이론적 문제 1번 지구-달 시스템의 진화

과학자들은 지구와 달의 거리를 매우 정밀하게 측정할 수 있습니다. 1969년 우주비행사가 달 표면에 설치한 특수 거울에 레이저 빔을 쏘아 빛의 원운동 시간을 측정하여 이를 달성했습니다(그림 1 참조).

그림 1. 천문대에서 보낸 레이저 빔은 지구와 달 사이의 거리를 정확하게 측정하는 데 사용됩니다.

이러한 관측을 통해 달이 지구에서 천천히 멀어지고 있다는 것을 직접 측정했습니다. 즉, 지구와 달의 거리가 시간이 지남에 따라 증가하고 있습니다. 이것은 조석력으로 인해 지구가 달에 각운동량을 전달하고 있기 때문에 일어나는 현상입니다(그림 2 참조). 이 문제에서는 이 현상의 기본 매개 변수를 도출합니다.

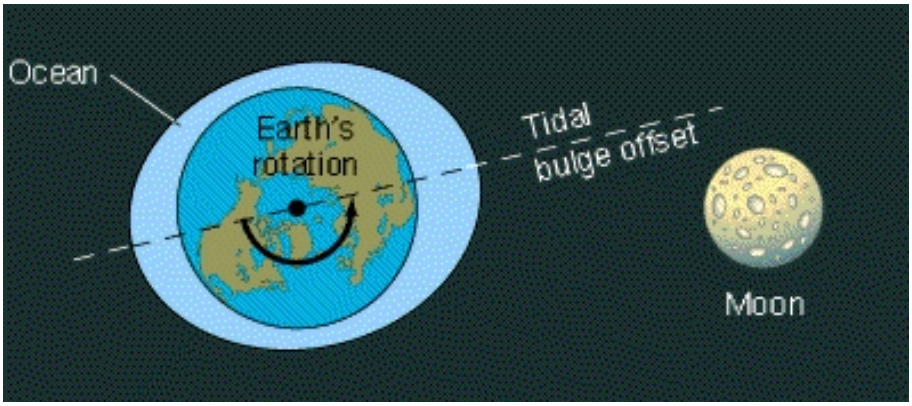


그림 2. 달의 중력은 지구에 조석 변형 또는 "팽창"을 일으킵니다. 지구의 자전으로 인해 돌출부를 통과하는 선이 지구와 달 사이의 선과 정렬되지 않습니다. 이 정렬 불량은 지구 자전으로부터 달의 이동으로 각운동량을 전달하는 토크를 생성합니다. 그림은 축척되지 않았습니다.

1. 각운동량 보존.

$L_{(1)을}$지구-달 시스템의 현재 총 각운동량이라고 합니다. 이제 다음과 같은 가정을 해봅시다. i) $L_{(1)은}$지구의 자전축을 중심으로 한 자전과 지구 주위를 공전하는 달의 자전축을 합한 값입니다. ii) 달의 공전 궤도는 은 원형이고 달을 한 점으로 간주할 수 있습니다. iii) 지구의 자전축과 달의 공전축은 평행합니다. iv) 계산을 단순화하기 위해 질량 중심이 아닌 지구의 중심을 중심으로 운동합니다. 문제 전체에서 모든 관성 모멘트, 토크 및 각 운동량은 지구의 축을 중 심 으 로 정의됩니다. v) 태양의 영향은 무시합니다.

1a	지구-달 시스템의 현재 총 각운동량에 대한 방정식을 적으세요. 이 방정식을 지구의 관성 모멘트인 I_E, 지구 자전의 현재 각주파수인 $\omega_{(E)\,(1)}$, 지구 축에 대한 달의 현재 관성 모멘트인 $I_{M)\,(1}$, 달의 현재 각주파수인 $\omega_{(M)_1}$로 설정하십시오. 궤도.	0.2

이 각운동량 전달 과정은 지구의 자전 주기와 달이 지구 주위를 공전하는 주기가 같을 때 끝납니다. 이 시점에서 달이 지구에서 생성하는 조석 팽창은 달과 지구 사이의 선과 정렬되어 토크가 사라집니다.

1b	지구-달 시스템의 최종 총 각운동량 L_2에 대한 방정식을 적으세요. 문제 1a에서와 동일한 가정을 합니다. 이 방정식을 지구의 관성 모멘트인 I_E, 지구 자전과 달의 공전의 최종 각주파수인 ω_2로 설정하십시오; 그리고 달의 최종 관성 모멘트인 $I_{(M)\ (2)}$로 설정합니다.	0.2

1c	최종 총 각운동량에 대한 지구 자전의 기여도를 무시하고, 이 문제에 대한 각운동량 보존을 표현하는 방정식을 적습니다. 운동량 보존을 표현하는 방정식을 적으세요.	0.3

2. 지구-달 시스템의 최종 분리와 최종 각주파수.

(지구 주위를 도는 달의) 원형 궤도에 대한 중력 방정식이 항상 유효하다고 가정합니다. 최종 총 각운동량에 대한 지구 자전의 기여도를 무시합니다.

2a	지구 주위를 도는 달의 원궤도에 대한 중력 방정식을 최종 상태의 M_E, ω_2, G 및 지구와 달 사이의 최종 간격 D_2의 관점에서 적으십시오. M_E는 지구의 질량이고 지구의 질량이고 G는 중력 상수입니다.	0.2

2b	지구와 달 사이의 최종 간격 D_2에 대한 방정식을 알려진 매개변수인 $L_{(1),\ 시스템의}$총 각운동량인 L_2, 지구와 달의 질량인 $M_{(E)\ 및\ G\ 를}$사용하여 적으십시오. 운동량, 지구와 달의 각각 질량인 M_E및 $_{M(M)}$, 그리고 G .	0.5

2c	지구-달 시스템의 최종 각주파수 ω_2에 대한 방정식을 알려진 매개변수 L_1, M_E, M_M및 G 의 관점에서 적으십시오.	0.5

아래에서 D_2와 ω_2의 수치를 구하라는 메시지가 표시됩니다. 이를 위해서는 지구의 관성 모멘트를 알아야 합니다.

2d	지구의 관성 모멘트 방정식 I_E를 중심에서 반경 $r_{(i)\ 까지의}$내부 밀도 $\rho_{(i)}$와 반경 r_i 에서 표면까지의 외부 밀도 ρ_o 인 구라고 가정하고 적으세요. 반경 r_o (그림 3 참조).	0.5

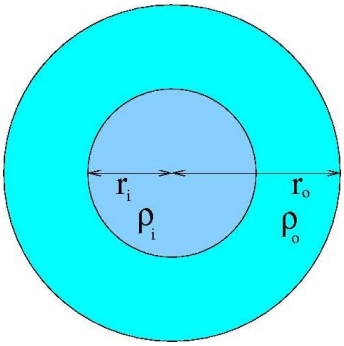


그림 3. 밀도 ρ_i와 ρ_o가 두 개인 구로서의 지구 .

이 문제에서 요구되는 수치는 항상 *두 자리의 큰 숫자로* 구하십시오.

2e	$\rho_i = 1.3\times 10^{4}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ 을 사용하여 지구의 관성 모멘트 I_E를 평가합니다, $r_i = 3.5\times 10^{6}\mathrm{m}$, $\rho_o = 4.0\times 10^{3}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, 및 $r_o = 6.4\times 10^{6}\mathrm{m}$.	0.2

지구와 달의 질량은 M = 6.0×10^{24}kg 및 M_M = 7.3×10^{22}kg,각 영문판 참조
각입니다. 현재 지구와 달 사이의 거리는 $D_1 = 3.8\times 10^{8}$m입니다.

지구 자전의 현재 각도 주파수는 $\omega_{E1} = 7.3\times 10^{-5}\mathrm{s^{-1}}$입니다. 달이 지구 주위를 공전하는 현재 각주기는 $\omega_{M1} = 2.7\times 10^{-6}\mathrm{s^{-1}}$이고, 중력 상수는 $G = 6.7\times 10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$입니다.

2f	시스템의 총 각 운 동 량 의 수치 값인 L_1을 평가합니다.	0.2

2g	최종 이격 $D_{(2)}$를 미터 단위로 현재 이격 D_1의 단위로 구합니다.	0.3

2h	최종 각 주파수 ω_2를 $\mathrm{s^{-1}}$단위로 구하고 최종 지속 시간을 구합니다. 의 최종 지속 시간을 현재 날짜의 단위로 구합니다.	0.3

최종 총 각운동량에 대한 지구 자전의 기여를 무시한다는 가정이 지구의 최종 각운동량과 달의 최종 각운동량의 비율을 구하여 정당하다는 것을 확인합니다. 이것은 소량이어야 합니다.

2i	지구의 최종 각운동량과 달의 최종 각운동량의 비율을 구합니다.	0.2

3. 달은 1년에 얼마나 멀어지나요?

이제 달이 매년 지구에서 얼마나 멀어지는지 알아볼 수 있습니다. 이를 위해서는 현재 달에 작용하는 토크에 대한 방정식을 알아야 합니다. 조석 팽창을 지구 표면에 위치한 두 점 질량 m *으로* 근사화할 수 있다고 가정합니다(그림 4 참조). θ는 조수 돌출부를 통과하는 선과 지구와 달의 중심을 잇는 선 사이의 각도라고 합니다.

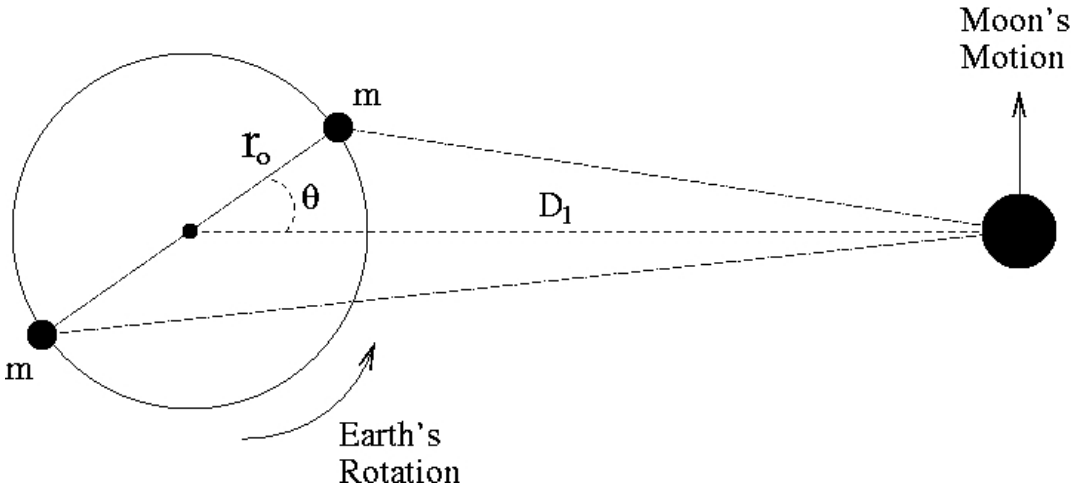


그림 4. 지구의 돌출부에 의해 달에서 발생하는 토크를 추정하기 위한 모식도. 그림은 축척되지 않았습니다.

3a	가장 가까운 점 질량에 의해 달에서 생성되는 힘의 크기인 $F_{(c)}$*를 구합니다*	0.4

3b	가장 먼 점 질량에 의해 달에서 발생하는 힘의 크기인 $F_{(f)}$*를 구합니다*	0.4

이제 점 질량에 의해 생성된 토크를 평가할 수 있습니다.

3c	가장 가까운 점 질량에 의해 생성된 토크인 τ_c의 크기를 구합니다.	0.4

3d	가장 먼 점 질량에 의해 생성되는 토크인 τ_f의 크기를 구합니다.	0.4

3e	두 질량이 만들어내는 총 토크의 크기 의 크기를 구합니다. $r_o << D_1$이 므로 식을 가장 낮은 값으로 근사화해야 합니다. 로 근사화해야 합니다. $(1+x)^a \approx 1+ax$, if $x << 1$. 영문판 참조	1.0

3f	총 토크의 수치를 계산합니다. $\theta = 3^\circ$및 $m = 3.6\times 10^{16}$kg(이 질량은 지구 질량의 10^{-8}배의 질량입니다.)	0.5

토크는 시간에 따른 각운동량의 변화율이므로, 현재 지구와 달의 거리의 연간 증가량을 구합니다. 이 단계에서는 달의 각운동량을 $_{M(M)}$, M_E, D_1, G로만 표현합니다.

3g	현재 지구와 달 사이의 거리의 연간 증가를 구합니다.	1.0

마지막으로, 매년 낮의 길이가 얼마나 증가하고 있는지 추정합니다.

3h	$\omega_{(E)(1)}$의 연간 감소량과 현재 하루의 길이가 매년 얼마나 증가하고 있는지 구합니다.	1.0

4. 에너지는 어디로 가고 있나요?

각 운동량은 보존되는 반면, 시스템의 총 (회전 운동량과 중력을 더한) 에너지는 보존되지 않습니다. 이 마지막 섹션에서 이에 대해 살펴보겠습니다.

4a	현재 지구-달 시스템의 총 (회전과 중력을 더한) 에너지 E 에대한 방정식을 적으세요. 이 방정식을 I_E로 표현하세요, $\omega_{(E)(1)}$, $_{M(M)}$, M_E, D_1및 G로만 표현합니다.	0.4

4b	D_1및 $\omega_{(E)(1)}$의변화의 함수로서 ΔE 의 변화에 대한 방정식을 적으십시오. 문제 3g와 3h에서 찾은 D_1과 $\omega_{(E)(1)}$의 변화 값을 사용하여 1년간의 ΔE 의 수치를 평가하십시오. 와 3h.	0.4

이 에너지 손실이 지구에서 달에 의해 생성된 조수에서 열로 방출되는 에너지의 추정치와 일치하는지 검증하십시오. 조수가 상승한다고 가정합니다.

평균 0.5m씩 상승한다고 가정합니다. = 지구 표면을 덮는 0.5m 깊이의 물층이 생긴다고 가정합니다. (단순화를 위해 지구의 모든 표면이 물로 덮여 있다고 가정합니다). 이런 일이 하루에 두 번 일어납니다. 또한 이 중력 에너지의 10%가 물이 하강할 때 점성으로 인해 열로 소실된다고 가정합니다. 물의 밀도를 다음과 같이 가정합니다.

$\rho_{물} = 10^3 kg\ m^{-3}$, 지구 표면의 중력 가속도는 다음과 같습니다.

$g = 9.8\ m\ s^{-2}$.

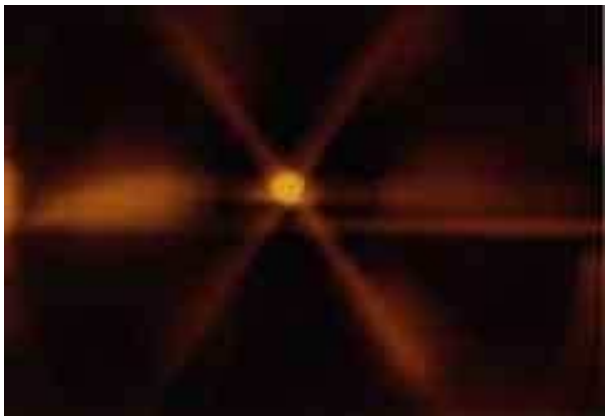
4c	이 표층의 물의 질량은 얼마입니까?	0.2

4d	1년에 얼마나 많은 에너지가 소실되는지 계산해 보세요. 이것은 현재 지구-달 시스템에서 연간 손실되는 에너지와 어떻게 비교됩니까? 현재?	0.3

이론적 문제 2

도플러 레이저 냉각과 광학 당밀

이 문제의 목적은 소위 "레이저 냉각"과 "광학 당밀" 현상을 이해하기 위한 간단한 이론을 개발하는 것입니다. 이는 일반적으로 알칼리성인 중성 원자 빔을 동일한 주파수의 레이저 빔을 역전파하여 냉각하는 것을 말합니다. 이는 1997년에 S. 추, P. 필립스, C. 코헨-타누지에게 수여된 물리학 노벨상의 일부입니다.



위 이미지는 세 개의 직교하는 레이저 빔 쌍의 교차점에 갇힌 나트륨 원자(가운데 밝은 점)를 보여줍니다. 소산 광학력이 당밀을 통과하는 물체의 점성 항력과 유사하기 때문에 이 갇힘 영역을 "광학 당밀"이라고 부릅니다.

이 문제에서는 원자에 입사하는 광자와 소산 메커니즘의 기초 사이의 상호작용의 기본 현상을 1차원에서 분석합니다.

제1부: 레이저 냉각의 기초

질량 m의 원자가 속도 v를 가지고 $+x$ 방향으로 이동한다고 가정해 보겠습니다. 간단하게 하기 위해 문제를 1차원으로 간주하여 y 및 z 방향은 무시하겠습니다(그림 1 참조). 원자는 두 가지 내부 에너지 준위를 가지고 있습니다. 가장 낮은 상태의 에너지는 0으로 간주하고 여기 상태의 에너지는 $\hbar\omega_0$, 여기서 $\hbar = h / 2\pi$ 입니다. 원자는 처음에 가장 낮은 상태에 있습니다. 실험실에서 주파수 ω_L의 레이저 빔은 $-x$ 방향으로 향하고 원자에 입사됩니다. 양자역학적으로 레이저는 각각 에너지 $\hbar\omega_L$와 운동량 $-\hbar q$를 가진 많은 수의 광자로 구성됩니다. 광자는 원자에 흡수되었다가 나중에 자발적으로 방출될 수 있으며, 이 방출은 다음과 같이 동일한 확률로 발생할 수 있습니다.
$+x$ 및 $-x$ 방향. 원자는 비상대론적 속도로 움직이기 때문에, $v/c << 1$(여기서 c는 빛의 속도)는 이 양에 대해서만 1차 항을 유지합니다. 또한 $\hbar q / mv << 1$ 즉, 원자의 운동량이 단일 광자의 운동량보다 훨씬 크다는 것을 고려하십시오.

단일 광자의 운동량. 답안을 작성할 때 위의 양 중 하나에 대해서만 선형적으로 정정하십시오.

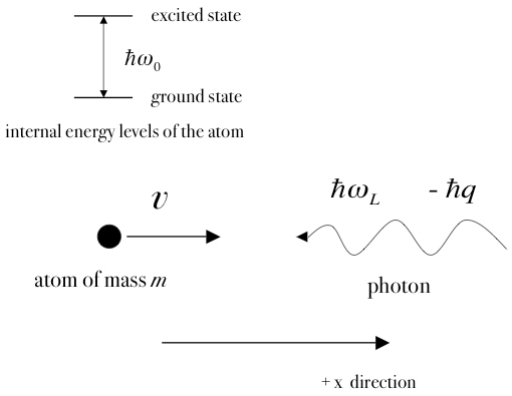


그림 1 질량 m의 원자가+ x 방향으로 속도 v를 가지며, 에너지 $\hbar\omega_L$와 운동량− $\hbar q$를 가진 광자와 충돌하는 스케치. 원자는 에너지 차이가 $\hbar\omega_0$인 두 가지 내부 상태를 갖습니다.

레이저 주파수 ω_{L0} 움직이는 원자가 볼 때 원자의 내부 전이와 공명하도록 조정되어 있다고 가정합니다. 다음 문제에 답하십시오:

1. 흡수.

1a	광자 흡수를 위한 공명 조건을 적습니다.	0.2

1b	실험실에서 볼 수 있는 흡수 후 원자의 운동량 $p_{(at)}$를 적으세요.	0.2

1c	실험실에서 본 것처럼 흡수 후 원자의 총 에너지 $\varepsilon_{(at)}$를 적으세요.	0.2

2. −x 방향으로 광자가 자발적으로 방출됩니다.

입사 광자를 흡수한 후 어느 시점에 원자는− x 방향으로 광자를 방출할 수 있습니다.

2a	실험실에서 본 바와 같이− x 방향으로 방출된 후 방출된 광자의 에너지 $\varepsilon_{(ph)}$를 적으세요.	0.2

2b	실험실에서 본 바와 같이− x 방향으로 방출된 후 방출된 광자의 운동량 p_{ph}를 적으세요.	0.2

2c	실험실에서 본 바와 같이− x 방향으로 방출된 후, 방출된 원자의 운동량 p_{at}를 적으세요.	0.2

2d	실험실에서 본 바와 같이− x 방향으로 방출된 후 원자의 총 에너지 ε_{at}를 적으세요.	0.2

3. $+x$ 방향으로 광자가 자발적으로 방출됩니다.

입사 광자를 흡수한 후 어느 시점에서 원자는 대신에
+광자를 방출할 수 있습니다.

3a	실험실에서 본 바와 같이+ x 방향으로 방출된 후 방출된 광자의 에너지 $\varepsilon_{(ph)}$를 적으세요.	0.2

3b	실험실에서 본 바와 같이+ x 방향으로 방출된 후 방출된 광자의 운동량 p_{ph}를 적으세요.	0.2

3c	실험실에서 본 바와 같이+ x 방향으로 방출된 후, 방출된 원자의 운동량 p_{at}를 적으세요.	0.2

3d	실험실에서 본 바와 같이+ x 방향으로 방출 과정 후 원자의 총 에너지 ε_{at}를 적으세요.	0.2

4. 흡수 후 평균 방출량입니다.

− x 또는+ x 방향에서 광자의 자발 방출은 다음과 같이 발생합니다.
같은 확률입니다. 이를 고려하여 다음 질문에 답하세요.

4a	방출 과정 후 방출된 광자의 평균 에너지 ε_{ph}를 적으세요.	0.2

4b	방출 과정 후 방출된 광자의 평균 운동량 p_{ph}를 적으세요.	0.2

4c	방출 과정 후 원자의 평균 총 에너지 ε_{at}를 적으세요.	0.2

4d	방출 과정 후 원자의 평균 운동량 $p_{(at)}$를 적습니다	0.2

5. 에너지와 운동량 전달.

위에서 설명한 것처럼 완전한 한 광자 흡수-방출 과정만 있다고 가정하면, 레이저 복사와 원자 사이에 순 평균 운동량과 에너지 전달이 있습니다.

5a	완전한 1광자 흡수-방출 과정 후 원자의 평균 에너지 변화 Δ를 적으세요.	0.2

5b	한 광자 흡수-방출 과정이 완료된 후 원자의 평균 운동량 변화 Δp를 적으세요.	0.2

6. $+x$ 방향을 따라 레이저 빔에 의한 에너지와 운동량 전달.

이제 주파수 ω'_L의 레이저 *빔이* $+x$ 방향을 따라 원자에 입사되고 원자는 속도 v 로 $+x$ 방향으로도 이동한다고 가정해 보겠습니다. 원자가 볼 때 원자의 내부 전이와 레이저 빔 사이의 공명 조건을 가정하고 다음 질문에 답하세요:

6a	한 광자 흡수-방출 과정이 완료된 후 원자의 평균 에너지 변화 Δ를 적으세요.	0.3

6b	한 광자 흡수-방출 과정이 완료된 후 원자의 평균 운동량 변화 Δp를 적으세요.	0.3

파트 II: 소산과 광학 당밀의 기초

그러나 자연은 양자 프로세스에 내재된 불확실성을 내재하고 있습니다. 따라서 원자가 흡수 후 *유한한* 시간 내에 자발적으로 광자를 방출할 수 있다는 사실은 결과적으로 공명 조건이 위의 논의에서와 같이 *정확히* 따를 필요가 없다는 것을 의미합니다. 즉, 레이저 빔의 주파수 ω_L 및 $\omega'_{(L)는}$ 어떤 값을 가질 수 있으며 흡수-방출 프로세스가 여전히 발생할 수 있습니다. 이는 서로 다른 (양자) 확률로 발생하며, 예상대로 최대 확률은 정확한 공명 조건에서 발견됩니다. 평균적으로 흡수와 방출의 단일 과정 사이에 경과한 시간을 원자의 여기 에너지 준위의 수명이라고 하며 Γ^{-1}로 표시됩니다.

실험실 기준 프레임에서 *정지* 상태인 N 원자의 집합과

주파수 ω_L의 레이저 빔이 입사합니다. 원자는 지속적으로 흡수하고 방출하여 평균적으로 여기 상태의 원자가 $N_{(exc)}$ 개 따라서 기저 상태의 원자는 $N - N_{exc}$ 개가 됩니다. 양자역학적으로 계산하면 다음과 같은 결과가 나옵니다:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$ 영문판 참조

여기서 ω_0은 원자 전이의 공명 주파수이고 Ω_R은 소위 라비 주파수이며, $\Omega^{(2)}$는 레이저 빔의 *강도에* 비례합니다. 위에서 언급했듯이 공진 주파수 ω_0이 레이저 빔의 주파수 ω_L과 다르더라도 이 수치는 0과 다르다는 것을 알 수 있습니다. 이전 결과를 표현하는 다른 방법은 단위 시간당 흡수-방출 과정의 수를 $N_{exc}\Gamma$ 로 표현하는 것입니다.

그림 2에 표시된 물리적 상황을 생각해 보십시오. 주파수는 같지만 *임의의* 주파수 ω_L를 갖는 두 개의 역전파 레이저 빔이 속도 v *로*+ x 방향으로 이동하는 N 원자로 구성된 기체에 입사되는 경우입니다.

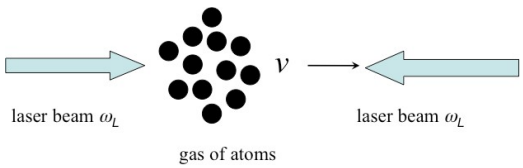


그림 2. 주파수는 같지만 *임의의* 주파수를 갖는 두 개의 역전파 레이저 빔 $\omega_{(L)}$은 속도 v*로*+ x 방향으로 이동하는 N 원자로 이루어진 기체에 입사합니다.

7. 레이저에 의해 원자 빔에 가해지는 힘입니다.

7a	지금까지 찾은 정보를 사용하여 레이저가 원자 빔에 가하는 힘을 구하십시오. $mv \gg \hbar q$ 라고 가정해야 합니다.	1.5

8. 낮은 속도 제한.

이제 원자의 속도가 충분히 작아서 힘을 v 의 1차수까지 확장할 수 있다고 가정합니다.

8a	이 극한에서 문제 (7a)에서 찾은 힘의 식을 구합니다.	1.5

이 결과를 사용하여 레이저 복사가 원자에 속도를 높이거나, 느리게 하거나, 전혀 영향을 미치지 않는 조건을 찾을 수 있습니다.

8b	양의 힘(원자의 속도 증가)을 얻기 위한 조건을 적으세요.	0.25

8c	0의 힘을 얻기 위한 조건을 적으세요.	0.25

8d	음의 힘(원자를 느리게 하는 힘)을 얻기 위한 조건을 적습니다.	0.25

8e	이제 원자가− v(− x *방향*)의 속도로 움직이고 있다고 생각해 보세요. 방향으로). 원자를 느리게 하는 힘을 얻기 위한 조건을 적습니다. 원자에	0.25

9. 광학 당밀.

음의 힘의 경우 마찰 소산력을 얻습니다. 처음에 t= 0 에서 원자로 이루어진 기체의 속력이 v_0이라고 가정합니다.

9a	저속의 한계에서 레이저 빔이 시간τ 동안 켜진 후 원자의 속도를 구합니다.	1.5

9b	이제 원자로 이루어진 기체가 온도 T_0에서 열 평형 상태에 있다고 가정합니다. 레이저 빔 이 일정 시간 동안 켜진 후의 온도 T 를 구합니다. 시간 동안 켜진 후의 온도를 구합니다 .	0.5

이 모델은 임의로 낮은 온도로 이동하는 것을 허용하지 않습니다.

이론적 문제 3번

별은 왜 그렇게 큰가요?

별은 뜨거운 가스로 이루어진 구체입니다. 대부분의 별 은 중심부에서 수소를 헬륨으로 융합하고 있기 때문에 빛을 발합니다. 이 문제에서는 고전역학과 양자역학, 정전기 및 열역학의 개념을 사용하여 별이 이 융합 과정을 달성하기 위해 충분히 커야 하는 이유를 이해하고, 수소를 융합할 수 있는 가장 작은 별의 질량과 반지름을 도출합니다.

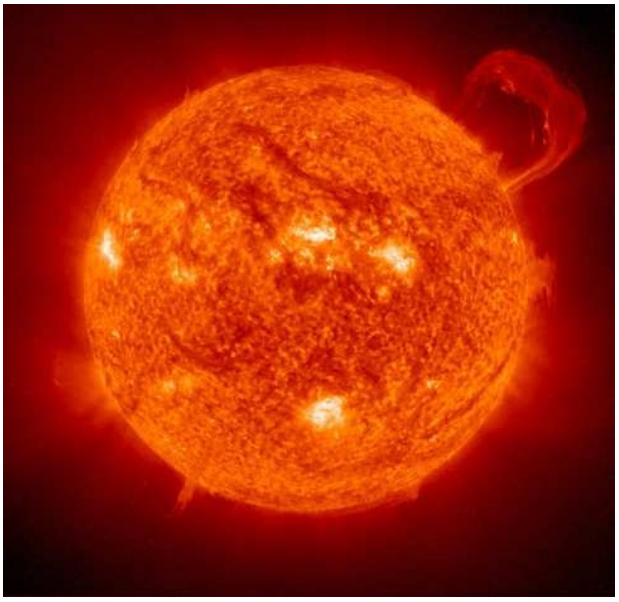


그림 1. 우리 태양은 대부분의 별과 마찬가지로 중 심 부 에 서 수소가 헬륨으로 열핵융합되어 빛을 발합니다.

유용한 상수

중력 상수 = G= $6.7\times 10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^2}$볼츠만 상수 = k= $1.4\times 10^{-23}\mathrm{J\ K^{-1}}$플랑크 상수 = h= $6.6\times 10^{-34}\mathrm{m^2kg\ s^{-1}}$

양성자의 질량= m_p= 1.7×10^{-27} kg

전자의 질량= m_e= 9.1×10^{-31}kg

전하 단위= q= 1.6×10^{-19}C

전기 상수(진공 유전율)= ε_0= $8.9\times 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$

태양 반지름= R_S= 7.0×10^{8}m

태양 질량= M_S= 2.0×10^{30} kg

1. 별의 중심 온도에 대한 고전적인 추정치입니다.

별을 형성하는 기체가 순수한 이온화된 수소(전자와 양성자가 같은 양)이며, 이상적인 기체처럼 행동한다고 가정합니다. 고전적인 관점에서 보면

두 개의 양성자를 융합하려면 단거리의 강한 핵력이 지배적이 되려면 10^{-15}m까지 가까워져야 합니다. 그러나 두 양성자를 하나로 모으기 위해서는 먼저 쿨롱의 힘의 반발력을 극복해야 합니다. 고전적으로 두 양성자(점원이라고 가정)가 1차원 정면 충돌에서 각각 양성자의 루트-평균-제곱(r_{ms}) 속도인 v_{rms}의 속도로 반평행하게 움직이고 있다고 가정해 보겠습니다.

1a	기체의 온도인 T_c는 무엇이어야 하므로 거리가 양성자의 가장 가까운 접근 거리인 d_c가 10^{-15} m? 이 문제에서 이 값과 모든 이 문제의 숫자 값을 최대 두 자리까지 제시하세요.	1.5

2. 이전 온도 추정치가 틀렸다는 것을 알아내기.

이전 온도 추정이 합리적인지 확인하려면 별의 중심 온도를 독립적으로 추정할 수 있는 방법이 필요합니다. 별의 구조는 매우 복잡하지만 몇 가지 가정을 하면 상당한 이해를 얻을 수 있습니다. 별은 평형 상태, 즉 안쪽의 중력이 바깥쪽의 압력에 의해 균형을 이루기 때문에 팽창하거나 수축하지 않습니다(그림 2 참조). 가스 슬래브의 경우 별의 중심으로부터 주어진 거리 *r에서의* 정수압 평형 방정식은 다음과 같이 주어집니다.

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G M_r \rho_r}{r^2}$$

여기서 P는 가스의 압력, G는 중력 상수, M_r은 반지름 *r의* 구체 내 별의 질량, ρ_r은 슬래브 내 가스의 밀도입니다.

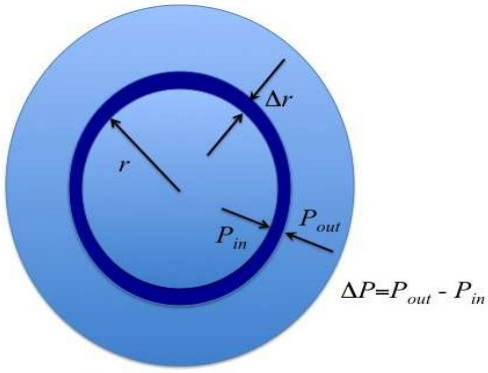


그림 2. 별은 압력 차이로 중력과 균형을 이루는 정수압 평형 상태에 있습니다.

별의 중심과 표면의 매개변수 값을 사용하여 별의 중심 온도를 다음과 같이 근사치로 추정할 수 있습니다:

$\Delta P \approx P_o - P_c$,

여기서 P_c및 $P_{(o)는}$각각 별의 중심과 표면의 압력입니다.

$P_c >> P_o$, 우리는 다음과 같이 가정할 수 있습니다.

$\Delta P \approx - P_c$.

동일한 근사치 내에서 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$\Delta r \approx R$,

여기서 $R은$ 별의 전체 반지름이며, 그리고

$M_r \approx M_R = M$,

여기서 $M은$ 별의 총 질량입니다.

밀도는 중심값으로 근사치를 구할 수 있습니다,

$\rho_r \approx \rho_c$.

압력은 이상적인 기체의 압력이라고 가정할 수 있습니다.

2a	별의 반지름과 질량, 그리고 물리 상수만으로 별의 중심 온도인 T_c에 대한 방정식을 구하십시오.	0.5

이제 이 모델의 유효성 기준으로 다음과 같은 예측을 사용할 수 있습니다:

2b	(2a)에서 찾은 방정식을 사용하여 별에 대해 예상되는 M/R의 비율을 적으세요. 별에 대해 물리 상수와 T_c만으로 예상되는 비율을 적습니다.	0.5

2c	(1a)에서 구한 T_c의 값을 사용하여 별에 대해 예상되는 비율 M/R의 수치를 구합니다.	0.5

2d	이제 M(*태양*) / R(*태양*) 의 비율을 계산하고 이 값이 보다 훨씬 작은지 확인합니다.	0.5

3. 별의 중심 온도에 대한 양자역학적 추정치

(2d)에서 발견되는 큰 불일치는 (1a)에서 얻은 T_c에 대한 고전적인 추정치가 정확하지 않다는 것을 시사합니다. 이 불일치에 대한 해결책은 양성자가 파동처럼 행동하고 단일 양성자가 드 브로글리 파장인 λ_p정도의 크기로 번진다는 양자 역학적 효과를 고려할 때 찾을 수 있습니다. 이는 양성자의 가장 가까운 접근 거리인 $d_{(c)가}$ λ_p*정도이면*양자 역학적 의미에서 양성자가 겹쳐서 융합할 수 있음을 의미합니다.

3a	$d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ 가 융합을 허용하는 조건이라고 가정할 때, 양성자의 경우 를 속도 v_{rms}로 하여 물리 상수로만 T_c에 대한 방정식을 구합니다.	1.0

3b	(3a)에서 구한 T_c의 값을 수치적으로 평가합니다.	0.5

3c	(3b)에서 구한 T_c의 값을 사용하여 (2b)에서 구한 공식을 사용하여 별에 대해 예상되는 M/R 비율의 수치 값을 구합니다. 이 값이 관측된 M(*태양*) / R(*태양*)의 비율과 매우 유사한지 확인합니다.	0.5

실제로, 소위 *주계열성*(수소를 융합하는)에 속하는 별들은 질량 범위가 넓은 경우 이 비율을 거의 따릅니다.

4. 별의 질량/반경 비율.

이전의 합의는 태양 중심의 온도를 추정하는 양자역학적 접근법이 정확하다는 것을 시사합니다.

4a	이전 결과를 사용하여 수소를 융합하는 모든 별의 경우 질량 M과 반지름 *R의 비율은* 동일하며 물리 상수에만 의존한다는 것을 증명합니다. 수소를 융합하는 별의 M/R 비율에 대한 방정식을 구하십시오.	0.5

5. 가장 작은 별의 질량과 반지름입니다.

(4a)에서 찾은 결과는 이러한 관계가 충족되는 한 어떤 질량의 별이라도 있을 수 있음을 시사하지만, 이는 사실이 아닙니다.

수소를 융합하는 일반 별 내부의 기체는 거의 이상적인 기체처럼 행동하는 것으로 알려져 있습니다. 즉, *전자 사이의* 일반적인 *간격인* d_e가 전형적인 드 브로글리 파장인 λ_e보다 평균적으로 더 크다는 뜻입니다. 더 가까워지면 전자는 소위 퇴화 상태에 놓이고 별은 다르게 행동할 것입니다. 별 내부의 양성자와 전자를 취급하는 방식에 차이가 있음을 주목하세요. 양성자의 경우, 융합을 위해 충돌할 때 드 브로글리 파동이 밀접하게 겹쳐야 하는 반면, 전자의 경우 이상적인 기체로 남아 있으려면 드 브로글리 파동이 겹치지 않아야 합니다.

별의 밀도는 반지름이 감소함에 따라 증가합니다. 그럼에도 불구하고, 이 규모의 추정치에서는 밀도가 균일하다고 가정합니다. $m_p >> m_e$.

5a	별 내부의 평균 전자 수 밀도인 n_e에 대한 방정식을 구합니다.	0.5

5b	항성 내부의 전자 사이의 일반적인 간격인 d_e에 대한 방정식을 구합니다.	0.5

5c	$d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ 조건을 사용하여 반경에 대한 방정식을 적습니다. 가장 작은 정상 항성의 반지름을 구합니다. 별의 중심 온도를 모든 항성 내부의 일반적인 온도로 간주합니다.	1.5

5d	가능한 가장 작은 정상 항성의 반지름의 수치를 미터와 태양 반지름 단위로 구합니다.	0.5

5e	가능한 가장 작은 항성의 질량의 수치값을 kg과 태양 질량 단위로 구합니다.	0.5

6. 오래된 별의 헬륨 핵 융합.

별은 나이가 들어감에 따라 핵의 수소가 대부분 헬륨(He)으로 융합되기 때문에 계속 빛을 발하기 위해 헬륨을 더 무거운 원소로 융합하기 시작합니다. 헬륨 핵은 양성자 2개와 중성자 2개를 가지고 있으므로 전하가 두 배이고

양성자의 약 4배의 질량을 가집니다. 앞서 양성자가 융합하기 위한 $d_{(c)} = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ 는

양성자가 융합하기 위한 조건은

6a	헬륨 핵의 등가 조건을 설정하고 헬륨 핵의 rms 속도인 $v_{(rms)}(He)$와 헬륨 융합에 필요한 온도인 $T(He)$를 구합니다.	0.5