [1.5 점]

우선 가장 간단한 경우로, 수직 축 $\hat{z}$ 에 대한 회전판의 각속도가 $\Omega = \Omega_0$ 로 일정한 값인 경우부터 고려해 본다.

A.1	운동학적 제한 조건을 고려하여 공의 속도 $\vec{v}$ 를 $\Omega, \vec{\omega}, r, \vec{R}$ 의 식으로 나타내시오.	0.1pt
A.2	뉴턴 방정식과 공의 중심에 대한 돌림힘 방정식을 사용하여, 공의 가속도 $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$ 를 $\Omega, \vec{v}, r, m, I$ 의 식으로 나타내시오.	0.2pt
A.3	속도 $\vec{v}$ 를 $\Omega, \vec{R}, \vec{v}_0, \vec{R}_0, r, m, I$ 의 식으로 나타내시오.	0.2pt
A.4	초기 조건 $\vec{v}_0$ 와 $\vec{R}_0$ 가 주어진 경우, 공의 궤적을 명확히 구하시오.	0.5pt
A.5	이번에는 공의 질량 밀도가 균일하여 $I = 2mr^2/5$ 이라고 가정한다. 앞 문제에서 본인이 얻은 궤적은 원이고, 그 반지름은 R_t 이다. R_t 와 R_0 가 같은 경우, 회전판 위의 공이 초기 지점($t = 0$ 인 순간 회전판 위에서 공의 위치)에 가장 가까운 거리로 접근하는데 걸리는 시간은?	0.5pt

파트 B: 자유롭게 회전하는 회전판 위의 공 [4.0점]

이 파트에서 회전판은 z -축을 중심으로 마찰 없이 자유롭게 회전할 수 있다. 따라서 회전판의 자유 회전은 공의 마찰에 의해서만 방해 받는다.

B.1	공의 속도 $\vec{v}$ 와 가속도 $\dot{\vec{v}}$ 를 $\Omega, \vec{R}, \Omega_0, \vec{R}_0, \dot{\Omega}, r, m, I$ 의 식으로 나타내시오.	0.2pt
B.2	회전판의 각가속도 $\dot{\Omega}$ 의 크기를 $\Omega, \Omega_0, \vec{R}, \vec{R}_0, \vec{v}_0, r, m, I, I_d$ 의 식으로 나타내시오. 문제의 앞 부분에서 정의한 상수 α 및 δ 를 사용할 수 있다.	0.6pt
B.3	회전판의 각속도 Ω 의 크기를 다음 상수들 $\Omega_0, R_0, r, m, I, I_d$ 을 포함하고 R 에만 의존하는 함수로 나타내시오.	0.6pt
B.4	B.3의 결과로부터, 주어진 Ω_0, R_0 에 대해 Ω 가 취할 수 있는 가능한 최댓값을 구하시오.	0.1pt

- B.5** 전체 시스템에 대한 각운동량의 수직 성분인 $\hat{z}M_z$ 을 적으시오. 여기서 상수 항을 빼고 나머지 부분을 $\hat{z}L$ 로 표시한다. 문제 B.1에서 공의 속도 $\vec{v}$ 를 구했는데, 이는 공의 위치 $\vec{R}$ 에 의존하는 부분과 상수 벡터의 합으로 표시된다. 이 상수 벡터를 $\vec{c}$ 라고 하자. 이 상수 벡터의 방향을 따라 x -축의 방향을 정하고, y -축의 방향은 $\hat{z} \times \vec{c}$ 의 방향으로 정한다. 이 기준 좌표계에서 Ω 를 $L, \vec{R}, \vec{c}, \hat{z}, R^2, r, m, I, I_d$ 의 식으로 나타내시오. 이 결과와 B.3의 결과를 결합하여, R^2 와 y 변수 및 L, r, m, I, c, I_d 만을 포함하는 방정식을 적으시오. 여기서 c 는 $\vec{c}$ 의 크기이다. $R^2 = x^2 + y^2$ 를 적용하여, x 와 y 변수만 포함하는 곡선의 식을 적으시오. 이 결과로부터 가능한 모든 유형의 궤적을 나열하시오. 2.5pt

파트 C: 자기장의 영향하에 있는 회전판 위의 공 [4.5점]

이 파트에서는 $I = mr^2/10$ 를 만족하는 공의 밀도 분포를 고려한다. 예를 들어, 공이 균일한 밀도로 반지름의 절반까지 채워지고 나머지 부분의 질량이 무시할 수 있을 만큼 작은 경우가 이에 해당한다. 또한, 전하 Q 가 균일한 전하 밀도 $Q/(4\pi r^2)$ 로 공의 외부 표면에 분포한다. $\hat{z}$ 방향의 균일한 자기장 $\vec{B}$ 가 회전판과 공에 가해졌다. 파트 A에서처럼 회전판은 일정한 각속도 Ω 로 회전한다.

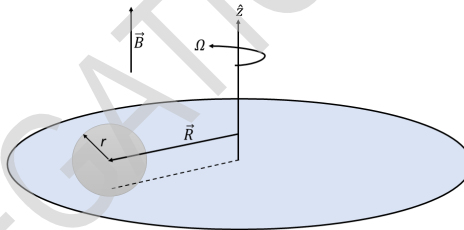


그림 2. 일정한 자기장 $\vec{B}$ 가 가해지는 회전판 위를 구르는 공

- C.1** 공에 대한 뉴턴 방정식과 돌림힘, $\vec{\tau}_s$, 방정식을 적으시오. 공의 회전축을 중심으로한 회전에 기인한 돌림힘에 대한 식을 $Q, r, \vec{\omega}, \vec{B}$ 의 식으로 나타내시오. 0.5pt
- C.2** C.1의 결과를 사용하여 실험실 좌표계에서 공의 선형 가속도를 $Q, r, \vec{\omega}, \vec{B}$ 의 식으로 나타내시오. 0.5pt

- C.3** 모든 길이, 각속도, 시간은 1 미터, 1 헤르츠, 1초를 기준으로 하여 측정된다고 가정한다. 1.0pt
문제 C.2에서 본인이 구한 선형 가속도에 대한 방정식은 $\vec{R}$ 에 대한 2차 미분 방정식으로 다음과 같은 형태를 가진다:

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - \gamma \frac{d\vec{R}}{dt} \times \hat{z} + \beta \vec{R} = 0.$$

상수 γ 와 β 를 Q, r, B, I, m, Ω 의 식으로 적으시오. $\vec{R}$ 의 성분에 대해 다음과 같이 극좌표로 변환하여 얻어진 방정식에는 시간에 대한 일차 미분 항이 없도록 만든다:

$$x(t) = \rho(t) \cos(\eta(t)),$$

$$y(t) = \rho(t) \sin(\eta(t))$$

여기서 극좌표 각도 $\eta(t)$ 를 시간의 함수로 나타내시오.

$\rho(t)$ 의 계수 β' 를 γ 및 β 의 식으로 나타내시오. $\rho(t)$ 가 시간에 대해 상이한 형태(예를 들면, 조화 함수, 지수 함수 등등)를 갖게 되는 조건들을 구하시오

- C.4** 문제 C.3에서 찾은 답에 대해 다음과 같은 초기 조건을 고려하시오: 0.9pt

$$x(0) = 1 \text{ m}, y = 0 \text{ m}, v_x(0) = \dot{x}|_{t=0} = 1 \text{ m/s}, v_y(0) = \dot{y}|_{t=0} = -1 \text{ m/s}.$$

이러한 조건으로부터 β 와 γ 를 구하시오. 이 결과를 이용하여 Ω 를 구하시오.

궤적을 대략적으로 그리시오. 표면의 전하는 음수인가 혹은 양수인가? 음수인 경우에는 -, 양수인 경우에는 +를 답안지에 표시하시오.

- C.5** 문제 C.4에서 찾은 정답을 고려해 본다. 올바르게 답을 구했다면 본인의 정답은 $\vec{R}(t)$ 가 회전하는 형태를 보여야 한다. $N \gg 1$ 인 회전 수 N 에 대해, 총 에너지 변화와 회전당 에너지 변화에 대한 식을 구하시오. 여기서 N 에 비해 작은 항들은 무시해도 된다. 이 문제에서는 공의 질량과 반지름이 $m = 1 \text{ kg}$, $r = 1 \text{ m}$ 이고, $I = 1/11 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 라고 가정한다. 1.6pt

이론 문제 3: 캐비테이션 (공동화) [10.0점]

소개

캐비테이션(공동화)은 '압력 강하'로 인해 액체 매질에서 기포가(혹은 공동이) 생기는 현상이다. 이것은 '온도 상승'으로 인해 기포가 생성되는 끓음과는 대조적이다. 낮아진 압력이 다시 높아질 때 기포가 붕괴되고 충격파와 초음속 제트류(흐름)를 생성하기 때문에 캐비테이션은 유압 기계, 선박, 더 일반적으로 액체 흐름과 관련된 모든 장치에서 지속적인 큰 손상의 원인이 된다. 한편, 캐비테이션은 화학 산업, 청소 및 신장 결석 치료와 같은 많은 분야에 긍정적으로 응용될 수 있다.

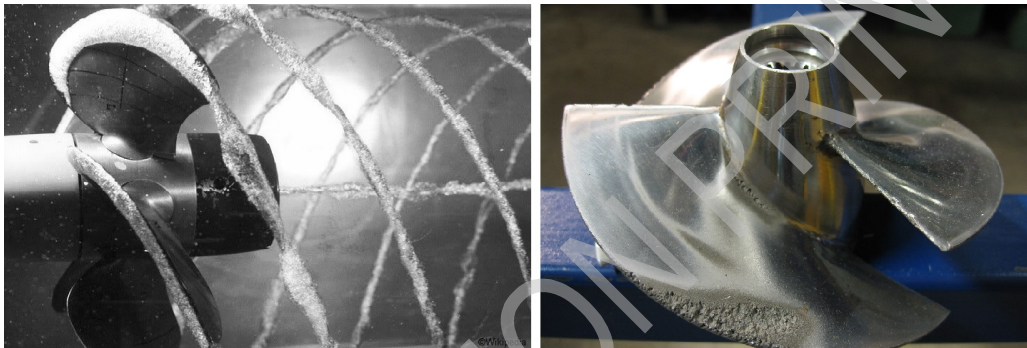


그림1. (a) 캐비테이션을 일으키는 프로펠러 (b) 캐비테이션에 의한 손상(출처: Wikimedia Commons)

캐비테이션은 액체에 미리 존재하던 핵(nuclei)이라고 하는 미세한 기포에서부터 자라는 것으로 받아들여지고 있다. 이 미세 기포는 크기가 수 마이크론이고 (i) 증기와 (ii) 응결하지 않는 기체를 모두 포함한다(보통의 물을 고려할 때 후자는 공기). 액체의 압력이 충분히 낮아지면 핵이 거시적인 크기로 성장하여 캐비테이션이 시작된다. 이러한 핵이 정제되어 없는 액체는 심지어 음의 압력에서도 캐비테이션이 일어나지 않을 수 있다. 이러한 현상은 장력을 받고 있는 고체와 비교할 수 있다. 고체가 장력을 받고 있다 하더라도 그 안에 이미 존재하던 포켓이나 균열이 없으면 쉽게 파열되지 않는다.

이 문제에서 우리는 캐비테이션과 관련된 다양한 이상적인 시나리오를 들여다볼 것이다. 종종 그렇듯이 간단한 차원 분석으로부터 의미 있는 정보를 얻을 수 있다. 그러나 좀 더 정밀한 연구를 하기 위해서는 뉴턴의 운동 제2법칙, Fick의 확산 법칙과 같은 기본 법칙을 구현한 미분 방정식이 필요할 것이다.

우리가 알고 싶은 첫 번째 사항 중 하나는 소위 '임계(혹은 문턱) 압력'이다. 이는 핵이 거시적 기포로 성장하지 않고 미시적 상태로 유지되도록 하는 수압의 최소값을 말한다. 임계 압력은 주어진 온도에서의 증기압과 거의 같지만 정확한 값은 핵의 표면 장력과 핵 안의 공기 함량으로 인해 이보다 약간 낮다.

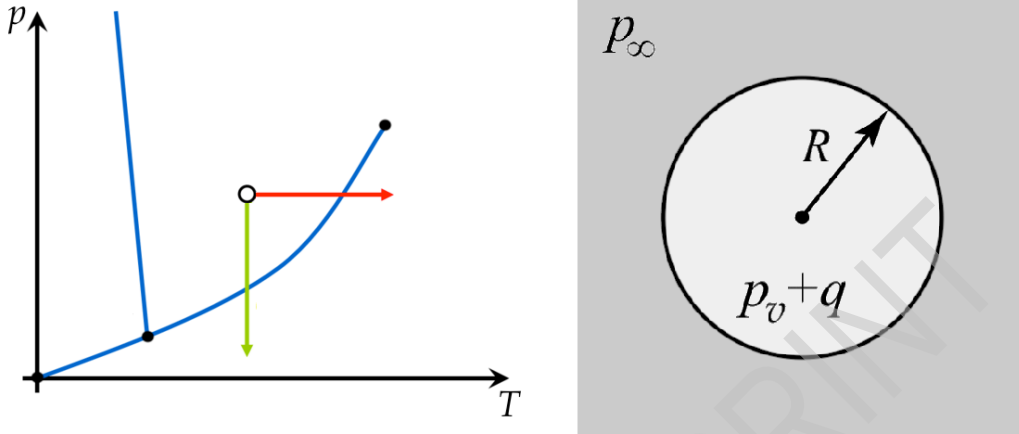


그림 2. (a) 상평형 그림에서 캐비테이션(아래쪽 화살표) 및 끓음(오른쪽 화살표) (b) 일반적인 기포(변수에 대한 설명은 표 1 참조)

외부 압력이 갑자기 핵의 임계 압력 아래로 떨어지면 핵이 팽창하기 시작하고 팽창 속도는 빠르게 안정적인 값에 도달한다. 실제로는 기포의 크기가 거시적이 되면 일반적으로 압력이 원래 값으로 돌아가고 기포가 붕괴되기 시작한다. 우리는 외부 압력이 갑자기 상승하는 평형 상태의 거시적 기포를 고려하여 이 상황을 모델링할 것이다. 기포에 공기가 있는 경우 붕괴되는 기포는 최소 크기에 도달한 후 다시 크기가 커진다. 반면에 (공기가 없이) 순수한 증기만 있는 기포는 기포의 반경이 0에 도달함에 따라 수축률이 무한대로 증가하면서 물에 완전히 녹는다. 실제로 붕괴가 끝날 무렵 기포는 구형의 모양을 잃게 되고, 여기에는 (이 문제에서는 무시한) 물의 압축성이 중요해지게 된다. 그러나 특정 질문에서 명시적으로 이야기하지 않는 한 여기에서는 이러한 영향을 무시할 것이다.

또 다른 흥미로운 질문은 음파가 기포가 포함된 물을 통해 전달될 때 어떠한 일이 일어나는가 하는 것이다. 압력 진동에 따라 기포의 크기가 커졌다 작아졌다 하는 진동을 할 뿐만 아니라 음파가 기포의 병진 운동도 유도한다. 이러한 효과는 음파의 도움으로 기포를 조작하는 데 사용할 수 있다. 예를 들어, 음향 캐비테이션에서는 세기가 높은 초음파를 사용하여 캐비테이션을 생성하거나 기포 붕괴를 유발한다.

마지막으로, 애초에 핵의 존재에 관한 일종의 파라독스가 있다. 이 이론은 물이 용해된 공기로 포화되지 않는 한 기체-물 경계면을 통해 임의의 핵에서 물로 공기가 확산되면 몇 초 만에 핵이 완전히 물에 녹는다고 예측한다. 그러나 실제로는 마이크론 크기의 핵이 물에 존재하며 이를 제거하는 것은 사실상 매우 어렵다. 우리는 이 역설에 대한 몇 가지 잠재적 해결 방법 중 하나, 즉 물 속의 고체 벽이나 고체 입자에 생긴 작은 틈이 공기와 증기의 미세 주머니 역할을 한다는 제안을 고려할 것이다.

잠재적으로 유용한 정보

증기 압력

물과 공기가 들어 있는 닫힌 병이 있다고 가정해보자. 공기가 너무 건조하면 수분 증발로 인해 공기의 습도가 높아진다. 공기가 너무 습하면 응결로 인해 습도가 감소한다. 이러한 평형 상태에서 공기 중 증기의 분압 $p_v = p_v(T)$ 은 온도의 함수이다.

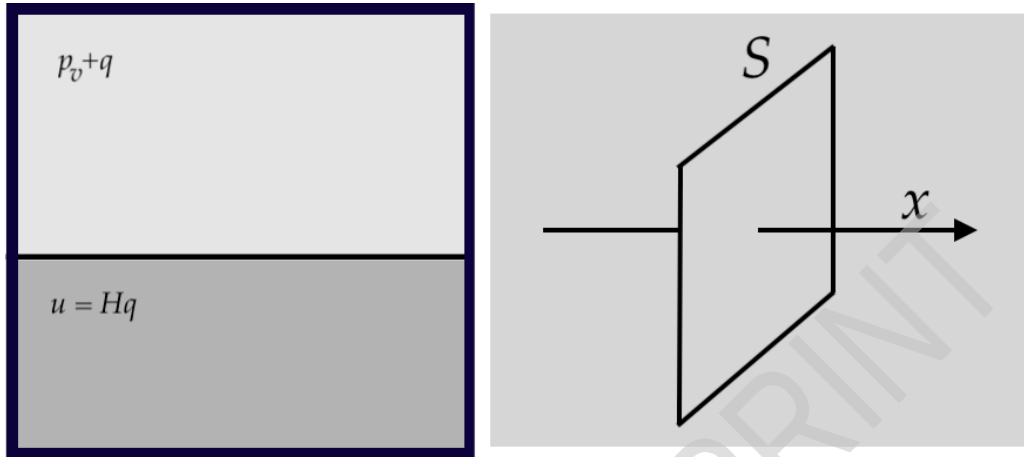


그림 3. (a) 공기와 물이 평형 상태에 있는 닫힌 병 (b) 표면 S 를 통한 확산 유량은 S 를 가로지르는 농도 구배(gradient)에 비례한다.

이제 기포의 부피가 순식간에 변하면 기포 내부의 습도는 주변 물과의 평형 상태에서 벗어나 응결 또는 증발에 의해 새로운 평형에 도달해야 한다. 실제로 이 과정은 너무 빨라서 평형이 항상 유지된다고 가정할 수 있다. 또한 이 과정에서 주변의 물이 잃거나 얻은 열은 무시할 수 있어서 온도가 일정하게 유지된다. 결론적으로 기포에 포함된 증기의 분압은 항상 p_v 로 유지된다고 가정한다.

Henry의 법칙

증기압의 개념은 기포의 증기 함량에 대한 좋은 이해법을 제공하지만 Henry 법칙은 공기 함량에 대한 적어도 부분적인 이해법을 제공한다. 물과 공기가 들어 있는 닫힌 병을 생각하면 평형 상태에서 물에 용해된 공기의 농도는 수면 윗부분에 포함된 공기의 분압에 비례한다:

$$u = Hq$$

여기서 u 는 물 속의 공기 농도, H 는 소위 헨리 상수, q 는 물에 인접한 공기의 분압이다. 이전과 마찬가지로 Henry의 법칙에 따라 공기 함량의 평형이 항상 (최소한) 기포 바로 근처에서는 유지되고 이러한 유지가 온도 변화를 유발하지 않는다고 가정하자.

Fick의 법칙

Henry의 법칙을 보완하기 위해서는 물에 용해된 공기가 농도가 높은 곳에서 농도가 낮은 곳으로 어떻게 이동하는지 알아야 한다. 여기에서 바로 Fick의 법칙이 사용된다. Fick의 법칙에 의하면 면적 S 를 가로지르는 확산 유량은 S 에 수직인 방향으로의 농도 구배에 비례한다 (그림 3 참조):

$$J = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}$$

여기서 J 는 단위 시간당 단위 면적당 표면을 가로질러 이동하는 공기의 양인 확산 유량이고 κ 는 확산 계수이며 x 축이 S 에 수직이라고 가정했다. u 가 x 및 가능한 다른 변수의 함수일 때 편미분 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 은 다른 모든 변수를 일정하게 유지하면서 변수 x 에 대해 u 의 도함수를 취했음을 의미한다.

확산 방정식

1사분면 $Q = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$ 에서 $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 을 만족하는 함수 $w = w(x, t)$ 를 찾아야 한다고 가정하자. 이 함수는 또한

$$\begin{cases} w(x, 0) = f(x) & \text{for } x > 0, \\ w(0, t) = 0 & \text{for } t > 0, \end{cases}$$

를 만족하며 이 때 해는 다음과 같이 주어진다.

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty (e^{-(x-y)^2/(4t)} - e^{-(x+y)^2/(4t)}) f(y) dy.$$

가우시안 적분들

다음의 적분 결과가 유용할 수 있다. $\int_0^\infty e^{-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}}, \quad \int_0^\infty x^2 e^{-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4b\sqrt{b}} \quad (b > 0).$

매개변수의 표기법 및 일반적인 값 (표1)

표 1에는 문제 설명에 사용된 표기법과 몇 가지 중요한 상수의 일반적인 값이 나열되어 있다.

기호	할당된 의미	보통의 값
밀도	물의 밀도	997 kg/m^3
p_∞	기포에서 멀리 떨어진 곳에서의 수압	101 kPa
p_v	증기압	2340 Pa
σ	표면 장력	$72.8 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$
R	기포 반지름	
R_0	기포의 처음 반지름	10^{-5} m
δ	공기 밀도	1.29 kg/m^3
q	기포 속 공기의 분압	
q_0	q 의 초기값	
γ	공기의 단열 지수	1.4
u	물에 용해된 공기의 농도	
κ	수중 공기 확산 계수	$2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
H	수중 공기에 대한 Henry 상수	$0.24 \cdot 10^{-6} \text{ s}^2/\text{m}^2$
t	시간	
f_0	자연/공명 진동수	

가정

달리 지정하지 않는 한 이 문제 전체에서 다음을 가정한다.

- 물은 비압축성, 비점성이고 균질하다.
- 물이 전체 공간을 채운다.
- 중력으로 인한 압력 변화는 무시할 수 있다.
- 온도의 공간적 또는 시간적 변화가 없다.
- 하나의 기포가 있다.
- 기포는 병진 운동 없이 구형으로 유지된다.
- 기포 공동과 주변 물 사이에 공기 이동이 없다.
- 공기는 이상 기체이다.

파트 A: 예비 분석 [1.5점]

이것은 현상의 느낌을 얻기 위한 워밍업 질문이다.

- A.1** 간단한 차원 분석을 수행하여 순수한 증기 기포의 붕괴 시간 T 를 기포의 초기 반지름 R_0 , 물 밀도 ρ , 수압 p_∞ 및 증기압 p_v 을 갖고 계산하라. 단, 얻은 식의 계수는 1이라 가정하라. $R_0 = 1 \text{ mm}$ 이고 ρ, p_∞, p_v 은 이전 표1에 나온 값을 사용하라. 단, 표면 장력은 없다고 가정하라: $\sigma = 0$. 0.5pt

- A.2** 반지름 $R_0 = 10^{-5} \text{ m}$ 인 공기와 증기로 구성된 핵이 외부 압력 $p_\infty = 101 \text{ kPa}$ 일 때 평형 상태에 있다고 가정한다. 기포 속 공기의 분압 q_0 을 구하여라. 이제 외부 압력 p_∞ 이 점차 감소하고 기포 내부의 공기가 등온 과정을 따른다고 가정한다. 임계 압력 p_c 를 찾아라. 임계 압력은 $p_\infty < p_c$ 이면 기포의 크기가 제한 없이 커지게 되는 압력이다. p_v 와 σ 는 표1에 있는 값을 사용하시오. 1.0pt

파트 B: 주요 역학 [6.0점]

이제 우리는 공기와 증기의 혼합물로 구성된 구형 기포의 상세한 동역학을 연구할 것이다. 기포 벽을 통한 공기 이동이 없다고 가정하고, 따라서 전체 역학이 압력에 의해서만 결정된다고 가정하고, 언급한 바와 같이 기포 벽에서 증기의 증발 및 응결이 발생하여 기포 내에서 증기압 p_v 가 유지됨에 주목하시오.

- B.1** 한 개의 구형 기포가 (공간을 균일하게 채우는) 물 안에 존재하고 그 기포가 (예를 들어) 외부 압력 p_∞ 의 변화가 있더라도 구형 모양을 왜곡하지 않고 크기가 변할 수 있다고 가정하라. 기포 반지름 $R(t)$ 와 그것의 시간에 대한 1계 도함수 $R'(t)$ 및 2계 도함수 $R''(t)$, 표면 장력 σ , 물의 밀도 ρ , 기포에서 멀리 떨어진 곳에서의 압력 p_∞ 및 기포 안에서의 압력 p 의 관계를 나타내는 방정식을 유도하시오. 그런 다음 기포 안에 (i) 분압이 p_v 인 증기와 (ii) 공기가 모두 있고, 공기가 단열 과정을 겪으며 단열 지수가 γ 라고 가정하라. 기포의 반지름이 R_0 일 때 공기의 분압이 q_0 이며, 증발, 응결 또는 기포와 주변 물 사이의 공기 이동이 물의 부피에 영향을 미치지 않는다고 가정한다. 1.5pt

- B.2** 외부 압력 $p_\infty = 101 \text{ kPa}$ 하에서 초기에 평형 상태에 있는 반지름 $R_0 = 10^{-5} \text{ m}$ 의 핵을 포함하는 물 탱크가 진공에 노출되어 외부 압력이 갑자기 $p_\infty = 0$ 이 된다. 성장 속도 R' 의 종단(점근적) 값과 이 종단 값에 도달하는 시간을 계산하여라. 1.0pt

- B.3** 외부 압력 $p_\infty = 1.600 \text{ kPa}$ 아래에 있는 물 탱크는 초기에 평형 상태에 있던 반경 $R_0 = 10^{-5} \text{ m}$ 의 기포를 포함하고 있다가, 갑자기 대기압 $p_\infty = 101 \text{ kPa}$ 에 노출되었다. 기포의 크기가 줄다가 다시 커지는데, 다시 커지기 전에 기포의 최소 반경을 계산하여라. 1.0pt

- B.4** 기포에 수증기 이외의 기체가 존재하지 않으면 기포는 유한한 시간 내에 작아져서 완전히 없어진다(붕괴한다). $R(t) \sim (T-t)^\alpha$ 에서 지수 α 를 구하라. 여기에서 T 는 붕괴 시간이다. 0.5pt

- B.5** 문제 B3에서 도출된 방정식을 기반으로 반지름 $R_0 = 0.1 \text{ mm}$ 인 기포의 반경이 커졌다 작아졌다 하는 진동의 고유 진동수를 구하시오. 1.0pt

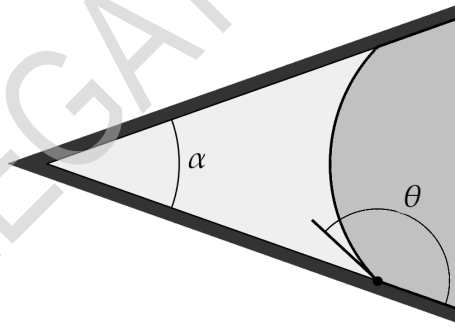
- B.6** 이전 부분에서 설명한 기포가 정상파인 음파의 영향을 받는다고 가정하라. 이 정상파는 $p(x, t) = p_0 + A \sin\left(\frac{2\pi f}{c}(x + a)\right) \sin(2\pi ft)$ 으로 주어지는 압력 분포를 갖는다. 단, 여기서 f 는 주파수이고 c 는 소리의 속도다. 매개변수 p_0 , A 및 a 는 상수이며 그 의미는 방정식에서 쉽게 추론할 수 있다. 기포에 가해지는 평균 힘을 구하여라. 기포는 xyz 좌표계의 원점에 위치하며 그 크기는 소리의 파장보다 훨씬 작다. 1.0pt

파트 C: 확산을 통한 핵의 용해 [2.5점]

파트 B를 보완하는 이 마지막 섹션에서는 기포 벽을 통한 확산 효과에 중점을 둔다.

- C.1** 반지름이 $R_0 = 10^{-5}$ m인, 공기와 증기로 구성된 핵이, 용해된 공기가 물 위의 대기압과 평형을 이루고 있는 물-공기 용액 안에 있다고 가정하자. 기포 내 공기의 분압은 $q = 1.70 \cdot 10^5$ Pa이며 증기압은 무시할 수 있다. 기포가 물에 완전히 재흡수되는 데 필요한 시간을 추정하시오. p_∞ , κ , δ 및 σ 는 표 1에 나온 일반적인 값을 사용하시오. 기포를 둘러싸고 있는 물의 공간(이 공간 안에서 기체 확산이 일어나는데)이 즉시 기포의 처음 크기보다 훨씬 커진다고 가정하시오. 2.0pt

- C.2** 개구각이 α 인 물통 벽의 원추형 틈새(콘)를 고려하시오. 다음 그림을 참조하시오. 콘 내부에는 소량의 공기와 증기가 존재한다. 기계적 및 확산 평형을 이들 조건을 적으시오. 공기 주머니가 사라지지 않고 틈새에 머무르는 조건을 정하시오. 표면에서 물의 접촉각은 θ 이다. 0.5pt



원추형 틈새