

Data sheet: Table of physical parameters

Speed of light in vacuum	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Planck's constant over 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Gravitational constant	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Gravitational acceleration	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Elementary charge	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Electric permittivity of vacuum	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Electron mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Avogadro constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann constant	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Stony meteorite, specific heat	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Stony meteorite, thermal conductivity	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Stony meteorite, density	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Stony meteorite, melting point	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Stony meteorite, specific melting heat	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Silver, molar mass	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Silver, density	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Silver, specific heat capacity	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Water, molar mass	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Water, density	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Water, specific heat capacity	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Water, heat of vaporization	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Water, boiling temperature	$T_{100} = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373.15 \text{ K}$
Ice, density of glacier	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Steam, specific heat capacity	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Earth, mass of the	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Earth, radius of the	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Sun, mass of the	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Sun, radius of the	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Average Sun-Earth distance	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

서론

유성체(meteoroid)는 혜성이나 소행성에서 떨어져 나온 작은 입자(보통 1m보다 작음)를 의미한다. 유성체가 지면에 충돌하면 운석(meteorite)이라 불린다. 2009년 1월 17일 밤, 발트해 근처에 있던 많은 사람들은 지구 대기를 가로지르며 떨어지는 유성체의 빛나는 궤적 또는 불덩이(fireball)를 목격했다. 스웨덴의 한 감시 카메라는 이 사건을 촬영했으며, 그 중 한 장면은 그림 1.1(a)에 나타나 있다. 사진 자료와 목격자 증언을 통해 추락 지점을 좁힐 수 있었고, 6주 후 덴마크 남부 마리보(Maribo)라는 마을 근처에서 질량이 0.025 kg인 운석이 발견되었다.

이 운석은 'Maribo 운석'이라 명명되었고, 그 물성과 궤도를 측정한 결과 매우 흥미로운 사실들이 밝혀졌다. 대기권에 진입할 당시 속도는 예외적으로 빨랐으며, 나이는 4.567×10^9 년으로, 태양계가 형성된 직후 생성된 것으로 나타났다. Maribo 운석은 혜성 Encke의 일부였을 가능성이 있다.

Maribo의 속도

이 불덩이는 서쪽 방향, 즉 북쪽 기준 방위각 285° 로 이동했고, 이는 이후 운석이 발견된 위치를 향하는 방향이었다 (그림 1.1 참고). 운석은 감시 카메라로부터 북쪽 기준 방위각 230° 방향, 195 km 떨어진 지점에서 발견되었다.

1.1	이 정보와 그림 1.1의 데이터를 이용하여, 프레임 155와 161 사이 시간 구간에서 Maribo의 평균 속도를 계산하시오. 지구의 곡률과 유성체에 작용하는 중력은 무시할 수 있다.	1.3
-----	--	-----

대기권 진입과 용해 여부

고층 대기에서 유성체에 작용하는 공기 마찰력은 유성체의 형태, 속도, 대기의 밀도 및 온도에 따라 복잡하게 결정된다. 그러나 근사적으로는 다음과 같은 식으로 마찰력을 표현할 수 있다: v_m

$$F = k \cdot \rho_{at\ m} \cdot A \cdot v^2$$

여기서 k 는 상수, $\rho_{at\ m}$ 은 대기의 밀도, A 는 유성체의 단면적, v 는 속도이다.

이 문제에서 유성체는 다음과 같은 조건을 가진 구형으로 모델링된다:

질량 $m_M = 30$ kg, 반지름 $R_M = 0.13$ m, 온도 $T_0 = 200$ K, 속도 $v_M = 2.91 \times 10^4$ m/s

대기 밀도는 지표면에서 40 km 상공에서의 값을 일정하게 유지한다고 가정하며 $\rho_{at\ m} = 4.1 \times 10^{-3}$ kg/m³, 마찰 계수는 $k = 0.60$ 이다.

1.2a	유성체가 대기권에 진입한 후, 속도가 10% 감소하여 $v_M \rightarrow 0.90v_M$ 가 되기까지 걸리는 시간을 추정하시오. 유성체에 작용하는 중력은 무시하고, 질량과 형태는 변하지 않는다고 가정하시오.	0.7
1.2b	대기권에 진입할 당시 유성체가 가진 운동에너지 E_{kin} 이, 이를 완전히 용해시키는 데 필요한 에너지 E_{mel} 보다 몇 배 더 큰지를 계산하시오. (필요한 값은 데이터 시트를 참고하시오.)	0.3

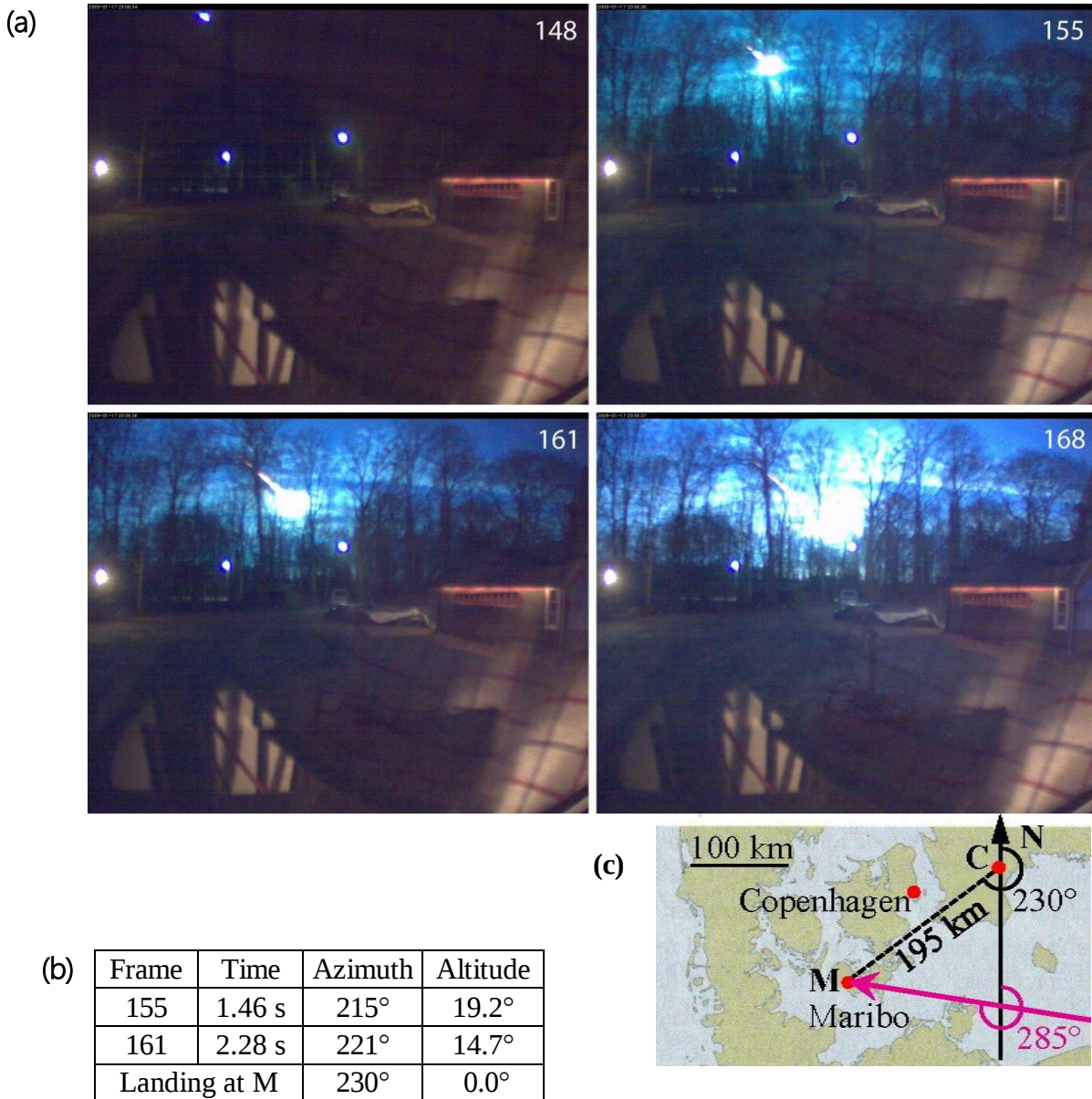


그림 1.1 (a) 방위각(azimuth)은 수평면에서 북쪽을 기준으로 시계 방향으로 잴 각도이며, 고도(altitude)는 수평선 위에서의 각도를 의미한다. 스웨덴의 감시 카메라가 촬영한 연속 프레임에는 대기권을 통과하며 불덩이로 떨어지는 Maribo의 궤적이 담겨 있다. (b) 두 프레임에서의 데이터로, 시간과 카메라(C)에서 관측된 방향(방위각, 도 단위) 및 수평선 위 고도(고도각, 도 단위)를 나타낸다.

(c) 카메라(C)에서 본 Maribo의 이동 경로(자홍색 화살표)와 북쪽(N), 그리고 운석이 착지한 덴마크의 착륙 지점(M)의 방향을 스케치로 나타낸 것이다.

Maribo가 대기중 낙하할 때의 가열 과정

암석질 유성체인 Maribo는 초음속으로 대기에 진입하면서, 주변 공기가 빛나며 불덩이(fireball)처럼 보이게 되었다. 그러나 실제로 가열된 것은 Maribo의 가장

바깥층뿐이었다. Maribo는 밀도 ρ_{sm} , 비열 c_{sm} , 열전도율 k_{sm} 을 갖는 균질한 구형이라고 가정하며(값은 데이터 시트 참조), 대기 진입 당시 온도는 $T_0 = 200$ K였다. 대기를 통과하며 마찰에 의해 표면 온도는 $T_s = 1000$ K로 유지되었고, 이로 인해 내부는 점차 가열되었다. 대기 중에서 t 초 동안 낙하한 후, Maribo의 바깥에서부터 x 의 두께를 가진 껍질 영역이 T_0 보다 상당히 높은 온도로 가열되었을 것이다. 이 두께 x 는 열역학적 변수들의 차원 해석을 통해 다음과 같은 곱 형태로 근사할 수 있다:

$$x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$$

1.3a	차원(단위) 해석을 이용하여 각 지수 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 의 값을 결정하십시오.	0.6
1.3b	낙하 시간 $t = 5$ s일 때, 두께 x 를 계산하고 비율 x / R_M 를 구하십시오.	0.4

운석의 나이

방사성 원소의 화학적 성질이 다르기 때문에, 운석 내 광물이 결정화되는 동안 특정 광물에는 어떤 방사성 원소가 더 많이 포함되고, 다른 광물에는 적게 포함된다. 이 차이를 이용해 방사성 광물의 방사능 연대를 측정하면 운석의 나이를 구할 수 있다. 특정 예로, 원자번호 37번의 동위 원소인 ^{87}Rb 는 안정 동위 원소인 ^{87}Sr (원자번호 38)로 붕괴하며, 그 반감기는 $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ 년이다. 이 붕괴는 안정한 ^{86}Sr 을 기준으로 분석된다. 결정화 당시에는 모든 광물에서 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 비율이 동일했지만, $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ 비율은 서로 달랐다. 시간이 지남에 따라 ^{87}Rb 는 붕괴로 줄어들고, 이에 따라 ^{87}Sr 은 증가하게 된다. 이 결과 현재의 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 비율은 결정화 당시와 달라지게 된다

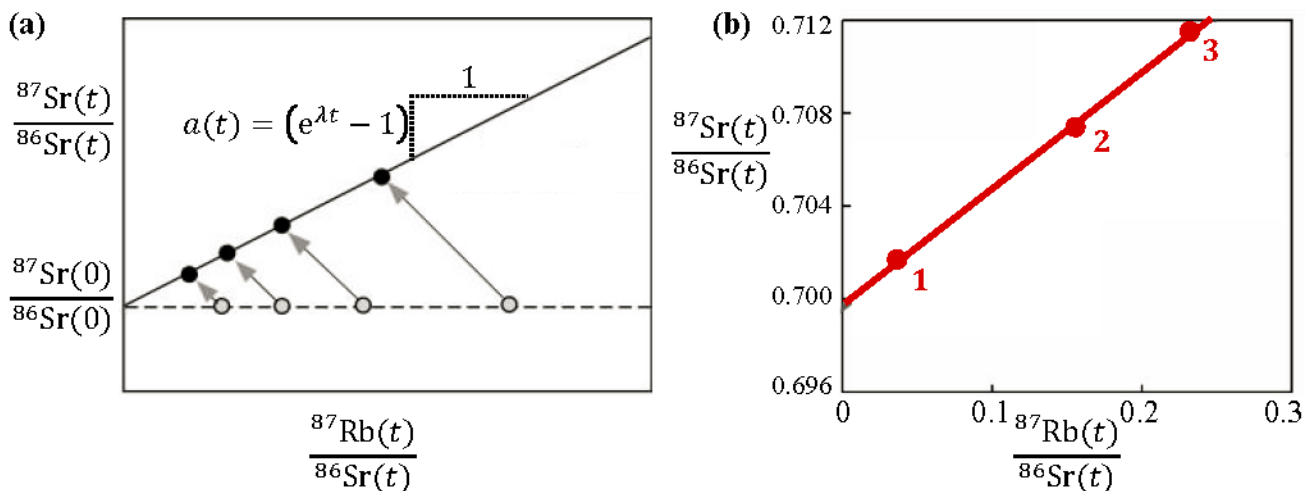


그림 1.2 (a) 광물 샘플마다의 시간 $t = 0$ 에서의 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 비율(빈 원)과 현재의 비율(채워진 원) (b) 동일 운석에서 채취한 세 광물 샘플의 현재 비율로부터 그려진 isochron 선

1.4a	$^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$ 로의 붕괴 반응식을 쓰시오.	0.3
1.4b	같은 운석에서 얻은 서로 다른 광물 샘플에 대해, 현재의 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 비율을 현재의 $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ 비율에 대해 플롯하면, 직선(isochron 선)이 되며, 그 기울기는 $a(t) = e^{\lambda t} - 1$ 임을 보이시오. 여기서 t 는 광물이 형성된 이후의 시간이고, λ 는 붕괴 상수로 반감기 $T_{1/2}$ 에 반비례한다.	0.7
1.4c	그림 1.2(b)의 isochron 선을 이용하여 운석의 나이 τ_M 를 구하십시오.	0.4

Comet Encke, Maribo의 기원일 수도 있는 천체

태양을 공전하는 궤도에서, 혜성 Encke가 태양에 가장 가까울 때와 가장 멀리 있을 때의 거리는 각각 다음과 같다: $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10} \text{ m}$ and $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11} \text{ m}$, respectively.

1.5	혜성 Encke의 공전 주기 t_{Encke} 를 계산하시오.	0.6
-----	---	-----

지구 충돌 시 소행성의 영향

약 6천5백만 년 전, 지구는 밀도 $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 반지름 $R_{\text{ast}} = 5.0 \text{ km}$, 최종 속도 $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$ 인 거대한 소행성과 충돌하였다. 이 충돌은 지구 생물의 대량 멸종과 멕시코의 거대한 칩술루브(Chicxulub) 충돌 분화구의 형성을 초래하였다. 동일한 조건의 소행성이 오늘날 지구와 완전비탄성 충돌(운동량 보존, 에너지 손실 있음)을 한다고 가정하자. 지구의 관성모멘트는 동질구(homogeneous sphere)의 값에 0.83을 곱한 값이며, 동질구의 관성모멘트는 다음과 같다:

$$I = (2/5) \cdot M \cdot R^2$$

지구의 공전 궤도 변화는 무시한다.

1.6a	소행성이 북극에 수직으로 충돌할 경우, 충돌 후 지구 자전축의 방향이 최대 얼마나 변화할 수 있는지 구하시오.	0.7
1.6b	행성이 적도에 반지름 방향(radial)으로 충돌할 경우, 충돌 후 자전 주기의 변화량 $\Delta \tau_{\text{vt}}$ 를 구하시오.	0.7
1.6c	소행성이 적도에 접선 방향(tangential)으로 충돌할 경우, 충돌 후 자전 주기의 변화량 $\Delta \tau_{\text{tan}}$ 을 구하시오	0.7

최대 충돌 속도

태양계 내에서 중력적으로 속박된 천체가 지구 표면에 충돌한다고 하자. 이때 초기에는 지구의 중력을 무시하며, 대기 마찰, 다른 천체들의 영향, 지구의 자전은 모두 무시한다.

1.7	지구에 충돌 가능한 최대 속도 $v_{\text{imp-max}}$ 를 계산하시오.	1.6
-----	--	-----

서론

이 문제에서는 실험적으로 작동이 입증된 효율적인 증기 생성 과정을 다룬다. 반지름이 나노미터 크기인 구형 은(Ag) 나노입자가 포함된 수용액(물 기반 용액)을 집속된 빛으로 조사하면, 입자당 농도가 리터당 약 10^{13} 개에 불과함에도 불구하고 증기를 생성할 수 있다. 빛의 일부는 나노입자에 흡수되며, 이로 인해 입자가 가열되고 그 주변에서 국소적으로 증기가 생성된다. 이 과정은 전체 수용액을 가열하지 않고도 증기를 생성하며, 증기는 증기 방울 형태로 시스템 밖으로 배출된다. 이 현상의 모든 세부 사항이 완전히 이해된 것은 아니지만, 핵심 과정은 금속 나노입자에서 발생하는 집단 전자 진동(collective electron oscillation)을 통한 광 흡수로 알려져 있다. 이러한 장치는 플라즈모닉 증기 발생기(plasmonic steam generator)라 불린다.

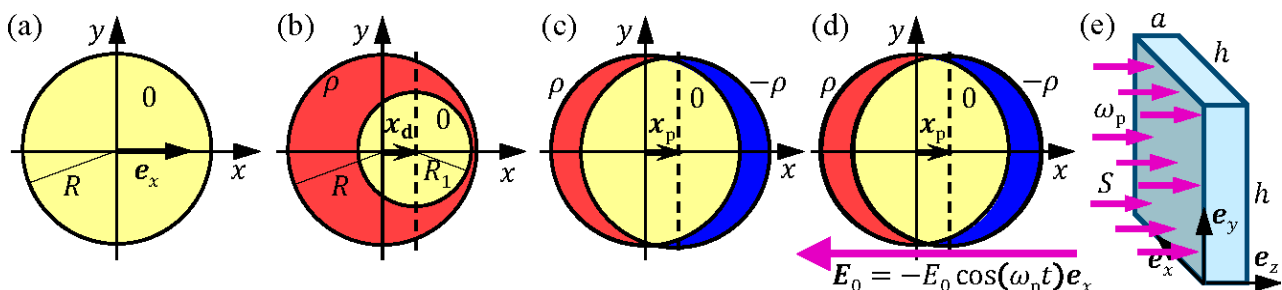


그림 2.1 (a) 좌표 원점에 고정된 반지름 R 의 구형 전기 중성 나노입자 (b) 균일한 양의 전하 밀도 ρ 를 가진 구형 영역(붉은색)과 그 안에 중심이 $x_d = x_d e_x$ 만큼 이동된 반지름 R_1 의 전기 중성 구형 영역(노란색) (c) 은 이온의 양전하 분포(ρ)는 원점에 고정되어 있고, 자유 전자 구름의 음전하 분포($-\rho$)의 중심은 x_p 만큼 이동됨. 단, $x_p \ll R$ (d) 외부 균일 전기장 $E_0 = -E_0 e_x \cos(\omega_p t)$ 가 작용할 때, 전자 구름은 속도 $v = dx_p / dt$ 로 운동함 (e) 높이 $h \times h$, 길이 a 의 직육면체 용기 안에 나노입자 수용액이 있으며, 단색광이 z 축 방향으로, 각주파수 ω_p 와 세기 S 로 입사됨

단일 은 나노입자

이 문제 전체에서 다룰 입자는 반지름 $R = 10.0 \text{ nm}$ 인 구형 은(Ag) 나노입자로, 좌표계 원점에 고정되어 있다 (그림 2.1(a) 참조). 모든 운동, 힘, 전기장은 수평 방향인 x 축을 따라 정렬되어 있다 (단위벡터 e_x). 이 나노입자는 자유(전도) 전자를 포함하고 있으며, 이 전자들은 특정 은 원자에 속하지 않고 전체 입자 내부를 자유롭게 이동할 수 있다. 각 은 원자는 하나의 자유 전자를 방출한 양이온(positive ion)으로 간주된다.

2.1	다음 물리량들을 구하시오: 입자의 부피 V 와 질량 M , 입자 내부의 은 이온 수 N 과 그들의 전하 밀도 ρ , 자유 전자의 농도 n , 총 전하 Q , 총 질량 m_0	0.7
-----	---	-----

전하를 띤 구 내부의 전기 중성 영역에 존재하는 전기장

이후의 문제에서는 모든 물질의 상대 유전율이 $\epsilon = 1$ 임을 가정한다. 균일한 전하 밀도 ρ 와 반지름 R 을 갖는 구형 영역 내부에, 반대 전하 밀도 $-\rho$ 를 더하여 반지름 R_1 의 작은 전기 중성 구형 영역이 생성된다. 이 영역의 중심은 R -구 중심에서 $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ 만큼 이동된 위치에 있다 (그림 2.1(b) 참조).

2.2	전기 중성 영역 내부의 전기장이 다음과 같은 균일한 형태임을 보이고, 계수 A 를 구하시오: $\mathbf{E} = A \cdot (\rho / \epsilon_0) \cdot \mathbf{x}_d$	1.2
-----	---	-----

이동한 전자 구름에 작용하는 복원력

이제부터는 자유 전자의 집단적 운동을 다룬다. 전자들을 균일한 전하 밀도 $-\rho$ 를 갖는 구형 음전하 덩어리로 모델링하고, 그 중심 위치를 $\mathbf{x}_p$ 라 하자. 이는 원점에 고정된 양전하 구(은 이온) 중심에 대해 x 축 방향으로 상대적으로 이동할 수 있다 (그림 2.1(c) 참조). 외부 힘 F_{ext} 가 작용하여 전자 구름이 새로운 평형 위치 $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$ 로 이동했다고 하자. 단, $|x_p| \ll R$ 이고, 나노입자 내부 대부분은 여전히 전기적으로 중성인 상태로 남아 있다고 가정한다.

2.3	복원력 F 와 전자 구름이 이동할 때 외부 전기장에 의해 수행된 일 W_{el} 을 전자 위치 x_p 와 자유전자 농도 n 의 식으로 나타내시오.	1.0
-----	--	-----

외부 정전기장 내에 있는 구형 은 나노입자

진공 중에 놓인 나노입자가 정적인 균일 전기장 $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$ 에 의해 외력을 받아 전자 구름이 x_p 만큼 (단, $|x_p| \ll R$) 이동한다고 하자.

2.4	전자 구름의 이동 거리 x_p 를 E_0 와 n 의 식으로 표현하시오. 또한, 나노입자 중심의 yz 평면을 통과하여 이동한 전자 전하량 $-\Delta Q$ 를 n, R, x_p 의 식으로 나타내시오.	0.6
-----	--	-----

은 나노입자의 등가 정전용량과 인덕턴스

정전기장 또는 시간 의존 전기장 $\mathbf{E}_0$ 에 대해 이 나노입자는 등가 전기 회로로 모델링될 수 있다. 등가 정전용량은, 전하 분리량 ΔQ 에 대해 전자 구름에 가해진 일 W_{el} 을 축전기의 에너지 식과 비교하여 정의할 수 있다. 이때 전하 $\pm \Delta Q$ 가 축적될 때, 축전기 양단에는 어떤 등가 전압 V_0 가 걸리게 된다.

2.5a	이 시스템의 등가 정전용량 C 를 ϵ_0 와 R 의 식으로 나타내고, 수치값을 구하시오.	0.7
2.5b	이 정전용량에 대해, 전하 ΔQ 가 축적되기 위해 인가되어야 하는 등가 전압 V_0 를 E_0 와 R 의 식으로 나타내시오.	0.4

시간에 따라 변하는 전기장 $\mathbf{E}_0$ 가 가해지면, 전자 구름은 속도 $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ 로 움직이게 된다 (그림 2.1(d) 참고). 전자 구름은 운동 에너지 $W_{k \text{ in}}$ 을 가지며, 고정된 yz 평면을 가로질러 전류 I 를 형성한다. 전자 구름의 운동 에너지는 전류 I 가 흐르는 등가 인덕터의 에너지로 간주할 수 있다.

2.6a	속도 v 로 표현되는 전자 구름의 운동 에너지 $W_{k \text{ in}}$ 과 전류 I 를 각각 구하시오.	0.7
2.6b	입자 반지름 R , 전자 전하 e , 전자 질량 m_e , 전자 밀도 n 으로 표현되는 등가 인덕턴스 L 을 구하고, 그 값을 계산하시오.	0.5

은 나노입자의 플라즈몬 공명

앞서의 분석에서 알 수 있듯이, 전자 구름을 평형 위치에서 변위시킨 다음 놓았을 때 생기는 운동은 공명 상태에서 진동하는 이상적인 LC 회로로 모델링할 수 있다. 전자 구름의 이러한 동역학적 모드는 플라즈몬 공명(plasmon resonance)이라 불리며, 소위 플라즈몬 각진동수

ω_p 로 진동하게 된다.

2.7a	전자 구름의 플라즈몬 각진동수 ω_p 를 전자 전하 e 와 질량 m_e , 전자 밀도 n , 진공 유전율 ϵ_0 의 함수로 표현하라.	0.5
2.7b	ω_p 를 rad/s 단위로 계산하고, 진공에서 각진동수 $\omega = \omega_p$ 를 갖는 빛의 파장 λ_p 를 nm 단위로 계산하라.	0.4

플라즈몬 진동수에서 빛을 조사받는 은 나노입자

이 문제의 나머지 부분에서는, 나노입자가 플라즈몬 각진동수 ω_p 에서의 단색광(monochromatic light)을 조사받는 상황을 다룬다. 입사 강도는 $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW/m}^2$ 이고, 파장이 매우 크므로($\lambda_p \gg R$), 나노입자는 공간적으로 균일한 조화적 진동 전기장

$$E_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) e_x$$

속에 놓여 있는 것으로 간주할 수 있다. 이 전기장에 의해 전자 구름의 중심 $x_p(t)$ 은 동일한 주파수로 진동하며, 속도는 $v = dx_p/dt$ 이고 진폭은 일정한 x_0 이다. 이러한 전자의 진동 운동은 빛의 흡수를 유도한다. 나노입자가 흡수한 에너지는 입자 내부의 줄 가열(Joule heating)로 전환되거나, 산란광 형태로 다시 방출된다. 줄 가열은 무작위적인 비탄성 충돌로 인해 발생하며, 자유 전자가 은 이온과 충돌하여 운동 에너지를 완전히 잃고, 이 에너지가 은 이온의 진동(열)으로 변환되는 과정이다. 충돌 사이의 평균 시간은 $\tau \gg 1/\omega_p$ 로, 은 나노입자의 경우 $\tau = 5.24 \times 10^{-15} \text{ s}$ 를 사용한다.

2.8a	나노입자 내의 시간 평균 줄 가열 전력 $P_{h \text{ eat}}$ 과, 전자 구름의 시간 평균 속도 제곱 $\langle v^2 \rangle$ 을 포함하는 시간 평균 전류 제곱 $\langle I^2 \rangle$ 의 식을 구하라.	1.0
2.8b	전자 구름의 전류 I 에 의한 줄 가열 전력 $P_{h \text{ eat}}$ 을 갖는 나노입자의 등가 저항 모델에서, 등가 저항 $R_{h \text{ eat}}$ 의 식을 구하고 수치값을 계산하라.	1.0

입사광은 전자 구름의 진동에 의해 산란되어 일부 시간 평균 전력을 P_s , P_{at} 만큼 잃게 된다(재방출). 이 P_s , P_{at} 은 산란 소스의 진폭 x_0 , 전하 Q , 각진동수 ω_p , 그리고 빛의 물성(진공 중의 광속 c 와 유전율 ϵ_0)에 의존한다. 이 네 개의 변수로 표현된 식은 다음과 같다:

$$P_s, P_{at} = Q^2 \omega_p^4 x_0^2 / (12\pi \epsilon_0 c^3)$$

2.9	P_s , c_{at} 을 이용하여, 전자 구름의 진동에 의한 산란을 등가 저항 모델로 설명할 때의 등가 산란 저항 R_s , c_{at} 의 식을 ($R_{h \text{ eat}}$ 과 유사한 방식으로) 유도하고, 그 값을 계산하라.	1.0
-----	---	-----

위에서 정의한 등가 회로 요소들을 조합하여, 은 나노입자를 LCR 직렬 회로로 모델링할 수 있다. 이 회로는 입사광의 전기장 E_0 에 의해 결정되는 조화적으로 진동하는 등가 전압 $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ 에 의해 구동된다.

2.10a	플라즈몬 공명 주파수 $\omega = \omega_p$ 에서의 입사광 전기장 진폭 E_0 를 포함하는 시간 평균 전력 손실 $P_{h \text{ eat}}$ 및 P_s , c_{at} 의 식을 유도하라.	1.2
2.10b	E_0 , $P_{h \text{ eat}}$, P_s , c_{at} 의 수치값을 계산하라.	0.3

빛에 의한 증기 생성

농도가 $n_p = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ 인 은 나노입자 수용액이 준비된다. 이 용액은 크기 $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$ 인 직육면체 투명 용기 안에 담기고, 위에서와 같이 플라즈몬 공명 각진동수에서의 광 강도 $S = 1.00 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$ 로 수직 입사되는 빛에 의해 조사된다(그림 2.1(e) 참조). 물의 온도는 $T_{wa} = 20^\circ \text{C}$ 이며, 정상 상태에서 나노입자의 줄 가열(Joule heating)로 생성된 모든 에너지가 물을 가열하지 않고 증기 생성에만 사용된다고 가정한다. 생성된 증기의

온도는 $T_{s\ t} = 110\ ^\circ\text{C}$ 이다.

플라즈모닉 증기 발생기의 열역학적 효율 η 는

$$\eta = P_{s\ t} / P_{t\ ot}$$

으로 정의되며, 여기서 $P_{s\ t}$ 는 전체 용기에서 증기 생성에 사용된 전력, $P_{t\ ot}$ 는 용기에 입사한 전체 광 전력을 의미한다. 대부분의 시간 동안 개별 나노입자는 물이 아닌 증기로 둘러싸여 있으므로, 진공 중에 존재하는 것으로 모델링할 수 있다.

2.11a	플라즈몬 공명 주파수에서의 빛과 광 강도 S 로 조사되는 동안, 플라즈모닉 증기 발생기가 생성하는 증기의 단위 시간당 총 질량 $\mu_{s\ t}$ 를 계산하라.	0.6
2.11b	플라즈모닉 증기 발생기의 열역학적 효율 η 의 수치값을 계산하라.	0.2

도입

이 문제는 세계에서 두 번째로 큰 빙하인 그린란드 빙상(Greenlandic ice sheet)의 물리 현상에 대해 다룬다(그림 3.1(a)). 이상화된 모델로서, 그린란드는 폭 $2L$, 길이 $5L$ 의 직사각형 섬으로 간주되며, 지면은 해수면에 있고, 전체가 압축되지 않는(밀도 ρ_{ice} 가 일정한) 얼음으로 덮여 있다고 가정한다(그림 3.1(b)). 빙상의 높이 분포 $H(x)$ 는 y -좌표에 의존하지 않으며, 해안인 $x = \pm L$ 에서는 0이고, 중심 남북축(y 축)인 얼음 분수령(ice divide)에서는 최대 높이 H_m 에 이른다(그림 3.1(c)).

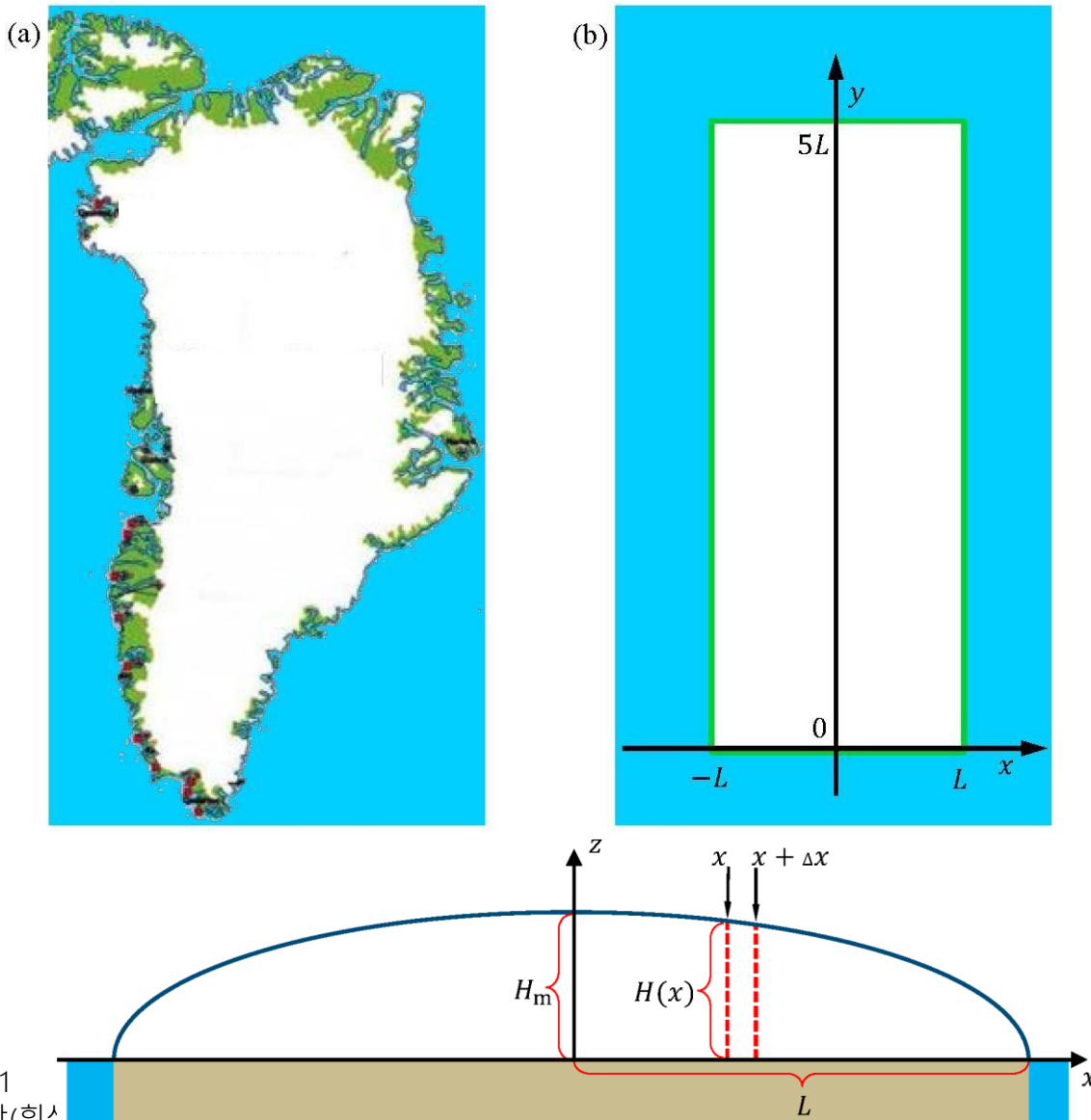


그림 3.1

(a) 빙상(현상). (b) xy 평면 위에 $2L \times 5L$ 면적으로 얼음이 덮여 있는 이상화된 모델. 최대 높이 H_m 의 선인 얼음 분수령은 y 축을 따라 존재한다.

(c) xz 평면에서의 빙상 단면. 높이 분포 $H(x)$ 는 $0 < y < 5L$ 구간에서는 y 에 독립적이며, $y = 0$ 및 $y = 5L$ 에서는 급격히 0으로 떨어진다. z 축은 얼음 분수령의 위치를 나타낸다. 시각적 명료성을 위해 수직 축의 크기가 수평 축에 비해 과장되어 있다. 얼음의 밀도 ρ_{ice} 는 일정하다.

두 가지 유용한 공식

이 문제에서는 다음 적분과 근사식을 사용할 수 있다.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

단, $(1+x)^a \approx 1+ax$ ($|ax| \ll 1$ 일 때)

빙상의 높이 분포

짧은 시간 척도에서는 빙하는 고정된 높이 분포 $H(x)$ 를 가진 비압축성 정수압계(hydrostatic system)로 간주된다.

3.1	지면으로부터의 높이를 z , 빙봉 분할선으로부터의 수평 거리 x 에 대한 함수로써, 빙하 내부의 압력 $p(x, z)$ 의 표현식을 쓰시오. 대기압은 무시한다.	0.3
3.2a	주어진 x 에서, $\Delta x \rightarrow 0$ 극한에서 $S_\beta = kH \, dH/dx$ 임을 보이고, 계수 k 의 값을 구하시오.	0.9
3.2b	빙하의 높이 함수 $H(x)$ 를, $\rho_i c_e$, g , L , S_β 및 x 의 함수로 나타내시오. 이 결과로부터 빙하의 최대 높이 H_m 이 반너비 L 에 대해 $H_m \propto L^{1/2}$ 임이 드러나야 한다.	0.8
3.2c	빙하의 전체 부피 $V_i c_e$ 가 직사각형 섬의 면적 A 에 대해 $V_i c_e \propto A^\gamma$ 의 형태로 스케일링될 때, 지수 γ 를 구하시오.	0.5

장기적인 시간척도에서의 빙하 역학

장기적인 시간 척도에서는 빙하는 점성 있는 비압축성 유체로 간주되며, 중력에 의해 중심부에서 해안으로 흐른다. 이 모델에서는 빙하가 정상 상태에서 일정한 높이 분포 $H(x)$ 를 유지한다고 가정한다. 중심부에서는 강설에 의한 얼음의 축적이 있고, 해안에서는 융해가 일어나 이 두 작용이 균형을 이룬다. 그림 3.1(b), (c)의 빙하 형상 외에도 다음과 같은 모델 가정을 따른다:

1. 얼음은 xz 평면에서 얼음 분기선(즉, y 축)에서 멀어지는 방향으로 흐른다.
2. 중심부에서의 축적률 c 는 일정한 값(m/year)이다.
3. 얼음은 해안인 $x = \pm L$ 부근에서 융해를 통해서만 이탈할 수 있다.
4. 얼음 흐름의 수평 속도 성분 $v_x(x) = dx/dt$ 는 z 에 무관하다.
5. 얼음 흐름의 수직 속도 성분 $v_z(z) = dz/dt$ 는 x 에 무관하다.

중심부 근처, 즉 $|x| \ll L$ 인 영역만을 고려하자. 이 영역에서는 얼음의 높이 변화가 매우 작으므로 무시할 수 있고, 따라서 $H(x) \approx H_m$ 이라 가정할 수 있다.

3.3	질량 보존 조건을 이용하여, 수평 얼음 흐름 속도 $v_x(x)$ 를 축적률 c , 위치 x , 최대 높이 H_m 의 함수로 표현하라.	0.6
-----	---	-----

얼음의 밀도 ρ_{ice} 가 일정하다는 비압축성 가정에 따르면, 질량 보존은 다음과 같은 속도 성분들 사이의 관계식을 만족시킨다.

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	얼음 흐름 속도의 수직 성분 $v_z(z)$ 의 z 의존성을 나타내는 식을 적어라.	0.6
	초기 표면 위치 (x_i, H_m) 에 있던 작은 얼음 입자는 시간이 지남에 따라 얼음층의 일부로서 xz 평면 상의 유선 $z(x)$ 를 따라 이동하게 된다.	
3.5	그러한 유선 $z(x)$ 를 나타내는 식을 유도하라.	0.9

운동하는 빙상에서의 나이 및 기후 지시자

얼음 흐름 속도의 성분들 $v_x(x)$, $v_z(z)$ 를 바탕으로, 얼음 표면으로부터 깊이 $H_m - z$ 에 있는 얼음의 나이 $\tau(z)$ 를 추정할 수 있다.

3.6	얼음 분기선 $x = 0$ 에서, 지면으로부터 높이 z 에 있는 얼음의 나이 $\tau(z)$ 를 z 의 함수로 표현하라.	1.0
-----	--	-----

그린란드 빙상의 내부에서 시추한 아이스코어는 과거에 내린 눈의 층을 관통하며, 이를 분석하면 과거의 기후 변화를 밝혀낼 수 있다. 가장 잘 알려진 지시자 중 하나는 소위 $\delta^{18}O$ 로, 다음과 같이 정의된다.

$$\delta^{18}O = (R_{ice} - R_{ref}) / R_{ref} \times 1000 \text{ ‰}$$

여기서 $R = [^{18}O]/[^{16}O]$ 는 산소의 두 안정 동위원소인 ^{18}O 와 ^{16}O 의 상대적인 존재비를 뜻한다. 기준값 R_{ref} 는 적도 부근 해양의 동위원소 조성을 기반으로 한다.

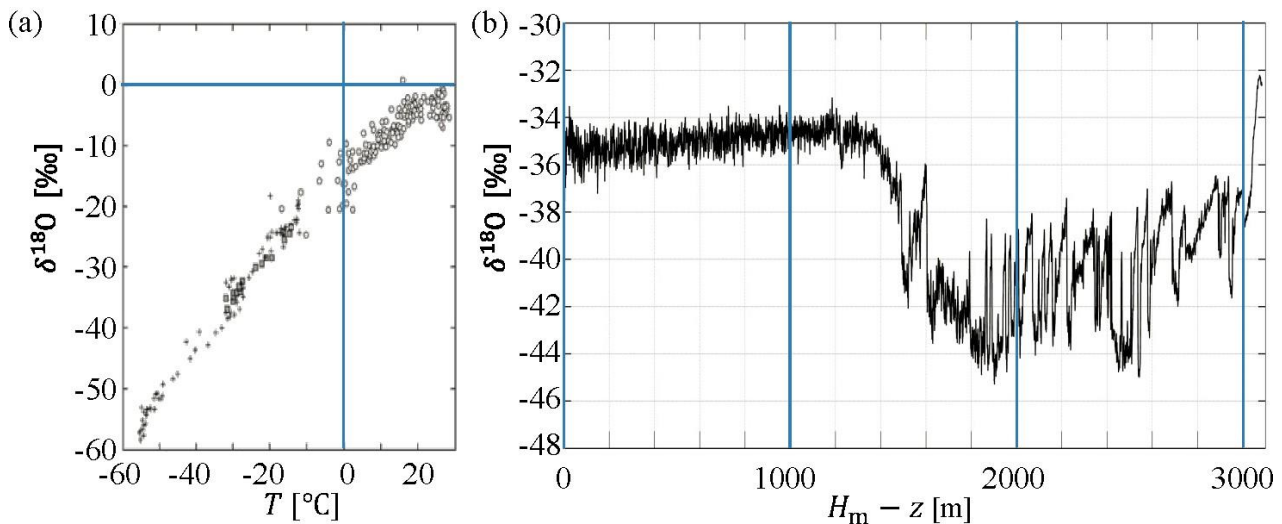


그림 3.2

(a) 눈 속의 $\delta^{18}O$ 와 연평균 지표면 온도 T 사이의 관측된 관계.

(b) 그린란드 얼음 분기선 상의 특정 지점에서, 표면부터 암반까지 시추된 아이스코어를 통해 얻은 $\delta^{18}O$ 와 깊이 $H_m - z$ 사이의 측정값. 이 지점에서의 최대 얼음 높이는 $H_m = 3060$ m이다.

그린란드 빙상에서의 관측에 따르면, 눈 속의 $\delta^{18}\text{O}$ 는 온도 T 와 대략 선형적인 관계를 보인다 (그림 3.2(a)). 이러한 관계가 과거에도 항상 성립했다고 가정하면, 깊이 $H_m - z$ 에서 채취한 아이스코어 속의 $\delta^{18}\text{O}$ 를 통해 해당 깊이에 대응하는 시기의 그린란드 인근 기온 T 를 추정할 수 있다.

길이 3060 m의 그린란드 아이스코어에서 측정한 $\delta^{18}\text{O}$ 는 깊이 1492 m에서 급격한 변화를 보이며 (그림 3.2(b)), 이는 마지막 빙하기의 종료 시점을 나타낸다. 빙하기는 120,000년 전에 시작되었으며, 깊이 3040 m에 해당하고, 현재의 간빙기는 11,700년 전에 시작되어 깊이 1492 m에 해당한다. 이 두 시기를 각각 다른 축적률, 즉 c_{ia} (빙하기)와 c_{ig} (간빙기)로 모델링할 수 있다고 가정한다. 120,000년 동안 H_m 은 일정하게 유지된 것으로 본다.

3.7a	빙하기와 간빙기의 축적률 c_{ia} , c_{ig} 를 구하시오.	0.8
3.7b	그림 3.2의 데이터를 이용하여 빙하기에서 간빙기로의 전환 시 기온 변화량을 구하시오.	0.2

그린란드 빙상의 용해로 인한 해수면 상승

그린란드 빙상이 전부 녹는다면 전 세계 바다의 해수면 상승을 초래하게 된다. 이에 대한 거친 추정으로, 지구 해양의 전체 면적이 일정하고 균일하게 상승한다고 가정하여 계산할 수 있다. 이때 전 지구 해양의 면적은 $A_o = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$ 이다.

3.8	현재 그린란드 빙상의 면적이 $A^G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ 이고, 지반 마찰응력이 $s_\beta = 100 \text{ kPa}$ 일 때, 그린란드 빙상이 전부 녹을 경우 예상되는 전 세계 평균 해수면 상승량을 계산하시오.	0.6
-----	--	-----

거대한 그린란드 빙상은 주변 해양에 대해 중력적인 인력을 미친다. 만약 빙상이 녹게 되면 이러한 국소적인 '고조' 현상이 사라지게 되며, 그린란드 근처에서는 오히려 해수면이 하강하게 된다. 이는 앞서 계산한 평균 해수면 상승과 부분적으로 상쇄되는 효과를 낸다. 이 중력 효과의 크기를 추정하기 위해, 그린란드 빙상을 지면에 위치한 점질량으로 모델링하고, 이 점질량의 질량은 전체 빙상 질량과 같다고 한다. 코펜하겐은 이 점질량으로부터 지구 표면을 따라 3500 km 떨어져 있으며, 이 문제에서는 지구가 (이 점질량을 제외하고) 완전히 구대칭이며, 해양이 지구 전체 표면에 걸쳐 분포하고 있다고 가정한다. 지구의 자전 효과는 무시한다. 지구의 전체 표면 면적은 $A^E = 5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2$ 이다.

3.9	이 모델 내에서, 코펜하겐의 해수면 높이 h_{CPH} 과 그린란드 정반대 지점의 해수면 높이 h_{OPP} 사이의 차이 $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}}$ 를 구하시오.	1.8
-----	---	-----