

1. 삼체(Three-body) 문제와 LISA

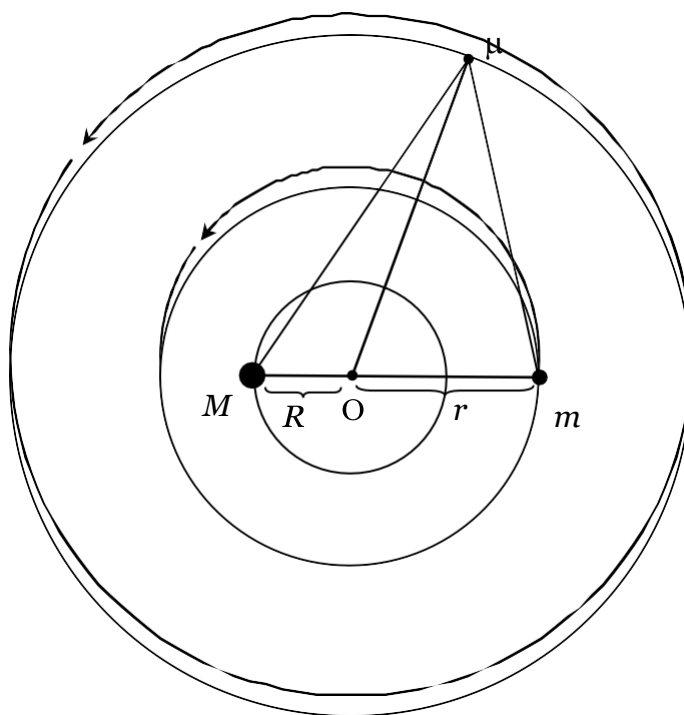


FIGURE 1 Coplanar orbits of three bodies.

- 1.1 질량이 각각 M 과 m 인 두 천체가, 공통 질량중심을 중심으로 각각 반지름 R 과 r 인 원 궤도를 따라 운동하고 있다. M 과을 잇는 선의 각속도를 R, r, M, m , 그리고 만유인력 상수 G 를 이용해 구하시오. [1.5 점]
- 1.2 무시할 수 있는 질량을 가진 세 번째 물체가, 동일 평면상에서 위 두 질량의 질량중심을 중심으로 원 궤도를 그리며 운동하고 있다. 이 물체는 그림 1에서처럼 M 과 m 에 대해 상대적으로 정지해 있다. 단, 이 물체는 M 과 m 과 일직선상에 있지 않다. 다음의 값을 R 과 r 에 대한 식으로 나타내시오. [3.5 점]
- 1.2.1 μ 에서 M 까지의 거리
 - 1.2.2 μ 에서 m 까지의 거리
 - 1.2.3 μ 에서 질량중심까지의 거리

1.3 . $M=m$ 인 경우를 고려하자. 이때 무시할 수 있는 질량의 물체에 대해 질량중심을 향하는 방향으로 약간의 반지름 방향 섭동을 가한다면, 이 물체가 원래 위치 주변에서 진동하는 각진동수는 ω_0 에 대한 식으로 어떻게 표현되는가? 단, 이 물체의 각운동량은 보존된다고 가정한다.

LISA(Laser Interferometry Space Antenna)**는 저주파 중력파를 탐지하기 위한 동일한 세대의 우주선을 포함하는 집합체이다. 각 우주선은 그림 2와 그림 3에서처럼 정삼각형의 꼭짓점에 배치되어 있으며, 삼각형의 한 변, 즉 팔(arm)의 길이는 약 500만 킬로미터이다. LISA는 태양 주위를 공전하는 지구와 유사한 궤도를 따라 이동하되, 지구를 약 20도 뒤따라간다. 각 우주선은 태양을 중심으로 조금씩 기울어진 궤도를 따라 개별적으로 운동하며, 전체적으로는 세 우주선이 공통 질량중심을 중심으로 1년에 한 번 회전하는 것처럼 보인다.

이 우주선들은 서로 레이저 신호를 지속적으로 송수신하며, 간섭계 방식을 통해 팔 길이에 생기는 아주 작은 변화를 측정함으로써 중력파를 탐지한다. 가까운 은하에서 일어나는 블랙홀의 충돌과 같은 거대한 천체 간의 사건이 중력파의 예시이다.

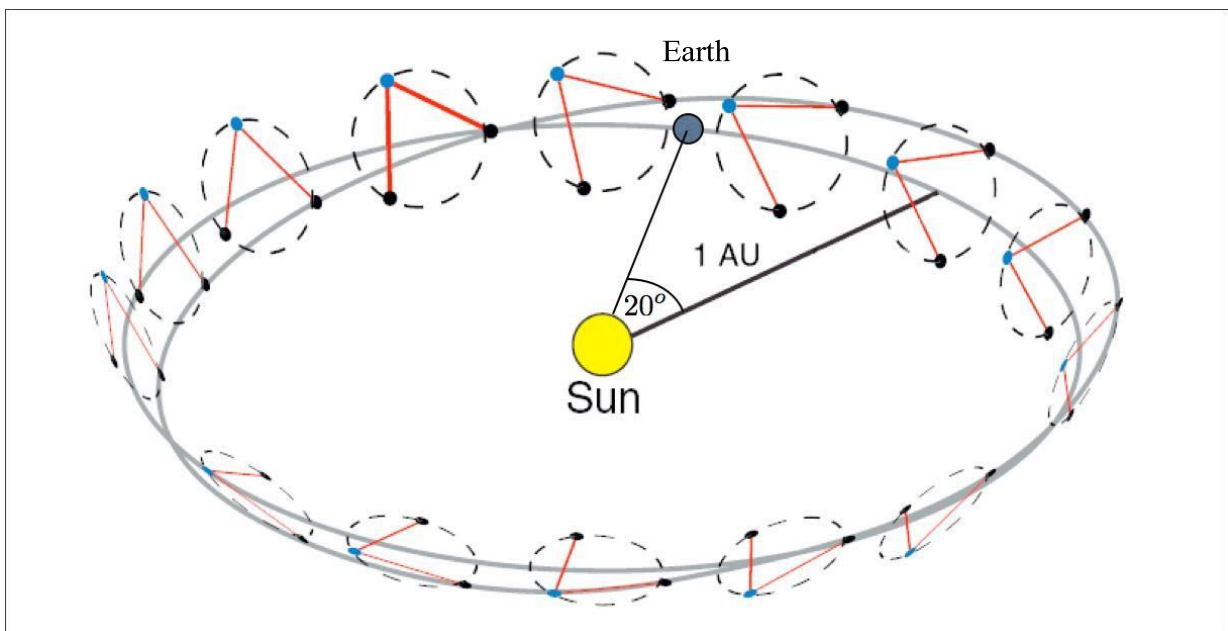


그림 2: LISA 궤도의 개념도. 세 우주선은 공통 질량중심을 기준으로 1년 주기로 회전하며, 초기에는 지구보다 20도 뒤쳐져 있다. (그림 출처: D.A. Shaddock, "An Overview of the Laser Interferometer Space Antenna", Publications of the Astronomical Society of Australia, 2009, 26, pp.128-132.)



그림 3: 지구를 뒤따르는 세 우주선의 확대도. A, B, C는 정삼각형의 꼭짓점에 위치한 세 우주선이다.

- 1.4 세 우주선이 놓인 평면에서, 한 우주선이 다른 우주선에 대해 가지는 상대 속도는 얼마인가? [1.8 점]

2. An Electrified Soap Bubble

내부 공기의 밀도는 ρ_i , 온도는 T_i , 반지름은 R_0 인 구형 비눗방울이 외부 공기(밀도 ρ_a , 대기압 P_a , 온도 T_a) 속에 존재한다. 비눗막의 표면장력은 γ , 밀도는 ρ_s , 두께는 t 이다. 비눗막의 질량과 표면장력은 온도에 따라 변하지 않는다고 가정한다. 또한 $R_0 \gg t$ 라고 가정한다. 비누-공기 경계면의 면적을 dA 만큼 증가시키는 데 필요한 에너지 증가량 dE 는, γdA 이다.

2.1 $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ 의 비를 γ , P_a , R_0 로 나타내시오. [1.7points]

2.2 다음 값을 사용하여 $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ 의 수치값을 구하시오: $\gamma = 0.0250 \text{ Nm}^{-1}$, $R_0 = 1.00 \text{ cm}$,
 $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ [0.4점]

2.3 비눗방울이 따뜻한 공기로 내부가 채워져 처음 형성되었다고 하자. 정지한 공기 중에서 비눗방울이 뜰 수 있도록 하기 위한 T_i 의 최소값을 수치적으로 구하시오. $T_a = 300 \text{ K}$, $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_a = 1.30 \text{ kg/m}^3$, $t = 100 \text{ nm}$, $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ [2.0점]

비눗방울은 시간이 지나면 주변 공기와 열평형 상태가 되고, 이 상태에서는 자연스럽게 아래로 떨어진다.

2.4 열평형 상태에서 비눗방울이 아래로 떨어지지 않도록 유지하기 위해 필요한 상향기류의 최소 속도 u 를 구하시오. 답은 ρ_0 , ρ_a , ρ_s , R_0 , g , t , 공기의 점성 계수 η 를 포함한 식으로 표현하시오. 속도는 충분히 작아 Stokes 법칙이 적용된다고 가정하고, 온도 변화에 따른 반지름 변화는 무시한다. 항력은 Stokes 법칙에 따라 $F_0 = 6\pi\eta R_0 u$ 이다. [1.6 점]

2.5 $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ 를 사용하여 u 의 수치값을 계산하시오. [0.4 점]

이상의 계산에서 알 수 있듯이, 표면장력에 해당하는 항은 전체 결과에 거의 영향을 주지 않는다. 따라서 이후의 문항들에서는 표면장력 항을 생략하여도 된다.

2.6 이 구형 비눗방울에 총 전하 q 가 균일하게 분포되어 있다고 하자. 이때 새로운 반지름 R_1 을 R_0 ,

γ , P_a , q , 자유공간의 유전율 ϵ_0 을 사용하여 나타내는 식을 구하시오. [2.0점]

2.7 총 전하가 그다지 크지 않아 $\frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4} \ll P_a$ 라 가정할 수 있으며, 비눗방울의 반지름이 아주 조금만 증가한다고 가정하자. $R_1 = R_0 + \Delta R$ 이라 할 때, ΔR 을 구하시오. 단, $(1+x)^n \approx 1+nx$ (단, $x \ll 1$)를 사용할 수 있다. [0.7점]

2.8 정지한 공기 속에서 비눗방울이 정지 상태를 유지하기 위해 필요한 전하 q 의 크기를 ϵ_0 , γ , ρ_a , ρ_s , ρ , t , R_0 , P_a 로 나타내시오. 또한 이때 q 의 수치값도 계산하시오. 자유공간의 유전율은 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 이다. [1.2점]

3. 러더퍼드 원자핵 100주년 기념 문제: 중성 원자에 의한 이온의 산란

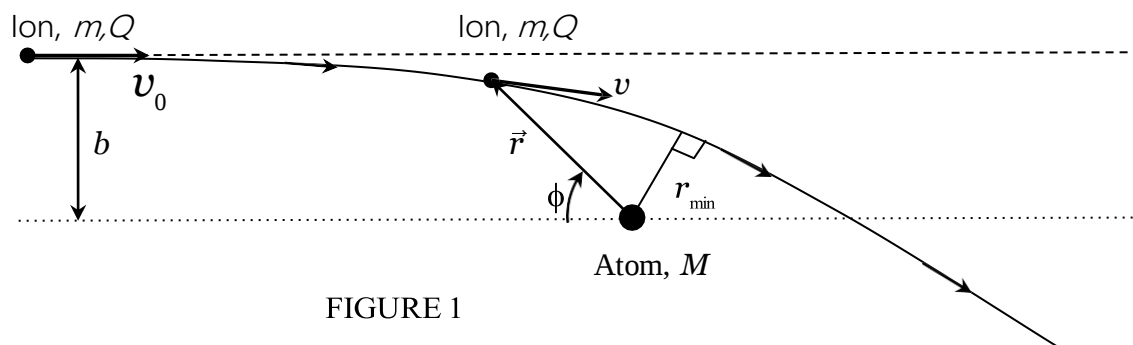


FIGURE 1

질량이 m , 전하가 Q 인 이온이 초기 비상대론적 속도 v_0 로 매우 먼 거리에서 출발하여, 질량이 M ($M \gg m$)이고 전기 분극률이 α 인 중성 원자의 근처로 접근하고 있다. 임팩트 파라미터는 b 이며, 이는 그림 1에 나와 있다. 이온이 만든 전기장 $\vec{E}$ 에 의해 원자는 순간적으로 분극된다. 그 결과 생기는 전기 쌍극자 모멘트는 $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ 이다. 복사 손실은 무시한다.

3.1 그림 2에서 이상적인 전기 쌍극자 $\vec{p}$ 가 원점 O 에 위치해 있을 때, 쌍극자 $\vec{p}$ 의 방향을 따라 거리 r 만큼 떨어진 지점에서의 전기장 세기 $\vec{E}_p$ 를 계산하십시오 [1.2 점]

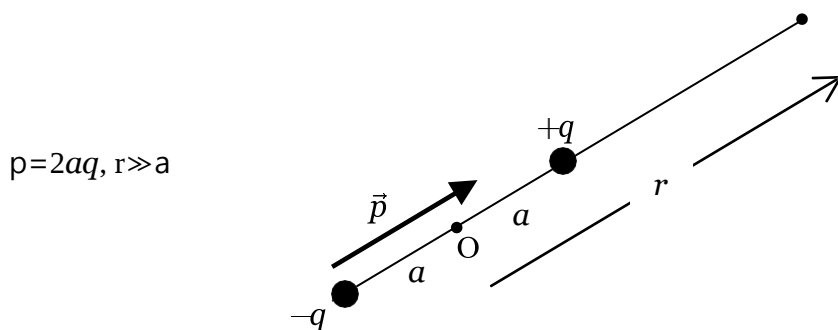


FIGURE 2

3.2 분극된 원자로 인해 이온에 작용하는 힘 f 의 식을 구하십시오. 이 힘이 이온의 전하 부호와 관계없이 항상 인력이 됨을 보이시오. [3.0점]

3.3 이온과 원자 사이 상호작용에 의한 전기적 퍼텐셜 에너지를 α, Q, r 의 식으로 표현하십시오. [0.9점]

3.4 그림 1에 나타난 가장 가까운 접근 거리 r_{min} 을 구하는 식을 유도하십시오. [2.4 점]

3.4 임팩트 파라미터 b 가 임계값 b_0 보다 작을 경우, 이온은 나선을 따라 원자로 향해 접근하게 된다. 이때 이온은 중성화되며, 원자는 전하를 얻게 된다. 이 과정을 “전하 교환(charge exchange)” 상호작용이라 한다. 이온 입장에서 바라본 이 전하 교환 충돌의 단면적 $A = \pi b_0^2$ 를 구하십시오. [2.5점]