

일반 지침 이론 시험(30점)

다음 조건 중 어느 하나라도 지키지 않을 경우 실격 처리될 수 있습니다.

2025년 7월 21일

이론 시험은 5시간 동안 진행되며 총 30점 만점입니다.

시험의 시작과 종료는 방송으로 안내되며, 시험 중에는 매 시간마다 경과 시간이 방송됩니다. 또한 종료 30분, 15분, 5분 전에도 안내 방송이 나옵니다.

지시가 있을 때까지 봉투를 열지 마세요.

(1) 볼펜, (2) 샤프펜, (3) 지우개, (4) 눈금 자, (5) 나침반, (6) 과학용 계산기 등이 준비되어 있습니다.

시험 중

- 제공된 볼펜을 사용하세요. 샤프펜을 사용해 노트, 그림, 표, 그래프 등을 초안으로 작성할 경우, 최종 버전의 윤곽은 반드시 볼펜으로 따라 그려야 합니다.
- 최종 답안에는 **A**라고 표시된 전용 용지에 작성하세요. 해당 칸에 답과 필요한 관찰 내용을 기입하고, 필요한 경우 그래프도 그리세요. 채점되지 않기를 원하는 부분은 줄을 그어 지워 주세요.
- 초안 작성을 위한 **W**라고 표시된 빈 작업 용지가 제공됩니다. 반드시 지정된 용지를 사용하세요. 채점 대상이 아닌 불필요한 답안이나 계산 과정은 줄을 그어 지우세요. 각 용지의 앞면만 사용하며 테두리 바깥 여백은 깨끗하게 유지하세요.
- 요청 시 **Z**라고 표시된 추가 용지를 사용할 수 있습니다. '도움' 깃발을 들고 감독관에게 알리세요.
- 답안은 간결하고 읽기 쉽게 작성하세요. 자신의 생각을 가장 잘 전달할 수 있는 수식, 논리 기호, 기호, 스케치 등을 활용하세요. 채점자가 여러 언어를 이해하지 못 할 수 있으므로, 길고 장황한 설명은 피하세요.
- 별도의 지시가 없는 한 불확실도에 대한 정량 계산은 필요하지 않습니다.
- 허가 없이 부스를 떠나지 마세요. 화장실이나 기타 도움이 필요한 경우 '화장실', '물' 또는 '도움'이라고 표시된 깃발을 들어주세요.

시험이 끝난 후

- 시험 종료가 안내 되면 즉시 답안 작성을 중단합니다.
- 모든 용지를 창이 있는 봉투에 넣으세요. 표지, 일반 지침, 문제지(**Q**), 답안지(**A**), 연습지(**W**), 추가 연습지(**Z**)(있는 경우)의 순서로 앞면이 위로 향하도록 정리합니다. 모든 용지는 페이지 번호 순서대로 정리해야 합니다. 마지막으로 확인할 때, 표지에 적힌 수험 번호, 이름, 좌석 번호가 봉투 창을 통해 잘 보이는지 확인하세요.
- 감독관이 퇴실 가능하다고 안내할 때까지 자리에 앉아 계세요. 볼펜, 샤프펜, 눈금 자, 지우개, 나침반, 과학용 계산기, 물병, 간식 등 나머지 물품은 가져가도 됩니다.

특별 지침

시험 내내 별도의 언급이 없는 한 항상 지침에 명시된 물리량을 기준으로 삼으세요. 모든 경우에, 사용된 모든 물리량의 단위를 반드시 함께 적어야 합니다.

일반 데이터 시트

상수	기호	값	단위
진공 상태에서의 빛의 속도	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
플랑크 상수	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
감소 플랑크 상수	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
볼츠만 상수	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
아보가드로 상수	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
물 기체 상수	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
기본 전하량	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
만유인력 상수	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
중력에 의한 표준 가속도	g	$9.806\,65$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
스테판 볼츠만 상수	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
진공 투자율(자기 상수)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
진공 유전율(전기 상수)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
리드버그 상수	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
전자의 질량	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
양성자의 질량	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
중성자의 질량	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
원자 질량 상수	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
전자 볼트	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

수소와 은하 (10점)

이 문제는 은하의 역학 및 구조와 같은 은하의 독특한 물리학을 연구하는 것을 목표로 한다. 특히 우리 은하 내부에서 은하의 질량 분포를 측정하는 방법을 설명한다. 이를 위해 은하의 주요 구성 성분인 수소에 초점을 맞출 것이다.

이 문제에서는 다음과 같이 정의된 $\hbar$ 만 사용할 것이다. $\hbar = h/2\pi$.

파트 A - 소개

보어 모델

수소 원자는 고정된 양성자 주위를 도는 질량 m_e 의 비상대론적 전자로 구성되어 있다고 가정한다. 전자는 원형 궤도를 돌고 있다고 가정한다.

A.1 반경 r 의 원형 궤도에서 전자의 속력 v 를 구하라.

0.2pt

보어 모델에서는 전자의 각운동량 L 의 크기가 양자화되어 있다고 가정한다. 즉, $L = n\hbar$ 이고 $n > 0$ 은 정수이다. 이후 문제에 이용될 상수 α 는 다음과 같이 정의한다. $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}$

A.2 양자화된 궤도의 반지름이 $r_n = n^2 r_1$ 으로 표현되는 것을 보여라. 여기서 r_1 을 보어 반지름이라고 한다. r_1 를 α , m_e , c 및 $\hbar$ 로 표현하고, 그 값을 계산하여 세 개의 유효 숫자로 표현하라. 반지름 r_1 인 궤도에서의 속력 v_1 을 α 와 c 로 표현하라.

0.5pt

A.3 반지름 r_n 의 원궤도에서 전자의 역학적 에너지 E_n 를 e , ϵ_0 , r_1 및 n 으로 표현하라. 바닥상태 에너지 E_1 을 α , m_e 및 c 로 표현하고, 그 수치를 eV로 계산하라.

0.5pt

수소의 미세 구조 및 초미세 구조

전자의 스핀이 드물게 자발적으로 반전되면 수소 원자 하나당 평균 천만 년에 한 번씩 광자가 방출된다. 이 방출은 우주에서 수소를 추적할 수 있게 하므로 천체 물리학 연구의 근본적인 역할을 한다. 이 방출의 원인을 두 단계로 나누어 이해할 수 있다.

먼저, 전자 스핀과 전자와 양성자의 상대 운동 사이의 상호작용을 고려한다. 전자의 입장에서는 양성자가 전자의 주위를 r_1 의 반경으로 원운동 한다. 이러한 양성자의 운동은 자기장 $\vec{B}_1$ 을 생성한다.

A.4 전자의 위치에서 $\vec{B}_1$ 의 크기 B_1 을 μ_0 , e , α , c 및 r_1 으로 표현하라.

0.5pt

둘째, 전자 스핀은 자기 모멘트 $\vec{\mathcal{M}}_s$ 를 생성한다. 그 크기는 대략 $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$ 이다. 미세 (F) 구조는 $\vec{B}_1$ 에 평행한 자기모멘트 $\vec{\mathcal{M}}_s$ 를 가진 전자와 $\vec{\mathcal{M}}_s$ 에 반평행한 자기모멘트 $\vec{B}_1$ 를 가진 전자 사이의 에너지 차이 ΔE_F 와 관련이 있다. 비슷하게, 초미세 (HF) 구조는 전자와 양성자의 평행 및 반평행 자기모멘트 사이의 상호작용으로 인한 에너지 차이 ΔE_{HF} 와 관련이 있다. 두 에너지 차이의 관계는 대략 다음과 같다. $\Delta E_{HF} \approx 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$ (m_p 는 양성자 질량)

A.5 ΔE_F 을 α 와 E_1 의 함수로 표현하라. 초미세 구조의 두 에너지 상태 사이의 전이에서 방출되는 광자의 파장 λ_{HF} 를 표현하고 두 개의 유효 숫자로 그 값을 구하라.

0.5pt

파트 B - 은하의 회전 곡선

데이터

- Kiloparsec: $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$

- Solar mass : $1M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

고정된 점 O 을 중심으로 한 구형 은하를 고려하자. 임의의 지점 P 에서 질량 밀도는 $\rho = \rho(P)$ 이고 이에 관련된 중력 포텐셜(단위 질량당 포텐셜 에너지)은 $\varphi = \varphi(P)$ 이다. ρ 와 φ 는 모두 $r = \|\overrightarrow{OP}\|$ 에만 의존한다. 포텐셜 φ 에 의한 P 에 위치한 질량 m 의 운동은 O 을 포함하는 평면에 국한된다.

B.1 P 를 지나는 원형 궤도 위 물체의 속력 v_c 를 r 과 $\frac{d\varphi}{dr}$ 로 표현하라.

0.2pt

그림 1(A)는 애리조나에 있는 마운트 레몬 스카이 센터의 0.8m 술만 망원경으로 촬영한 가시광선 대역의 나선 은하 NGC 6946의 사진이다. 그림 1(B)의 작은 타원들은 이 은하에서 v_c 의 관측값들이다. 중앙 영역($r < 1 \text{ kpc}$)을 Bulge(은하 중심의 밀집된 별무리)라고 부른다. 이 영역에서 질량 분포는 대략 균일하다. 빨간색 곡선은 은하의 전체 질량이 Bulge에 집중되어 있다고 가정했을 때, 즉 시스템이 Bulge 내부에서는 균일하고 외부에서는 케플러($\varphi(r) = -\beta/r, \beta > 0$)인 경우, v_c 의 예측치이다.

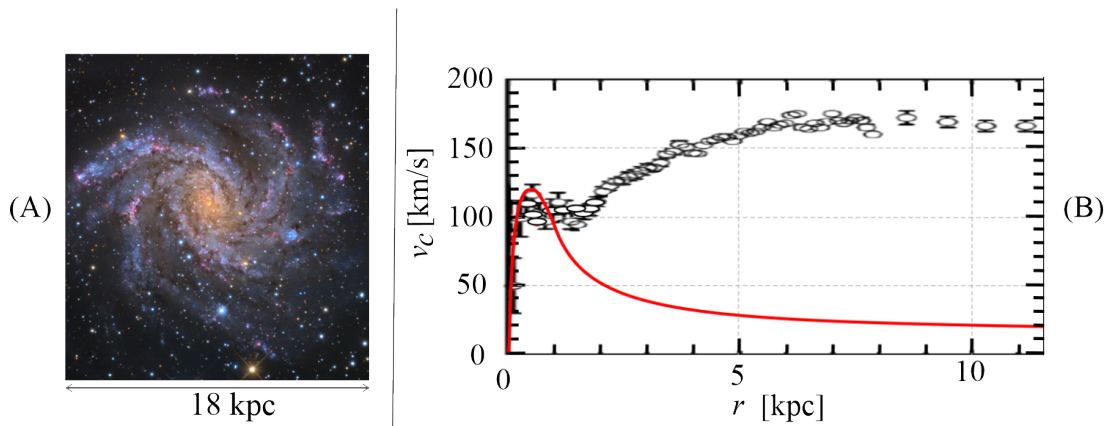


그림 1: NGC 6946 은하: 사진(A) 및 회전 곡선(B).

B.2 그림 1(B)의 빨간색 곡선으로부터 NGC 6946 Bulge의 질량 M_b 를 태양 질량 단위로 구하라.

0.5pt

케플러 모델과 실험 데이터를 비교하면 천문학자들은 질량의 일부가 그림에서 보이지 않는다고 확신한다. 따라서 그들은 은하의 실제 질량 밀도가 다음과 같다고 가정한다.

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

여기서 $C_m > 0$ 및 $r_m > 0$ 은 상수이다.

- B.3** 식 (1)의 질량 밀도에 해당하는 속력을 $v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan(\frac{r}{r_m})}{r}}$ 으로 쓸 수 있음을 보이 1.8pt
고, k_1 와 k_2 을 C_m , r_m , G 로 표현하라.

힌트 1: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a),$

힌트 2: $x \ll 1$ 의 경우, $\arctan(x) \simeq x - x^3/3.$

$r \ll r_m$ 일 때와 $r \gg r_m$ 일 때 $v_{c,m}(r)$ 의 단순한 표현을 구하라.

$r \gg r_m$ 일 때, 반지름 r 인 구 영역의 질량 $M_m(r)$ 은 단순화되고 C_m 과 r 에만 의존한다는 것을 보여라(질량 밀도는 식 (1)에 의해 주어짐).

그림 1(A)의 그림에서 보여지는 것과 보여지지 않는 것을 포함한 은하 NGC 6946의 실제 질량을 추정하라.

파트 C - 우리 은하의 질량 분포

나선 은하의 경우, 식 (1)은 다음과 같은 중력 퍼텐셜로 수정된다.

$$\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right],$$

여기서 z 는 은하면(galactic plane: 나선은하의 얇고 평평한 원반(disk) 구조)까지의 거리이며 (은하면이 $z = 0$ 로 정의 됨), $r < r_0$ 은 축 반경 (axial radius)이다. $\varphi_0 > 0$, r_0 , z_0 는 상수이다.

- C.1** 위와 같이 수정된 퍼텐셜을 이용하여, 점 질량 m 의 수직 방향 운동 (r 이 일정하다고 가정) 0.5pt
즉, z 방향에 대한 운동 방정식을 구하라. 만약 $r < r_0$ 이면, 은하면에 아주 가까운 물체는 각 주파수 ω_0 로 진동운동을 하며, 이것은 은하면이 안정된 평형 상태임을 뜻한다. 이 때, 각 주파수 ω_0 를 구하라.

여기서부터 $z = 0$ 경우를 고려한다.

- C.2** 식 (1)의 모델은, $r \gg r_m$ 과 $r \ll r_m$ 중 둘 중 하나의 영역에 대해 위에 제시된 $\varphi_G(r, 0)$ 형태의 0.6pt
포텐셜이 될 수 있다. $r \gg r_m$ 과 $r \ll r_m$ 중 둘 중 어떤 것인지 찾아라. 이 때 $\varphi_G(r, 0)$ 의 φ_0 를 구하시오.
이 조건하에서는 $v_c(r)$ 는 더 이상 r 에 의존하지 않는다. 이경우의 속력 $v_c(r)$ 을 φ_0 로 표현하라.

따라서 bulge 바깥쪽의 속력 v_c 는 은하 중심까지의 거리에 의존하지 않는다. 이 사실을 은하 내부에서 은하의 질량 분포를 측정하는 데 사용할 것이다.

별이나 성운과 같이 천체 관측을 위해 여기에서 고려되는 은하계 천체는 주로 수소로 구성되어 있다. Bulge 바깥에서는 은하 중심 C 를 중심으로 원형 궤도를 돌고 있다고 가정한다. S 는 태양의 위치이고 E 는 수소 스펙트럼을 방출하는 특정 은하 물체의 위치이다. 은하면에서는 관측 방향에 해당하는 가시선(line of sight) SE 를 단위 벡터 $\hat{n}_v$ 로 표현한다.(그림 2 참조).

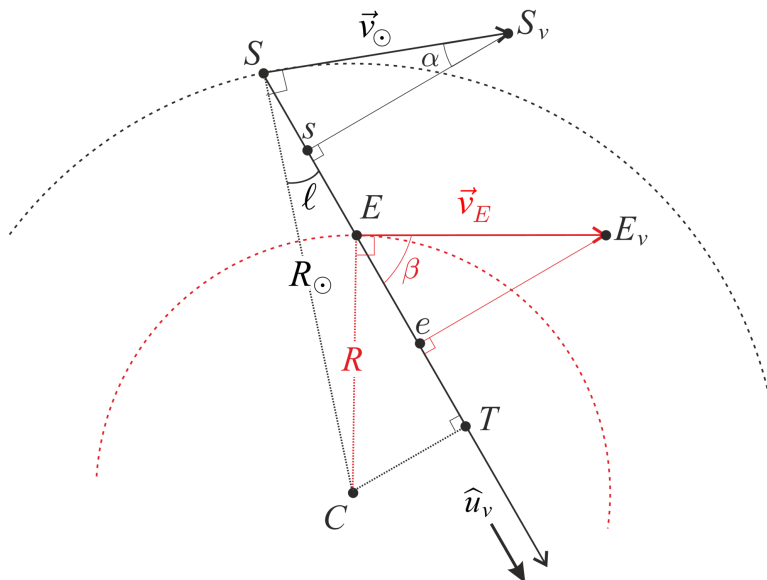


그림 2: 측정의 기하학적 구조

SC 와 SE 사이의 각도 ℓ 을 은하 경도라고 한다. 반경 $R_{\odot} = 8.00\text{kpc}$ 의 원형 궤도를 도는 태양의 속도는 $\vec{v}_{\odot}$ 으로 표시한다. E 에 있는 은하 물체는 반경 R 의 다른 원 궤도를 속도 $\vec{v}_E$ 로 공전한다. 앞 문제에서 공부한 수소 스펙트럼 21cm선에 대한 도플러 효과를 사용하면 태양 S 에 대한 은하 물체 E 의 "상대 속도" $v_{rE/S}$ 를 얻을 수 있다: 이 상대 속도는 가시선(line of sight) SE 에 대한 $\vec{v}_E - \vec{v}_{\odot}$ 의 투영이다.

C.3 $v_{rE/S}$ 를 ℓ , R , $R_\odot$ 및 $v_\odot$ 로 표현하라. 그런 다음 R 를 $R_\odot$, $v_\odot$, ℓ 및 $v_{rE/S}$ 로 표현하라. 0.7pt

전파 망원경으로 우리 은하면에서 경도 $\ell = 30^\circ$ 를 향해 관측한다. 사용된 주파수 대역은 21 cm 라인(주파수로는 $f_0 = 1.42 \text{ GHz}$)을 포함한다. 관측 결과는 그림 3에 나와 있다.

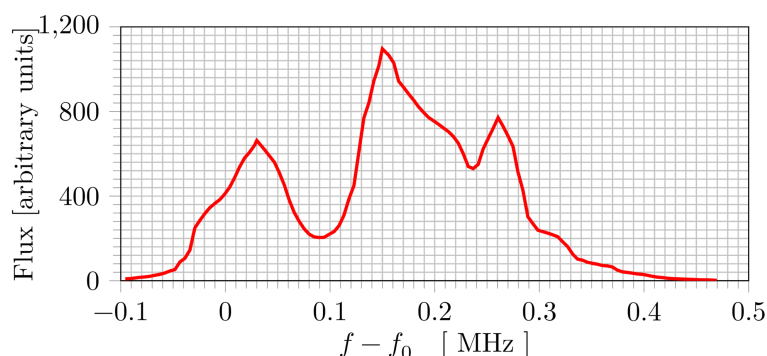


그림 3: 주파수 이동의 함수로서의 전자기 신호: EU-HOU RadioAstronomy를 사용하여 $\ell = 30^\circ$ 일 때 전파 주파수 대역에서 측정한 값이다.

C.4 우리 은하에서 $v_{\odot} = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 이다. 그림 3에서 관측된 세 광원의 태양에 대한 상대 속도 (유효 자릿수 3자리)와 은하 중심으로부터의 거리(유효 자릿수 2자리)를 구하라. 거리는 $R_{\odot}$ 의 배수로 표현해야 한다. 0.6pt

- C.5** 답안지에 있는 우리 은하 평면도에 그림 3에서 관측된 광원의 위치를 표시하라. 이 측정을 ℓ 을 바꾸어 가면서 반복한다면, 그 결과로부터 무엇을 추론할 수 있는가? 0.6pt

파트 D - 툴리-피셔 관계와 MOND 이론

그림 1에 나타나는 NGC 6946 외부에서의 일정한 속력은 그림 4 (왼쪽)에서 볼 수 있듯이 나선 은하의 공통적인 특성이다. 외부 등속도 값 $v_{c,\infty}$ 을 은하의 총 질량 M_{tot} 의 함수로 그리면, 툴리-피셔 관계라는 흥미로운 상관관계가 나타난다(그림 4 (오른쪽) 참조).

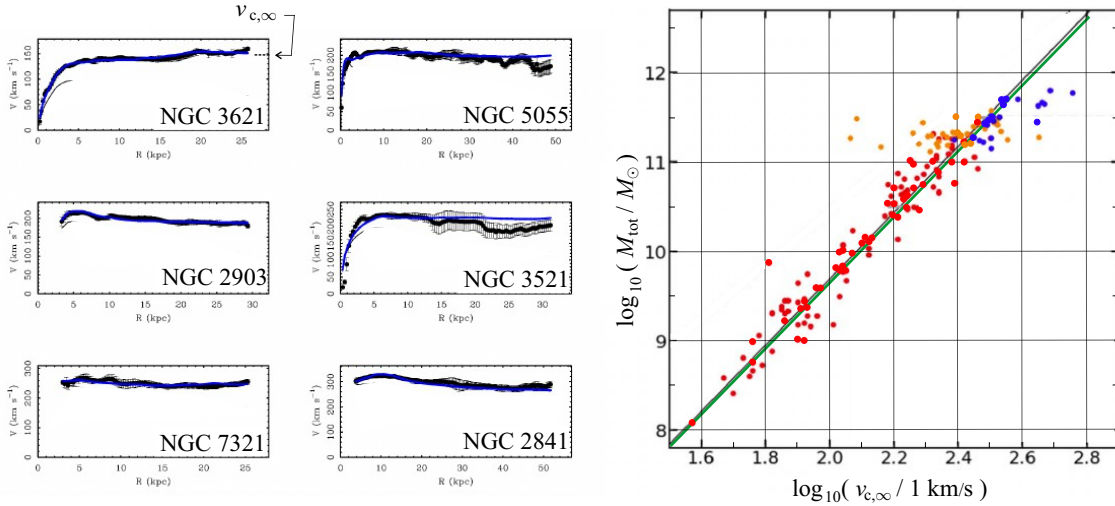


그림 4. 왼쪽: 전형적인 나선 은하의 회전 곡선 - 오른쪽: $\log_{10}(v_{c,\infty})$ 의 함수로서 $\log_{10}(M_{\text{tot}})$. 색깔 점들은 다른 은하와 다른 조사에 해당한다. 녹색 선은 툴리-피셔 관계이고, 데이터를 가장 잘 대표하는 선(검은색)과 매우 잘 일치한다.

- D.1** 은하의 반지름 R 이 질량에 의존하지 않는다고 가정하면, 파트 B의 식 (1)의 모델이 $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$ 관계를 줄 수 있음을 보이고, γ 및 η 를 결정하라. 위 그림의 데이터로부터 얻는 툴리-피셔 관계식의 지수를 γ_{TF} 라고 할 때 이것을 구하고, 앞에서 구한 지수와 비교하라. 0.4pt

$a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 정도의 극도로 낮은 가속도 영역에서, 수정 뉴턴 역학(MOND: MODified Newtonian Dynamics) 이론에 따르면 $\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$ 을 사용하여 뉴턴의 제2법칙을 수정할 수 있으며, 여기서 $a = \|\vec{a}\|$ 은 가속도의 크기이고 μ 함수는 $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$ 으로 정의된다.

- D.2** 그림 1의 NGC 6946에 대한 데이터를 사용하고, 뉴턴의 이론을 이용하여 NGC 6946의 외부 영역에 있는 질량의 가속도 크기 a_m 를 추정하라. 0.2pt



Q1-6

Korean (Korea (Republic of))

D.3 질량 m 이 고정된 질량 M 의 중력장의 영향을 받아 속도 $v_{c,\infty}$ 로 반경 r 의 원형 궤도를 돌고 있다고 하자. MOND 이론을 이용하여 $a \ll a_0$ 인 경우 툴리-피셔 지수를 구하라. 0.8pt
NGC 6946의 관측 데이터, 그리고/혹은, 툴리-피셔 법칙을 이용하여 MOND가 올바른 영역에서 잘 작동한다는 것을 보이기 위해 a_0 을 구하라.

D.4 반경 R_b 안에서 균일하게 분포된 질량 M 으로 인한 중력장의 경우, MOND 이론을 이용하여 r 의 모든 영역에 대해 $v_c(r)$ 을 구하라. 0.9pt

콕스 시계 (10 points)

1765년 영국의 제임스 콕스는 오직 대기압의 변화를 에너지원으로 사용하는 시계를 발명했다. 콕스 시계는 수은이 든 두 개의 용기를 사용하며, 대기압이 변하면 수은이 한 용기에서 다른 용기로 이동하며 두 용기 사이에 상대적인 움직임을 이용해 시계를 작동시킨다.

이 문제에서는 콕스 시계를 분석한다. 모든 문제에 대하여 다음과 같은 가정을 한다.

- 지구의 중력장은 다음과 같이 일정하다.
($\vec{g} = -g \vec{u}_z$, $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\vec{u}_z$ 는 단위벡터다.)
- 모든 액체는 비압축성이며 밀도는 ρ 이다.
- 표면 장력에 의한 효과는 고려하지 않는다.
- 대기압은 고도에 상관없이 일정하다.
- 온도 T_a 는 균일하며 모든 물리적 과정은 등온과정이다.

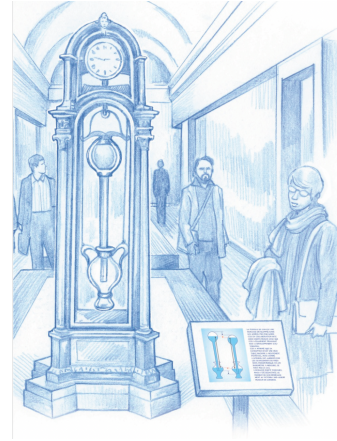


그림 1. 콕스 시계의 실제 모습¹

파트 A - 물에 잠긴 튜브의 당김

그림 2와 같이 원통형 튜브가 담겨 있는 물 표면을 고려하자. 튜브 상단의 높이는 h , 튜브 내부의 물의 높이는 z_ℓ 로 표시한다. 물은 $z \leq 0$ 의 높이까지 고정되어 가득 차있으며, 물 표면에 작용하는 기압은 $p_a = p_0$ 이다. 튜브의 길이는 $H = 1 \text{ m}$, 단면적은 $S = 10 \text{ cm}^2$, 질량은 $m = 0.5 \text{ kg}$ 이다. 튜브의 하단은 열려 있고, 상단은 닫혀 있다. 튜브 벽의 두께는 무시한다.

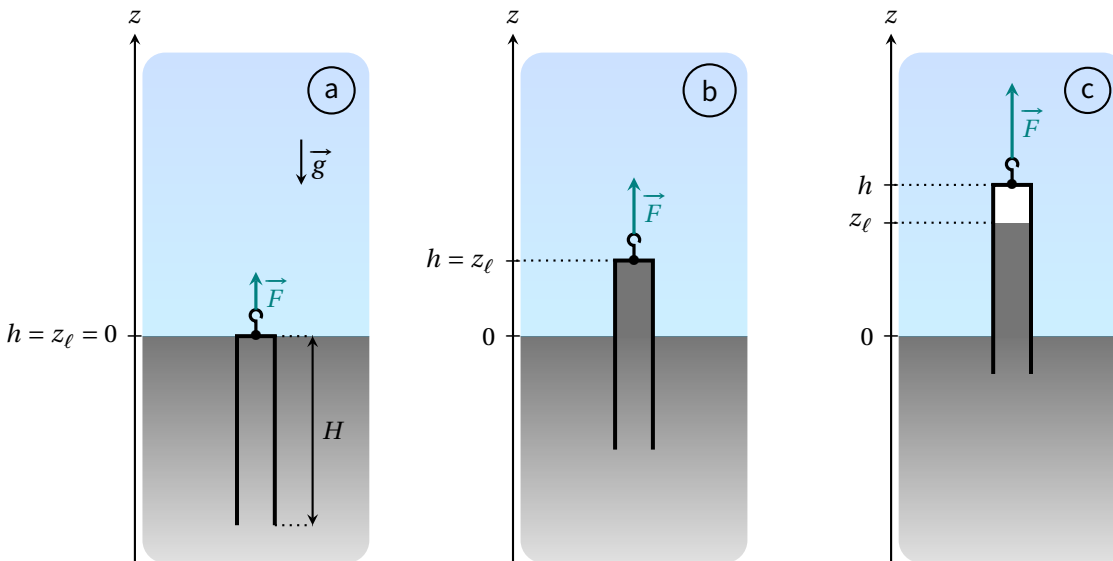


그림 2. 각 과정에서의 튜브의 모습

그림2(a)와 같은 초기 상태를 고려하자. 튜브 내부는 빈 공간이 없고, 상단이 수면 높이와 정확히 같은 상태다. (즉, $h = 0$)

및 $z_\ell = 0$ 이다.) 이 상태에서 튜브의 하단이 물 표면에 닿을때까지 천천히 위쪽으로 잡아당기는 과정을 겪는다. 당기는 힘을 $\vec{F} = F \vec{u}_z$ 으로 표시한다.

- A.1** 이후 그림2(b)와 같은 상황이 되었을 때, 튜브의 상단 지점에 작용하는 물의 압력 P_w 을 0.2pt 수식으로 표현하시오. 튜브를 일정 높이에 잡아두는 데 필요한 힘 $\vec{F}$ 를 구하시오. (단, 위 두 문제의 답은 $P_0, \rho, m, S, h, g, \vec{u}_z$ 를 이용해 표현해야함.)

서로 다른 세 번의 실험을 진행한다. 각 실험은 그림 2(a)와 같은 초기상태에서 시작하며, 각 실험의 조건은 표 1을 따른다.

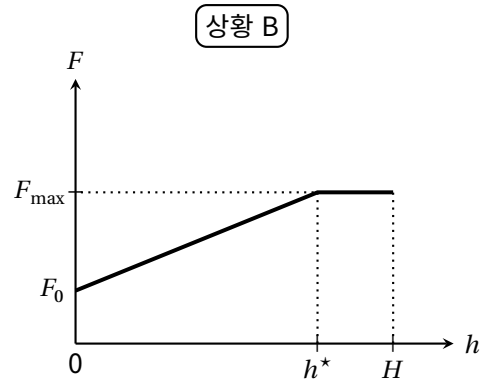
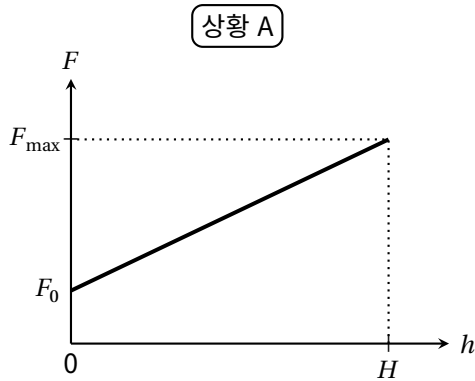
실험	액체	T_a (°C)	ρ (kg·m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
1	물	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	물	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	물	99	0.96×10^3	99.8×10^3

표 1. 각 실험 조건 및 물리량 데이터

(P_{sat} 은 액체의 포화증기압을 나타낸다.)

튜브의 높이 h 에 따른 힘 F 의 변화를 고려할 때, 아래 그림과 같이 두 가지 서로 다른 상황이 일어날 수 있다.

(외부 압력은 $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Pa 로 항상 고정한다.)



- A.2** 각 실험 조건에 대하여, 예상되는 상황(A 또는 B)를 표시하고 F_{max} 와 h_t^* 의 수치값을 0.8pt 답안지의 표에 작성하시오. (F_{max} 와 h_t^* 는 위 그림에 정의되어 있다.)

이제 물을 수은으로 대체했더니 상황 B가 관찰 된다.

(수은의 성질은 아래와 같다.)

액체	T_a (°C)	ρ (kg·m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
수은	20	13.5×10^3	0.163

- A.3** 기압이 P_0 하에서 포화 증기압 P_{sat} 을 무시했을 때와 고려하였을 때, 두 가지 경우를 비교하고 0.3pt
두 경우의 최대 힘 F_{max} 의 상대적 차이(error) ε 의 수식을 구하고 수치값을 계산하라.

파트 B - 두 부분으로 구성된 튜브

이 문제부터 상온 $T_a = 20^\circ\text{C}$, 포화 증기압 $P_{\text{sat}} = 0$.
이며 액체는 수은(밀도 $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$)을 고려
한다.

그림 3과 같이, 상단에 두꺼운 원통이 달려 있는 튜브를
고려하자. 이 장치는 서로 크기가 다른 두 개의 원통을
붙여놓은 형태로 생각할 수 있다.

- 하단 부분(튜브라고 지칭함)의 단면적은 S_t 이고
높이는 $H_t = 80 \text{ cm}$;
- 상단 부분(벌브라고 지칭함)의 단면적은 $S_b > S_t$
이고 높이는 $H_b = 20 \text{ cm}$ 임.

이 두 부분으로 구성된 장치를 수조에 담근다.

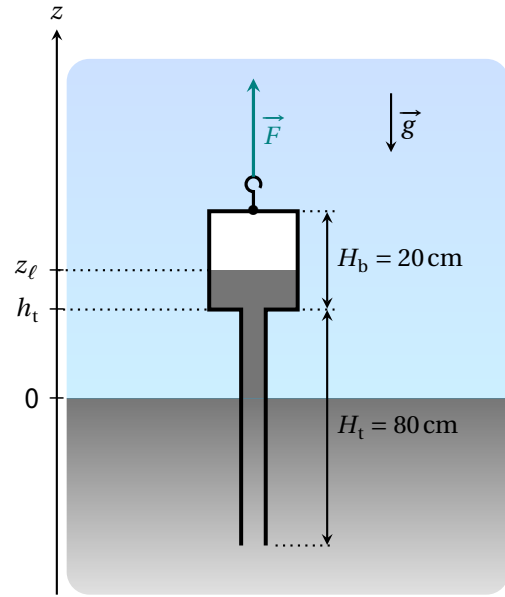


그림 3. 두 부분으로 구성된 장치의 그림

파트 A의 경우처럼, 액체로 가득 찬 채로 잠겨있는 초기 상태로 고려하자. 이 때 튜브-벌브 접합부의 높이를 h_t 로
나타내고, 수은의 높이는 z_ℓ 로 나타낸다. 그림 3과 같은 상황에서, 당기는 힘 $\vec{F}$ 는 다음과 표현할 수 있다.

$$\vec{F} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}}) g \vec{u}_z \quad (1)$$

여기서 m_{tb} 은 튜브 자체의 총 질량이다.(수은이 비어 있는 경우)

- B.1** 답안지에 식 (1)의 m_{add} 에 해당하는 액체 수은의 부피 영역을 색칠 하시오.

0.3pt

질량 m_{add} 은 높이 h_t 와 대기압 P_a 에 따라 달라진다. 다음 문제에서는 대기압이 $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$ 로 고정되어
있다고 가정한다. 튜브가 완전히 잠긴 상황부터 시작하여 기둥의 바닥이 액체 높이와 수평이 될 때까지 천천히 들어
올린다.

- B.2** $h_t \in [-H_b, H_t]$ 구간에서 질량 m_{add} 이 h_t 에 따라 어떻게 변하는지 나타내는 그래프를 그 1.4pt
리시오. 그래프는 기울기가 꺾이는 지점(angular points)의 가로축 좌표와 각 구간에서의
기울기를 함께 표현해야한다.

대기압을 $P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ 로 고정한 채로 튜브를 들어올리다가, 액체의 표면이 벌브의 중간지점에 도달할 때 멈춘다. 이
상태로 튜브를 고정된 후, 아래의 식으로 주어지는 대기압의 변화에 따라 질량 m_{add} 의 변화를 관찰한다.

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

여기서 P_0 은 대기압의 평균값을 나타내고, P_1 은 이에 더해지는 작은 변화량을 의미한다. 이 변화량 P_1 을 다음과 같은 주기적인 삼각형 모양의 함수로 모델링하며, 진폭은 $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$, 주기는 $\tau_1 = 1$ 주(week)다.

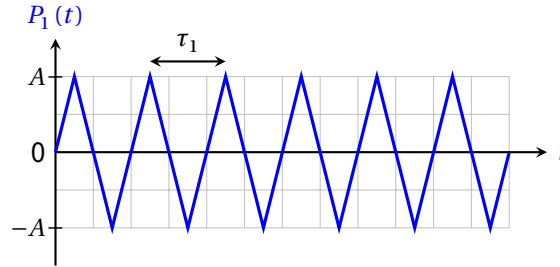


그림 4. 모델링한 변화량 $P_1(t)$

- B.3** 튜브 단면적이 $S_t = 5 \text{ cm}^2$, 밸브 단면적이 $S_b = 200 \text{ cm}^2$ 일 때, 질량 m_{add} 의 시간에 따른 변화의 진폭 Δm_{add} 을 수식으로 표현하고 수치값과 함께 구하라. 액체의 표면은 항상 밸브 (bulb) 내부에 머무르고 있다고 가정한다. 0.3pt

파트 C - 콕스 시계

그림 5와 같이 콕스가 실제로 개발한 장치는 복잡하다. 우리는 그림 6에 묘사된 단순화된 버전을 고려한다.

- 수은을 담고 있는 원통 수조(cistern) 가 있다.
- 파트 B에서와 같이 두 부분으로 구성된 튜브가 있으며 액체가 가득찬 채로 수조에 담겼다;
- 수조와 튜브는 각각 별도의 케이블로 매달려 있다. 두 케이블(늘어나지 않고 질량은 무시함)은 이상적인 도르래 (ideal pulleys)들을 통과하여, 수평 방향으로 움직일 수 있는 질량 M 의 양쪽에 연결되어 있다;
- 액체 수은의 총 부피는 $V_\ell = 5 \text{ L}$ 이다.

각 부품의 높이, 단면적 및 질량은 표 2에 주어져 있다. 질량 M 의 위치는 질량중심을 기준으로 하며 좌표 x 로 나타낸다.

수평 지지대와 질량 M 사이의 마찰을 고려한다. 정지마찰계수와 운동마찰계수는 구분하지 않으며, 슬라이딩이 발생할 때 마찰력의 크기는 F_s 로 표시한다.

두 개의 멈춤 장치가 있어서, 질량 M 의 이동 범위는 항상 $-X \leq x \leq X$ ($X > 0$)사이로 제한된다. X 의 값은 다음 조건들을 만족하도록 설정되어있다.

- 튜브 바닥은 수조 바닥에 닿거나 액체 표면 위로 빠져나오지 않는다;
- 수은의 높이 z_ℓ 는 항상 밸브 내부에 위치한다.

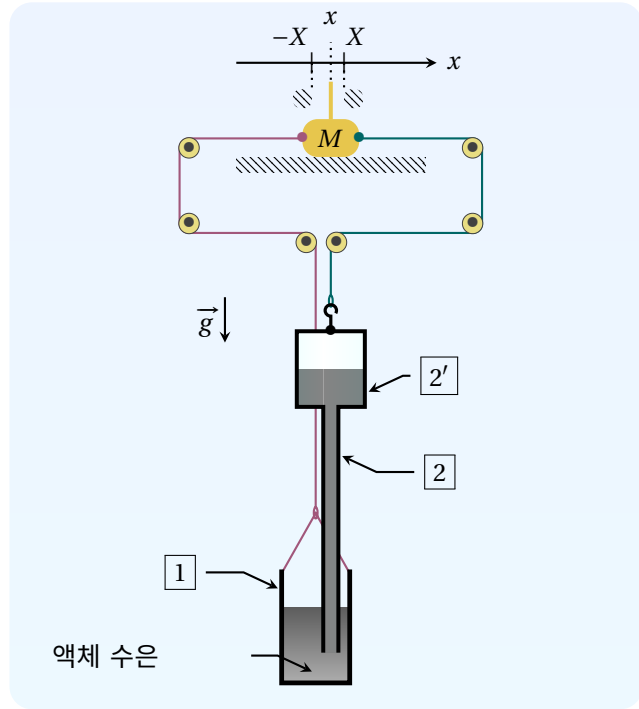
그림 5. 실제 콕스의 시계² (수는 없음)

그림 6. 콕스 시계의 간단한 모형

참조	이름	높이	단면적	질량 (액체 없음)
[1]	수조	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
[2]	튜브	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	장치의 총 질량 : m_{tb}
[2']	벌브	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

표 2. 각 부품의 크기와 질량

대기압이 앞에서 본 그림 4와 같이 주기적으로 변한다. 초기 시각 ($t = 0$) 에서 질량 M 은 $x = 0$ 에 정지해 있으며, 이때 두 케이블이 잡아당기는 장력은 서로 균형을 이룬다. 압력 변화량은 $p_1(0) = 0$ 이다. (여전히 진폭은 $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$, 주기는 $\tau_1 = 1 \text{ week}$ 이다.)

이제 다음과 같은 양을 정의한다.

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

위의 근사식은 다음 조건을 이용한 것이다: $S_t \ll S_b, S_c$ (위 근사식의 가정은 이 문제의 끝까지 적용한다.)

- C.1** 질량 M 이 영구히 정지 상태에 머무르게 되는 임계값 ξ^* 을 구하시오. 즉, $\xi > \xi^*$ 일 때, 질량은 정지 상태에 머무른다. 1pt

다음 문제에서만 질량 M 이 멈춤장치에 의해 $x = X$ 위치에 잠시 멈추어 있다고 가정한다.

- C.2** 이 위치에서 $P_1 = 0$ 일 때, 두 케이블이 질량에 가하는 총 장력 $\vec{T} = T \vec{u}_x$ 을 ρ, g, X 그리고 단면적들에 대한 수식으로 나타내시오. 1pt

$\xi < \xi^*$ 일 때, $x = 0$ 과 $P_1 = 0$ 를 초기 조건으로 고려할 경우, 두 가지 다른 운동($t \geq 0$)이 관찰되며, 이를 구분하기 위 다음 변수를 도입한다.

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

- C.3** 답안지의 표를 작성하여, 두 가지 다른 운동을 관찰할 조건을 각각 표시하시오. 조건은 ξ 와 λ 를 이용한 부등식으로 표현해야 한다. 2pt
또한, 주어진 압력 변화 $P_1(t)/A$ 에 따른, $x(t)/X$ 를 $t \in [0, 3\tau_1]$ 의 영역에서 그래프를 스케치하시오. 그래프에 정확한 좌표는 표기하지 않아도 된다.

실제 콕스 시계에서는 에너지를 따로 저장했다가 무게추를 들어 올리는 데 사용한다.

이 문제의 간단화된 모형에서는, 시계가 얻는 에너지가 질량 M 의 마찰력에 의해 소모되는 에너지와 정확히 일치한다고 하자. 시스템이 에너지를 지속적으로 얻을 수 있도록 동작한다고 가정하며, 정상상태(permanent regime)에 도달했다고 하자. 한 주기 τ_1 동안, 마찰력에 의해 소모되는 에너지 W 를 F_s 와 X 로 표현할 수 있다.

다른 조건들이 모두 일정할 때, W 가 최대가 되도록 F_s 와 X 를 조절할 수 있고, 이 때 각각의 값을 F_s^* 와 X^* 로 나타낸다.

- C.4** $S_b \simeq S_c$ 과 $S_t \ll S_b$ 를 가정하고, F_s^* 과 X^* 를 ρ, g, S_c, A 에 대한 함수로 구하라. 1pt
이 때 최대 에너지 W^* 의 수식을 구한 뒤, $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ 를 사용하여 그 수치값을 계산하라.

위의 최대 에너지 상황에서 한 주기 τ_1 동안, 대기압이 전체 시계 시스템에 가한 일을 W_{pr}^* 로 나타낸다.

- C.5** W_{pr}^* 을 수식으로 나타내고, 비율 W^*/W_{pr}^* 을 계산하시오. 1.7pt
이 문제를 풀기 위해, 시스템의 시간변화를 압력-부피(P-V) 그래프에 나타내는 것이 유용하다. V는 전체 시계 시스템의 부피다.

참조:

[1]: 브루노 바카로;

[2]: 빅토리아 앤 앨버트 박물관, 런던.

샴페인! (10점)

경고: 과도한 음주는 건강에 해로우며 법적 연령 미만의 음주는 금지되어 있습니다.

샴페인은 프랑스의 스파클링 와인이다. 병 안에서 당분이 발효되면서 이산화탄소 (CO_2)가 생성된다. 액체 내 CO_2 의 몰 농도 c_ℓ 과 기체 내 CO_2 의 분압 P_{CO_2} 사이의 관계는 $c_\ell = k_H P_{\text{CO}_2}$ 로 주어진다. 이는 헨리의 법칙 (Henry's law)으로 알려져 있으며, 여기서 k_H 는 헨리 상수이다.

데이터

- 샴페인의 표면 장력 $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- 샴페인 액체의 질량 밀도 $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- 온도 $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 에서의 헨리 상수, $k_H(20^\circ\text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- 온도 $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 에서의 헨리 상수, $k_H(6^\circ\text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- 대기압 $P_0 = 1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- 기체는 이상 기체이며, 단열 계수는 $\gamma = 1.3$ 이다.



그림 1. 샴페인이 가득 담긴 잔.

파트 A. 기포의 형성과 성장과 상승

온도가 $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 인 샴페인 병을 연 직후, 잔에 따랐다. 이 때 액체 내부의 압력은 P_0 이고, 온도는 일정하게 유지되고 있다. 샴페인에 용해되어 있는 CO_2 의 농도 c_ℓ 는 평형 농도보다 높으며, 우리는 CO_2 기포의 생성을 살펴볼 것이다. 기포의 반경은 a 로, 내부 압력은 P_b 라고 표기한다.

A.1 압력 P_b 을 P_0 , a 및 σ 의 식으로 표현하시오.

0.2pt

액체 안에서 용해된 CO_2 의 농도는 기포로부터의 거리에 따라 달라진다. 헨리의 법칙에 따라 기포 표면 가까이에서는 농도가 $c_b = k_H P_b$ 로 주어지며, 기포에서 멀리 떨어지면서 농도는 c_ℓ 값으로 수렴한다. 모든 문제에서 우리는 기포가 CO_2 만을 포함하고 있다고 가정한다.

$c_\ell \neq c_b$ 일 때, CO_2 분자는 농도가 높은 곳에서 낮은 곳으로 확산한다. 우리는 액체 내 CO_2 분자가 기포 표면에 도달하면 모두 기포 내 기체로 전달된다고 가정한다.

A.2 기포의 반경이 어느 값 이상이 되면 기포는 계속 커질 것으로 예상된다. 이 임계 반경 a_c 을 P_0, σ, c_ℓ 과 c_0 의 식으로 표현하시오. 여기서 $c_0 = k_H P_0$ 이다. $c_\ell = 4c_0$ 인 경우, a_c 의 값을 계산하시오.

0.5pt

실제로 기포는 이미 존재하고 있던 기체 공동(cavity)에서 성장한다. 이제 초기 반경이 $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$ 인 기포를 고려하다. 단위 면적당, 단위 시간 동안 기포 표면을 통해 전달되는 CO_2 몰 수를 j 라고 표기하자. 이 j 에 대해서 두 가지 모델이 가능하다.

- 모델 (1): $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$. 여기서 D 은 액체 내 CO_2 의 확산 계수이다.
- 모델 (2): $j = K(c_\ell - c_b)$. 여기서 K 은 상수이다.

실험에서, 기포 반경 $a(t)$ 는 시간에 따라 그림 2와 같이 변화하는 것이 관측되었다. 여기서 $c_\ell \approx 4c_0$ 이었고, 또한 기포는 육안으로 보일 정도로 충분히 크기 때문에 표면 장력에 따른 압력은 무시할 수 있고, $P_b \approx P_0$ 이다.

- A.3** 기포 안에 있는 CO_2 의 몰 수 n_c 를 a, P_0, T_0 와 이상기체 상수 R 의 식으로 표현하시오. 두 가지 모델에 대해 $a(t)$ 를 각각 구하시오. 그 중 어떤 모델이 **그림 2**의 실험 결과를 설명하는지 밝히시오. 답안에 따라, K 또는 D 의 값을 수치적으로 계산하시오. 1.2pt

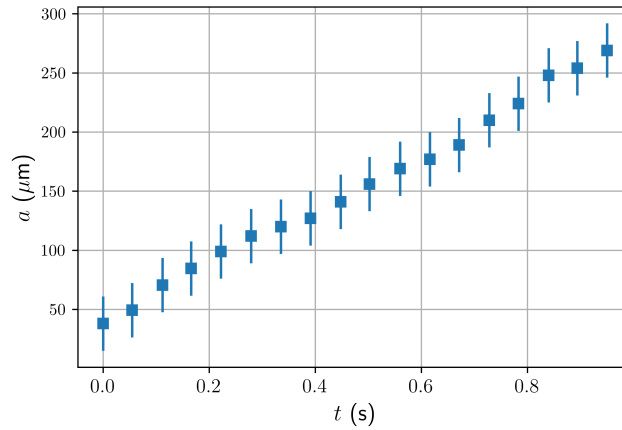


그림 2. 샴페인 잔 속 CO_2 기포 반경의 시간에 따른 변화(자료 출처: [1]).

결국 기포는 유리잔 바닥에서 분리되어 떠오르게 되는데, 상승하는 동안 계속 성장한다. **그림 3**은 생성된 기포의 행렬을 보여준다. 기포들은 모두 동일한 초기 반경을 갖으며 일정한 주파수 $f_b = 20\text{Hz}$ 로 생성되고 있다.

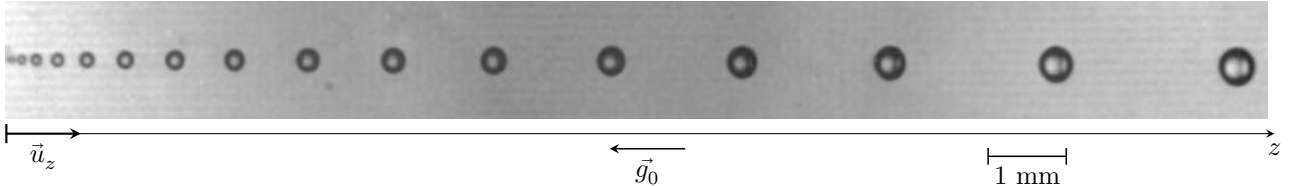


그림 3. 기포 행렬. 페이지 레이아웃을 위해 사진은 가로로 회전되었다. (자료 출처: [1]).

이 문제에서 다루는 속도 범위 내에서는, 움직이는 기포에 작용하는 유체의 저항력 F 은 다음과 같은 스토토크 법칙으로 주어진다. $F = 6\pi\eta av$. 여기서 η 는 액체의 점성 계수이고, a 는 기포 반경, v 는 기포의 속도이다. 측정 결과에 따르면, 각 순간에 기포는 항속도 (terminal velocity)로 이동하고 있다고 가정할 수 있다.

- A.4** 수직으로 상승하는 기포에 가해지는 주요한 힘들을 수식으로 나타내시오. $v(a)$ 의 식을 구하시오. ρ_ℓ 와 g_0 그리고 **그림 3**에서 측정할 수 있는 물리량을 이용하여 η 의 값을 수치적 추정하시오. 0.8pt

기포가 상승하는 동안 기포의 성장률 $q_a = \frac{da}{dt}$ 은 거의 고정되어 있다.

- A.5** 기포가 표면에 도달하였을 때의 기포 반경 a_{H_ℓ} 을 기포가 이동한 높이 H_ℓ , 반경 성장률 $q_a = \frac{da}{dt}$ 및 필요한 상수의 식으로 표현하시오. 여기서 $a_{H_\ell} \gg a_0$ 와 q_a 는 일정하다는 것을 가정하라. $H_\ell = 10\text{cm}$ 와 **그림 2**에서의 q_a 값을 사용하여 a_{H_ℓ} 의 수치 값을 구하시오. 0.5pt

샴페인 잔 바닥에 N_b 개의 기포 생성 지점이 있다. 각 지점에서는 일정한 주파수 f_b 로 기포가 생성되고 있다고 가정하자. a_0 여전히 작아 무시할 수 있고, 잔에 담긴 샴페인의 높이는 H_ℓ 이며 부피는 V_ℓ 이다. 샴페인 상단의 표면을 통한 CO_2 의 직접적인 확산은 무시한다.

- A.6** $c_\ell(t)$ 에 대한 미분 방정식을 작성하시오. 이를 바탕으로 액체에 용해되어 있는 CO_2 의 농도 감소에 대한 시간 상수 τ 을 유도하시오. 1.1pt

파트 B. 기포가 터질 때 발생하는 소리

작은 기포는 상단의 자유 표면에 도달할 때 거의 구형을 유지한다. 기포와 공기를 분리하는 액체막이 충분히 얇아지면, 표면 장력에 의해 막에 원형 구멍이 만들어지고 매우 빠르게 열리게 된다 (그림 4. 왼쪽). r 은 원형 구멍의 반경을 표기한다. 구멍은 일정한 속도 v_f 로 열린다 (그림 4. 오른쪽). 구멍 테두리 바깥 영역의 액체막은 정지해 있고 두께 h 를 일정하게 유지한다.

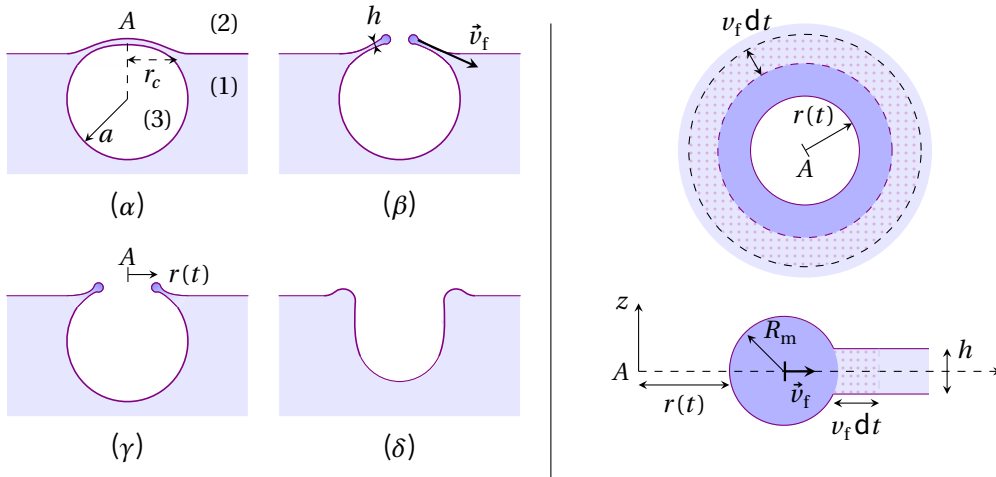


그림 4. (왼쪽) (α) 표면에서의 기포: (1) 액체, (2) 압력 P_0 의 공기, (3) 압력 P_b 의 CO_2 , (β) 및 (γ) 액체막의 파열 (테두리는 진한 파란색으로 표시됨), (δ) 기포 붕괴. (오른쪽) 시간 t 에서 액체막의 구멍이 열리는 과정. (위) 구멍 뚫린 막을 위에서 본 그림. (아래) 구멍 테두리와 액체막을 옆에서 본 그림. dt 시간 동안 테두리는 근처의 액체들을 흡수하는 형태로 확장한다 (점선).

에너지 소실(dissipation) 과정으로 인해 t 와 $t + dt$ 사이에 발생한 표면 에너지 변화량의 절반만이 테두리에 흡수된 액체의 운동 에너지로 변환된다. 또한 테두리 표면의 변화는 액체막의 변화에 비해 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정한다.

- B.1** v_f 을 ρ_ℓ, σ 및 h 의 식으로 표현하시오.

1.1pt

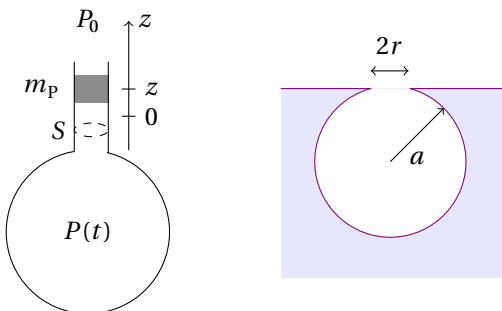


그림 5. (왼쪽) 헬름홀츠 공명기(resonator). (오른쪽) 진동자(oscillator)로 바라본 기포

막이 터질 때, 내부 압력이 방출되면서 소리가 발생한다. 우리는 이 음향 방출을 헬름홀츠 공명기 모형으로 설명한다 (그림 5. 왼쪽). 이 공명기는 면적 S 를 갖는 병목 구멍을 통해 압력이 P_0 인 대기와 연결되어 있다. 이 좁은 목 부분에 질량 m_p 인 분리막이 있다고 하자. 이 질량은 공명기 안의 기체가 단열 팽창과 압축으로 발생하는 대기압과의 압력 차이로 인해 작은 진폭의 진동을 하게 된다. m_p 에 작용하는 중력은 무시할 수 있다. 질량 m_p 아래의 공명기 안 기체의 압력이 $P = P_0$ 일 때, 기체의 부피는 V_0 이며, 이 때 질량의 위치를 $z = 0$ 로 한다.

B.2 m_p 의 진동 주파수 f_0 를 구하시오. 힌트: $\varepsilon \ll 1$ 일 때, $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$.

1.1pt

헬름홀츠 공명기 모형을 반경 a 의 기포의 경우에 적용해 볼 수 있다. 이 경우, V_0 은 닫힌 기포의 부피가 된다. 문헌에 따르면 피스톤(분리막)에 해당하는 부분의 질량은 $m_p = 8\rho_g r^3/3$ 로 주어지는데, 여기서 r 은 원형 구멍의 반경이고, $\rho_g = 1.8\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 은 기체의 밀도이다 (그림 5. 오른쪽). 막이 파열하는 과정에서 r 은 0에서부터 $r_c = \frac{2}{\sqrt{3}}a^2\sqrt{\frac{\rho_\ell g}{\sigma}}$ 까지 증가한다. 이와 동시에 방출되는 소리의 주파수는 최대 40kHz까지 증가한다. 이러한 파열이 진행되는데 걸린 시간은 $t_b = 3 \times 10^{-2}\text{ ms}$ 이었다.

B.3 주파수 정보를 바탕으로 기포의 반경 a 의 값을 구하시오. 또한 기포를 대기로부터 분리하는 샴페인 액체막의 두께 h 의 값을 구하시오.

1.1pt

파트 C. 샴페인 터뜨리기

병 안의 CO_2 의 총량은 $n_T = 0.2\text{ mol}$ 이며, 이는 부피가 $V_L = 750\text{ mL}$ 인 액체 샴페인에 녹아 있거나 부피가 $V_G = 25\text{ mL}$ 인 코르크 아래 공간에 기체로 존재한다 (그림 6. 왼쪽). V_G 에는 CO_2 만 들어있다. 두 영역의 CO_2 사이의 평형은 헨리의 법칙을 따른다. 병을 열 때 CO_2 기체는 빠르게 팽창하게 되는데, 우리는 이 팽창이 단열적이며 (adiabtic) 가역적인 (reversible) 팽창으로 가정한다. 주변 온도 T_0 와 압력 $P_0 = 1\text{ bar}$ 은 일정하다.

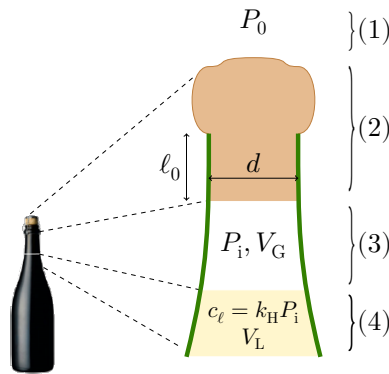


그림 6. 왼쪽: 일반적인 병 입구 구조 (1) 주변 공기, (2) 코르크 마개, (3) 기체 공간 (headspace), (4) 액체 샴페인. 오른쪽: 두 개의 다른 온도에서 병을 따는 동안 관찰된 두 가지 현상 (자료 출처: [2]).

C.1 $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 와 $T_0 = 20^\circ\text{C}$, 두 온도에 대해 병 안에 있는 CO_2 기체의 압력 P_i 의 값을 각각 구하시오.

0.4pt

샴페인 생산 과정 중 또 다른 단계(여기서는 설명하지 않음)를 거쳐 다음과 같은 P_i 값이 얻어진다.

$T_0 = 6^\circ\text{C}$ 일 때, $P_i = 4.69\text{ bar}$ $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 일 때, $P_i = 7.45\text{ bar}$

이후의 질문들에 대해서는 이 값들을 사용하시오.

병을 딸 때, 온도 T_0 에 따라 두 가지 다른 현상을 관찰할 수 있다 (그림 6. 오른쪽).

- 파란 안개가 나타남. 이는 CO_2 가 고체 결정을 형성하면서 발생함. (물 응결은 억제됨);
- 또는 회백색 안개가 나타남. 이는 병 입구 주변 공기 중 수증기가 응축되면서 발생함.

CO₂얼음의 포화 증기압 $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$ 은 다음의 관계식을 따른다. $\log_{10} \left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0} \right) = A - \frac{B}{T + C}$

여기서 $A = 6.81$, $B = 1.30 \times 10^3 \text{ K}$, $C = -3.49 \text{ K}$, 이며 온도 T 는 K 단위로 주어진다.

- C.2** 병을 개봉한 후, CO₂기체의 팽창이 끝났을 때 기체의 온도를 T_f 라고 하자. $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 그리고 $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 인 경우, T_f 의 값을 각각 구하시오. 기체 팽창 과정 중 상전이는 일어나지 않았다고 한다. 다음의 설명 중 참인 것을 모두 선택하시오. (여러 개 선택 가능): 0.7pt
1. $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 일 때, 병을 여는 동안 회백색 안개가 나타난다.
 2. $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 일 때, 병을 여는 동안 파란색 안개가 나타난다.
 3. $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 일 때, 병을 여는 동안 회백색 안개가 나타난다.
 4. $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 일 때, 병을 여는 동안 파란색 안개가 나타난다.

병을 따는 동안 코르크 마개가 튀어나가게 된다. 코르크 마개가 위로 튀어 오르는 경우 도달하는 최대 높이 H_c 를 결정해 보자. 병의 목부분에서 코르크 마개가 받는 마찰력은 $F = \alpha A$ 으로 주어진다고 가정하자. 여기서 A 은 마개와 병이 접촉하는 면적이고 α 은 결정해야하는 상수이다. 초기에는 압력 차에 의한 힘이 마찰력을 약간 상회하고 있다. 코르크 마개의 질량은 $m = 10 \text{ g}$, 지름은 $d = 1.8 \text{ cm}$, 초기에 병목 부분에 밀착된 원통형 부분의 길이는 $\ell_0 = 2.5 \text{ cm}$ 이다.

- C.3** 외부 온도가 $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 인 경우 H_c 의 값을 구하시오. 1.3pt

[1] Liger-Belair et al., Am. J. Enol. Vitic., Vol. 50, No. 3 (1999).

[2] Liger-Belair et al. Sc. Reports **7**, 10938 (2017).