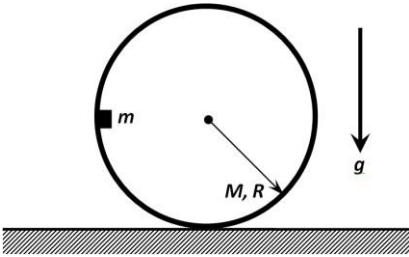


문제 1 (9 points)

이 문제는 서로 독립적인 세 개의 파트로 구성되어 있다.

Part A (3 points)



질량이 m 인 작은 펙이, 질량이 M 이고 반지름이 R 인 얇은 속이 빈 원통의 안쪽 면에 조심스럽게 놓여 있다. 처음에 원통은 수평면 위에 정지해 있고, 펙은 평면 위에서 높이 R 위치에 있다 (왼쪽 그림 참고). 마찰은 존재하지 않으며, 원통은 수평면 위를 미끄러지지 않으며 움직인다. 펙이 경로상 최저점을 통과할 때, 펙과 원통 사이에 작용하는 힘 F 를 구하시오. 중력가속도는 g 이다.

Part B (3 points)

반지름이 $r = 5.00 \text{ cm}$ 인 비눗방울이 진공 중에 놓여 있다. 이 방울은 이원자 이상기체를 포함하고 있고, 비눗막의 두께는 $h = 10.0 \text{ }\mu\text{m}$ 이며, 표면장력은 $\sigma = 4.00 \times 10^{-2} \text{ N/m}$, 밀도는 $\rho = 1.10 \text{ g/cm}^3$ 이다.

1. 기체가 매우 천천히 가열되어 방울이 항상 역학적 평형을 유지할 때의 기체 몰비열의 식을 구하고, 그 값을 계산하시오.
2. 방울의 반지름 방향 작은 진동에 대한 각진동수 ω 의 식을 구하고, 다음 조건 하에서 값을 계산하시오: 비눗막의 열용량이 방울 안의 기체의 열용량보다 훨씬 크고, 방울 내부는 진동 주기보다 훨씬 빠르게 열평형에 도달한다.

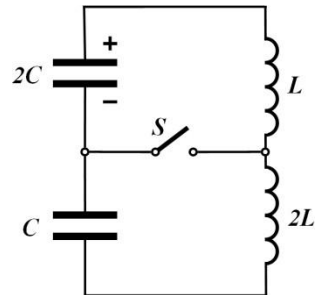
힌트: 라플라스는 곡면의 안쪽과 바깥쪽 사이에는 곡률과 표면장력에 의해 압력차가 발생한다고 보였으며, 그 차이는 $\Delta p = 2\sigma / r$ 로 주어진다.

r

Part C (3 points)

오른쪽 회로도에서 처음에 스위치 S 는 열려 있다. 정전용량이 $2C$ 인 축전기는 전하 q_0 를 가지고 있으며, 정전용량이 C 인 다른 축전기는 충전되어 있지 않다. 두 인덕터의 유도계수는 각각 L 과 $2L$ 이고, 처음에는 회로에 전류가 흐르지 않는다.

축전기의 방전이 시작되고, 두 인덕터를 지나는 전류가 최대값에 도달했을 때 스위치 S 가 순간적으로 닫힌다. 그 이후 스위치를 통해 흐르는 최대 전류 I_{max} 를 구하시오.



Problem 2. 반데르발스(Van der Waals) 상태방정식 (11 points)

이상기체의 잘 알려진 모델에서는, 기체 상태방정식이 클라페이론-멘델레예프 법칙을 따르며, 다음과 같은 중요한 물리적 효과들이 무시된다. 첫째, 실제 기체 분자들은 유한한 크기를 가지며, 둘째, 서로 간의 상호작용이 존재한다. 이 문제 전체에서 물 한 물을 기준으로 한다.

Part A. Non-ideal gas equation of state (2 points)

분자의 유한한 크기를 고려할 경우, 기체 상태방정식은 다음과 같은 형태로 수정된다:

$$P(V - b) = RT \quad (\text{식 1})$$

여기서 P , V , T 는 각각 압력, 몰당 부피, 온도를 의미하며, R 은 기체 상수, b 는 분자들이 차지하는 고유 부피에 해당하는 상수이다.

A1 상수 b 를 분자의 지름 d 를 사용하여 추정하고 식으로 나타내시오. (0.3 points)

분자 간 인력의 효과까지 고려하여, 반데르발스는 다음의 상태방정식을 제안하였으며, 이는 기체 상태뿐 아니라 액체 상태도 잘 설명한다:

$$(P + a/V^2)(V - b) = RT \quad (\text{식 2})$$

여기서 a 는 또 다른 고유 상수이다.

온도 T 가 어떤 임계값 T_c 보다 낮을 때, 위의 상태방정식에 해당하는 등온선은 그림 1의 곡선 1처럼 단조롭지 않은 형태를 가진다. 이 곡선을 반데르발스 등온선이라 한다. 같은 그림에서 곡선 2는 동일한 온도에서의 이상기체 등온선을 나타낸다. 실제 기체의 등온선은 반데르발스 등온선과는 달리, 일정한 압력 P_{LG} 에서 직선 구간 AB를 따라 이어진다. 이 구간은 부피 V_L 과 V_G 사이에 위치하며, 액체 상태(L)와 기체 상태(G)의 평형을 의미한다. 열역학 제2법칙에 따라, 맥스웰(J. Maxwell)은 이 압력 P_{LG} 는 그림 1의 두 면적 I과 II가 같아지도록 결정되어야 함을 보였다.

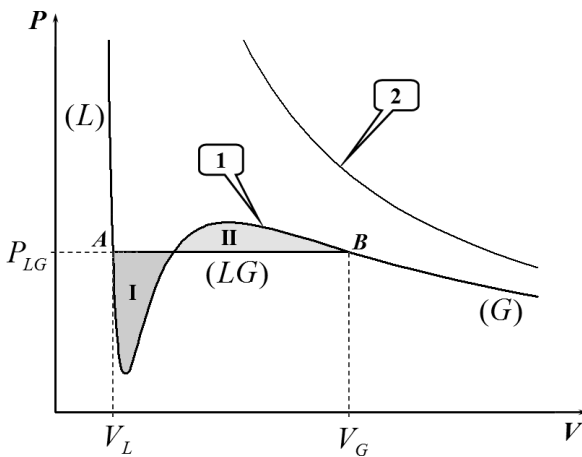


그림 1: 반데르발스 기체/액체 등온선 (곡선 1)과 이상기체 등온선 (곡선 2)

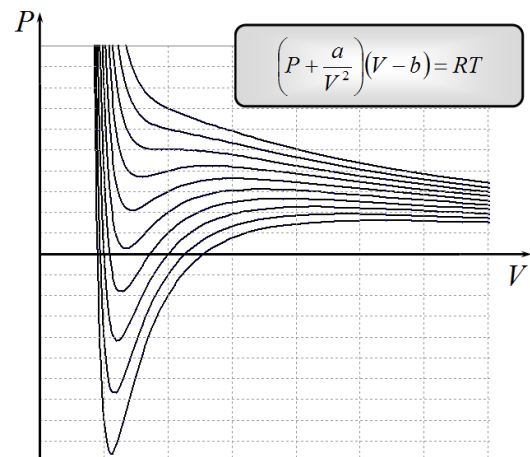


그림 2: 다양한 온도에서의 반데르발스 등온선

온도가 증가함에 따라 등온선의 직선 구간 AB는 점점 짧아지며, 결국 특정한 온도 T_c 와 압력 $P_{LG} = P_c$ 에서 하나의 점으로 수렴하게 된다. 이때의 P_c 와 T_c 를 각각 임계 압력과 임계 온도라고 하며, 실험적으로 정밀하게 측정할 수 있다.

A2	반데르발스 상수 a 와 b 를 P_c 와 T_c 의 식으로 나타내시오. [1.3점]
A3	물에 대해 $T_c = 647 \text{ K}$, $P_c = 2.2 \times 10^7 \text{ Pa}$ 가 주어졌을 때, 물의 반데르발스 상수 a_w 와 b_w 를 계산하시오. [0.2점]
A4	물 분자의 지름 d_w 를 추정하시오. [0.2점]

Part B. 기체와 액체의 성질 (6 points)

이 부분에서는 $T = 100^\circ\text{C}$ 에서의 수증기와 액체 상태의 물의 성질을 다룬다. 이 온도에서의 포화증기압은 $P_{LG} = P_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 물의 몰질량은 $\mu = 1.8 \times 10^{-2} \text{ kg/mol}$ 이다.

기체 상태

수증기의 경우, $V_G \gg b$ 라는 부등식을 만족한다고 가정할 수 있다.

B1 기체 상태에서의 부피 V_G 를 R, T, p_0, a 를 사용하여 나타내는 식을 유도하시오. [0.8점]

기체 부피 V_{G0} 는 이상기체 법칙을 이용해 근사적으로 계산할 수 있다.

B2 분자 간 인력에 의해 실제 기체의 부피가 감소하는 정도를 퍼센트로 평가하시오.
즉, $\Delta V_G / V_{G0} = (V_{G0} - V_G) / V_{G0}$ [0.3점]

계의 부피가 V_G 보다 작아지면, 기체는 응축되기 시작한다. 하지만 철저히 정제된 기체는 기계적 준안정 상태(supercooled vapor)로 존재할 수 있으며, 이 상태는 부피가 어떤 최소값 V_{Gmin} 에 도달할 때까지 유지될 수 있다. 기계적 안정 조건은 다음과 같다 (온도 일정): $dP / dV < 0$

B3 수증기가 준안정 상태를 유지할 수 있는 동안 부피가 얼마나 줄어든 수 있는지를 평가하시오.
즉, V_G / V_{Gmin} 의 값을 구하시오. [0.7점]

액체 상태

액체 상태에서 반데르발스 방정식을 적용할 경우, $P \ll a / V^2$ 라는 부등식이 성립한다고 가정할 수 있다.

B4 액체 상태에서의 부피 V_L 를 a, b, R, T 의 식으로 표현하시오. [1.0점]

$bRT \ll a$ 임을 가정하고, 다음과 같은 수치를 평가하시오. (계산 결과가 알려진 표 값과 다를 수 있음)

- | | |
|-----------|---|
| B5 | 액체 상태 물의 밀도 ρ_L 를 μ, a, b, R 중 일부를 사용해 나타내고 값을 평가하시오. [0.5점] |
| B6 | 체적 열팽창 계수 $\alpha = (1 / V_L)(\Delta V_L / \Delta T)$ 를 a, b, R 을 사용해 표현하고 값을 계산하시오. [0.6점] |
| B7 | 증발 잠열 L 을 μ, a, b, R 으로 표현하고 값을 평가하시오. [1.1점] |
| B8 | 단분자 층(monolayer)을 고려하여 물의 표면장력 σ 를 추정하시오. [1.2점] |

Part C. 액체-기체 계 (3 points)

맥스웰의 법칙(면적 동일 조건)과 반데르발스 상태방정식, Part B에서의 근사들을 이용하면, 포화증기압 P_{LG} 는 온도 T 에 대해 다음과 같은 식으로 표현된다:

$$\ln P_{LG} = A + B / T \quad (\text{식 3})$$

여기서 A 와 B 는 다음과 같은 상수로 주어진다:

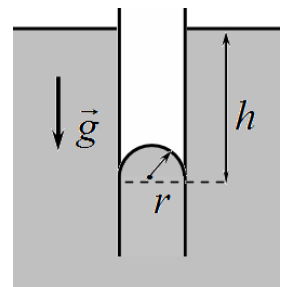
$$A = \ln(a / b^2 - 1) \quad B = -a / (bR)$$

W. 톰슨은 포화증기압이 액체 표면의 곡률에 따라 달라진다는 사실을 보였다. 재료를 적시지 않는 액체(접촉각 180°)의 경우, 모세관을 액체에 담그면 표면장력에 의해 모세관 내의 액체가 아래로 내려가게 된다 (그림 3 참조).

C1 곡률을 가진 액체 표면 위의 포화증기압의 변화량 Δp_v 를 구하고, 이를 수증기 밀도 ρ_s , 액체 밀도 ρ_L , 표면장력 σ , 곡률 반지름 r 의 식으로 표현하시오. [1.3점]

B3에서 다룬 준안정 상태는 소립자의 검출을 위해 설계된 클라우드 챔버와 같은 실제 실험 장치에서 널리 사용된다. 이러한 상태는 아침 이슬의 형성과 같은 자연 현상에서도 나타난다. 과냉각된 수증기는 액체 방울을 형성하며 응축될 수 있으며, 매우 작은 방울은 빠르게 증발하지만 충분히 큰 방울은 계속

C2 저녁 온도 $t_e = 20^\circ\text{C}$ 에서 공기 중 수증기가 포화 상태였다고 가정하자. 이후 아침에 기온이 $\Delta t = 5.0^\circ\text{C}$ 만큼 하강하였다. 이때 증기압은 변하지 않았다고 가정하고, 성장 가능한 최소 물방울 반지름을 추정하시오. 표면장력 값은 $\sigma = 7.3 \times 10^{-2} \text{ N/m}$ 을 사용할 것. [1.7점]



성장할 수 있다.

Figure 3. 재료를 적시지 않는 액체에 담긴 모세관

Problem3. 가장 단순한 기체 방전 모델 (10 points)

A기체를 통과하는 전류는 기체 방전(gas discharge)이라고 불린다. 기체 방전에는 다양한 형태가 있으며, 조명 램프에서의 글로우 방전(glow discharge), 용접에서의 아크 방전(arc discharge), 그리고 구름과 지면 사이에서 발생하는 잘 알려진 번개(spark discharge)가 있다.

Part A. 비자기유지 기체 방전 (4.8points)

이 파트에서는 이른바 비자기유지 방전(non-self-sustained discharge)을 다룬다. 이 방전을 유지하기 위해서는 외부 이온화 장치가 계속 작동해야 하며, 이 장치는 단위 부피·단위 시간당 Z_{ext} 개의 단일 이온과 자유 전자 쌍을 기체 내에 균일하게 생성한다.

외부 이온화 장치가 작동되면, 전자와 이온의 수 밀도가 증가하기 시작한다. 하지만 전자와 이온의 수 밀도가 무한히 증가하는 것은 재결합 과정에 의해 억제된다. 이 과정에서는 자유 전자가 이온과 결합하여 중성 원자를 형성한다. 이때 단위 부피·단위 시간당 발생하는 재결합 사건의 수 Z_{rec} 는 다음과 같다:

$$Z_{rec} = r \cdot n_e \cdot n_i$$

여기서 r 은 재결합 계수(recombination coefficient), n_e 와 n_i 는 각각 전자 및 이온의 수 밀도이다. 시간 $t = 0$ 에서 외부 이온화 장치를 켜다고 가정하고, 처음에는 전자와 이온의 수 밀도 모두 0이라 하자. 이때 전자의 수 밀도 $n_e(t)$ 는 다음과 같이 주어진다:

$$n_e(t) = n_0 + a \cdot \tanh(bt)$$

여기서 n_0 , a , b 는 상수이며, $\tanh x$ 는 쌍곡 탄젠트 함수이다.

A1 상수 n_0 , a , b 를 Z_{ext} 와 r 의 식으로 나타내시오. [1.8점]

외부 이온화 장치가 두 개 있다고 하자. 첫 번째 장치를 작동하면, 전자 수 밀도는 $n_{e1} = 1.2 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ 에서 평형에 도달한다. 두 번째 장치를 작동하면, 전자 수 밀도는 $n_{e2} = 1.6 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ 에서 평형에 도달한다.

A2 두 이온화 장치를 동시에 켜었을 때의 전자 수 밀도 n_e 의 평형값을 구하시오. [0.6점]

이후의 모든 문항에서는, 외부 이온화 장치가 충분히 오랜 시간 동안 작동하여 계가 정상 상태(stationary state)에 도달했다고 가정한다. 전하 운반자(charge carriers)에 의한 전기장은 완전히 무시하라. 기체는 면적이 S 이고, 거리 L 만큼 떨어진 두 평행 도체판 사이에 채워져 있다. 이때 전압 U 가 인가되어, 판 사이에 전기장이 형성된다. 기체 내 전자와 이온의 수 밀도는 공간적으로 거의 일정하다고 가정한다. 전자(참자 e)와 이온(참자 i)은 전기장 E 에 의해 동일한 평균 속도 v 를 갖게 되며, 이는 다음과 같은 형태이다:

$$v = \beta \cdot E$$

여기서 β 는 전하 이동도(charge mobility)이다.

A3 도관 내 전류 I 를 U , β , L , S , Z_{ext} , r , e 를 사용하여 나타내시오. [1.7점]

A4 인가 전압이 충분히 작을 때의 기체의 저항률 ρ_{gas} 를 β , L , Z_{ext} , r , e 의 식으로 나타내시오. [0.7점]

Part B. 자기유지 기체 방전 (5.2 points)

이 파트에서는 전류가 자기유지되는 방식으로 기체 방전이 점화되는 현상을 다룬다.

주의: 이후 모든 문항에서는 다음을 가정한다.

- 외부 이온화 장치는 이전과 같은 Z_{ext} 속도로 계속 작동
- 전하 운반자에 의한 전기장은 무시되며, 전기장은 도관 전체에 걸쳐 균일하다
- 재결합 과정은 완전히 무시된다

자기유지 방전에는 앞서 고려되지 않았던 두 가지 중요한 과정이 존재한다. 첫째는 2차 전자 방출이며, 둘째는 전자 눈사태의 형성이다. 2차 전자 방출은 이온이 음극(cathode)에 충돌할 때 발생하며, 이 과정에서 전자가 튀어나와 양극(anode) 방향으로 이동한다. 단위 시간당 튀어나온 전자의 수 $N\sigma_e$ 와, 음극에 도달하는 이온의 수 $N\sigma_i$ 의 비를 2차 전자 방출 계수 γ 라 하며, 다음과 같이 정의된다:

$$\gamma = N\sigma_e / N\sigma_i$$

전자 눈사태 형성 과정은 다음과 같다. 자유 전자가 전기장에 의해 가속되어 충분한 운동 에너지를 얻게 되면, 다른 중성 원자를 이온화시킬 수 있다. 이로 인해 양극 방향으로 이동하는 자유 전자의 수가 크게 증가한다.

이 현상은 타운센드 계수 α 로 나타내며, 이 계수는 거리 dl 을 이동한 N_e 개의 전자에 의해 생긴 전자 수 dN_e 로 정의된다:

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e$$

도관의 단면을 통과하는 총 전류 $I(x)$ 는 x 위치에서의 전자 전류 $I_e(x)$ 와 이온 전류 $I_i(x)$ 의 합으로 구성된다. 정상 상태에서는 이 전류들이 x 에 따라 달라지며, 전자 전류는 다음 식을 따른다:

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2$$

여기서 A_1, A_2, C_1 는 상수이다.

B1 A_1, A_2 를 $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$ 의 식으로 나타내시오. (2.0점)

이온 전류 $I_i(x)$ 는 다음과 같은 식으로 주어진다:

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x}$$

여기서 B_1, B_2, C_2 는 상수이다.

B2 B_1, B_2 를 $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$ 의 식으로 나타내시오. (0.6점)

B3 $x = L$ 에서의 이온 전류 $I_i(L)$ 에 대한 조건을 식으로 쓰시오. (0.3점)

B4 $x = 0$ 에서의 전류 $I_i(0)$ 와 $I_e(0)$ 에 대한 조건을 식으로 쓰시오. (0.6점)

B5 총 전류 I 를 $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ 의 식으로 나타내시오. 단, I 는 유한하다고 가정한다. (1.2점)

타운센드 계수 α 가 일정하다고 가정하자. 도관의 길이 L 이 어떤 임계값 L_{cr} 보다 크면 (즉, $L > L_{cr}$), 외부 이온화 장치 없이도 방전은 자기유지된다.

B6 임계 길이 L_{cr} 을 $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ 의 식으로 나타내시오. (0.5점)

