

General instructions: Theoretical Examination (30 points)

July 14, 2016

The theoretical examination lasts for 5 hours and is worth a total of 30 points.

Before the exam

- You must not open the envelopes containing the problems before the sound signal indicating the beginning of the examination.
- The beginning and end of the examination will be indicated by a sound signal. There will be announcements every hour indicating the elapsed time, as well as fifteen minutes before the end of the examination (before the final sound signal).

During the exam

- Dedicated answer sheets are provided for writing your answers. Enter the final answers into the appropriate boxes in the corresponding answer sheet (marked A). For every problem, there are extra blank work sheets for carrying out detailed work (marked W). Always use the work sheets that belong to the problem you are currently working on (check the problem number in the header). If you have written something on any sheet which you do not want to be graded, cross it out. Only use the front side of every page.
- In your answers, try to be as concise as possible: use equations, logical operators and sketches to illustrate your thoughts whenever possible. Avoid the use of long sentences.
- Please give an appropriate number of significant digits when stating numbers.
- You may often be able to solve later parts of a problem without having solved the previous ones.
- A list of physical constants is given on the next page.
- You are not allowed to leave your working place without permission. If you need any assistance (need to refill your drinking water bottle, broken calculator, need to visit a restroom, etc), please draw the attention of a team guide by putting one of the three flags into the holder attached to your cubicle ("Refill my water bottle, please", "I need to go to the toilet, please", or "I need help, please" in all other cases).

At the end of the exam

- At the end of the examination you must stop writing immediately.
- For every problem, sort the corresponding sheets in the following order: cover sheet (C), questions (Q), answer sheets (A), work sheets (W).
- Put all the sheets belonging to one problem into the same envelope. Also put the general instructions (G) into the remaining separate envelope. Make sure your student code is visible in the viewing window of each envelope. Also hand in empty sheets. You are not allowed to take any sheets of paper out of the examination area.
- Leave the blue calculator provided by the organizers on the table.

- Take the writing equipment (2 ball point pens, 1 felt tip pen, 1 pencil, 1 pair of scissors, 1 ruler, 2 pairs of earplugs) as well your personal calculator (if applicable) with you. Also take your water bottle with you.
- Wait at your table until your envelopes are collected. Once all envelopes are collected your guide will escort you out of the examination area.

General Data Sheet

Speed of light in vacuum	c	$=$	$299\,792\,458\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Vacuum permeability (magnetic constant)	μ_0	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\,\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Vacuum permittivity (electrical constant)	ε_0	$=$	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\,\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Elementary charge	e	$=$	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\,\text{A} \cdot \text{s}$
Mass of the electron	m_e	$=$	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\,\text{kg}$ $= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Mass of the proton	m_p	$=$	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\,\text{kg}$ $= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Mass of the neutron	m_n	$=$	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\,\text{kg}$ $= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Unified atomic mass unit	u	$=$	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\,\text{kg}$
Rydberg constant	R_∞	$=$	$10\,973\,731.568\,508(65)\,\text{m}^{-1}$
Universal constant of gravitation	G	$=$	$6.674\,08(31) \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Acceleration due to gravity (in Zurich)	g	$=$	$9.81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Planck's constant	h	$=$	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Avogadro number	N_A	$=$	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
Molar gas constant	R	$=$	$8.314\,4598(48)\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molar mass constant	M_u	$=$	$1 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmann constant	k_B	$=$	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann constant	σ	$=$	$5.670\,367(13) \times 10^{-8}\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Two Problems in Mechanics (10 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

Part A. The Hidden Disk (3.5 points)

We consider a solid wooden cylinder of radius r_1 and thickness h_1 . Somewhere inside the wooden cylinder, the wood has been replaced by a metal disk of radius r_2 and thickness h_2 . The metal disk is placed in such a way that its symmetry axis B is parallel to the symmetry axis S of the wooden cylinder, and is placed at the same distance from the top and bottom face of the wooden cylinder. We denote the distance between S and B by d . The density of wood is ρ_1 , the density of the metal is $\rho_2 > \rho_1$. The total mass of the wooden cylinder and the metal disk inside is M .

In this task, we place the wooden cylinder on the ground so that it can freely roll to the left and right. See Fig. 1 for a side view and a view from the top of the setup.

The goal of this task is to determine the size and the position of the metal disk.

In what follows, when asked to express the result in terms of known quantities, you may always assume that the following are known:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

The goal is to determine r_2, h_2 and d , through indirect measurements.

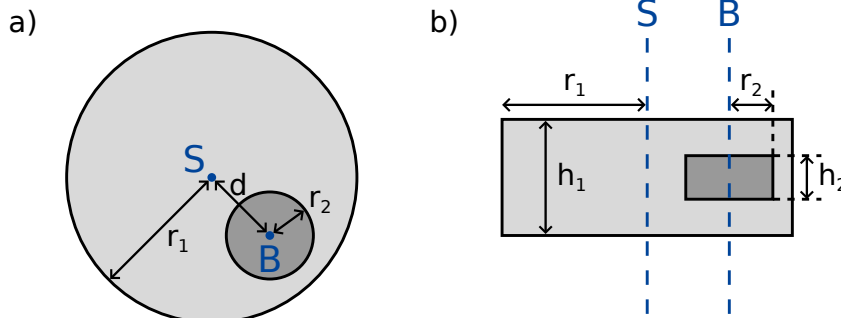


Figure 1: a) side view b) view from above

We denote b as the distance between the centre of mass C of the whole system and the symmetry axis S of the wooden cylinder. In order to determine this distance, we design the following experiment: We place the wooden cylinder on a horizontal base in such a way that it is in a stable equilibrium. Let us now slowly incline the base by an angle Θ (see Fig. 2). As a result of the static friction, the wooden cylinder can roll freely without sliding. It will roll down the incline a little bit, but then come to rest in a stable equilibrium after rotating by an angle ϕ which we measure.

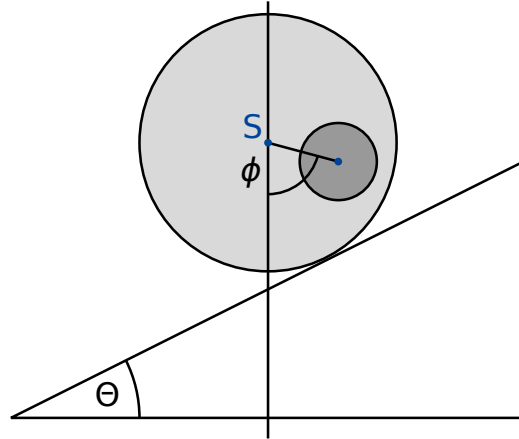


Figure 2: Cylinder on an inclined base.

- A.1** Find an expression for b as a function of the quantities (1), the angle ϕ and the tilting angle Θ of the base. 0.8pt

From now on, we can assume that the value of b is known.

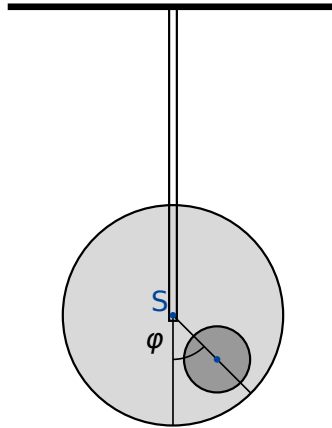


Figure 3: Suspended system.

Next we want to measure the moment of inertia I_S of the system with respect to the symmetry axis S . To this end, we suspend the wooden cylinder at its symmetry axis from a rigid rod. We then turn it away from its equilibrium position by a small angle φ , and let it go. See figure 3 for the setup. We find that φ describes a periodic motion with period T .

- A.2** Find the equation of motion for φ . Express the moment of inertia I_S of the system around its symmetry axis S in terms of T , b and the known quantities (1). You may assume that we are only disturbing the equilibrium position by a small amount so that φ is always very small. 0.5pt

From the measurements in questions **A.1** and **A.2**, we now want to determine the geometry and the position of the metal disk inside the wooden cylinder.

- A.3** Find an expression for the distance d as a function of b and the quantities (1). You may also include r_2 and h_2 as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**. 0.4pt

- A.4** Find an expression for the moment of inertia I_S in terms of b and the known quantities (1). You may also include r_2 and h_2 as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**. 0.7pt

- A.5** Using all the above results, write down an expression for h_2 and r_2 in terms of b , T and the known quantities (1). You may express h_2 as a function of r_2 . 1.1pt

Part B. Rotating Space Station (6.5 points)

Alice is an astronaut living on a space station. The space station is a gigantic wheel of radius R rotating around its axis, thereby providing artificial gravity for the astronauts. The astronauts live on the inner side of the rim of the wheel. The gravitational attraction of the space station and the curvature of the floor can be ignored.

- B.1** At what angular frequency ω_{ss} does the space station rotate so that the astronauts experience the same gravity g_E as on the Earth's surface? 0.5pt

Alice and her astronaut friend Bob have an argument. Bob does not believe that they are in fact living in a space station and claims that they are on Earth. Alice wants to prove to Bob that they are living on a rotating space station by using physics. To this end, she attaches a mass m to a spring with spring constant k and lets it oscillate. The mass oscillates only in the vertical direction, and cannot move in the horizontal direction.

- B.2** Assuming that on Earth gravity is constant with acceleration g_E , what would be the angular oscillation frequency ω_E that a person on Earth would measure? 0.2pt

- B.3** What angular oscillation frequency ω does Alice measure on the space station? 0.6pt

Alice is convinced that her experiment proves that they are on a rotating space station. Bob remains sceptical. He claims that when taking into account the change in gravity above the surface of the Earth, one finds a similar effect. In the following tasks we investigate whether Bob is right.

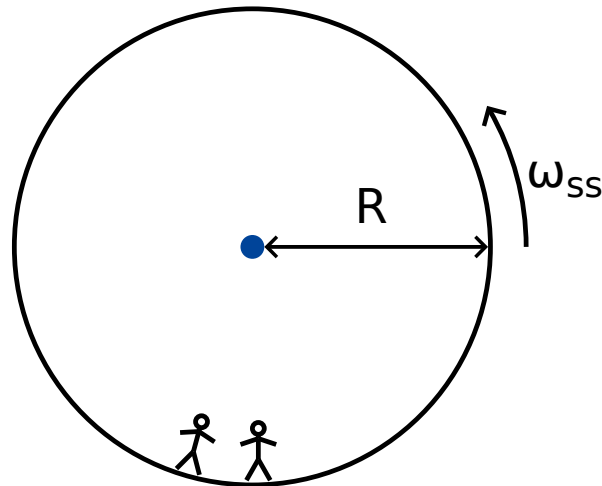


Figure 4: Space station

- B.4** Derive an expression of the gravity $g_E(h)$ for small heights h above the surface of the Earth and compute the oscillation frequency $\tilde{\omega}_E$ of the oscillating mass (linear approximation is enough). Denote the radius of the Earth by R_E . Neglect the rotation of Earth. 0.8pt

Indeed, for this space station, Alice does find that the spring pendulum oscillates with the frequency that Bob predicted.

- B.5** For what radius R of the space station does the oscillation frequency ω match the oscillation frequency $\tilde{\omega}_E$ on the Earth? Express your answer in terms of R_E . 0.3pt

Exasperated with Bob's stubbornness, Alice comes up with an experiment to prove her point. To this end she climbs on a tower of height H over the floor of the space station and drops a mass. This experiment can be understood in the rotating reference frame as well as in an inertial reference frame.

In a uniformly rotating reference frame, the astronauts perceive a fictitious force $\vec{F}_C$ called the Coriolis force. The force $\vec{F}_C$ acting on an object of mass m moving at velocity $\vec{v}$ in a rotating frame with constant angular frequency $\vec{\omega}_{ss}$ is given by

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

In terms of the scalar quantities you may use

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

where ϕ is the angle between the velocity and the axis of rotation. The force is perpendicular to both the velocity v and the axis of rotation. The sign of the force can be determined from the right-hand rule, but in what follows you may choose it freely.

- B.6** Calculate the horizontal velocity v_x and the horizontal displacement d_x (relative to the base of the tower, in the direction perpendicular to the tower) of the mass at the moment it hits the floor. You may assume that the height H of the tower is small, so that the acceleration as measured by the astronauts is constant during the fall. Also, you may assume that $d_x \ll H$. 1.1pt

To get a good result, Alice decides to conduct this experiment from a much taller tower than before. To her surprise, the mass hits the floor at the base of the tower, so that $d_x = 0$.

- B.7** Find a lower bound for the height of the tower for which it can happen that $d_x = 0$. 1.3pt

Alice is willing to make one last attempt at convincing Bob. She wants to use her spring oscillator to show the effect of the Coriolis force. To this end she changes the original setup: She attaches her spring to a ring which can slide freely on a horizontal rod in the x direction without any friction. The spring itself oscillates in the y direction. The rod is parallel to the floor and perpendicular to the axis of rotation of the space station. The xy plane is thus perpendicular to the axis of rotation, with the y direction pointing straight towards the center of rotation of the station.

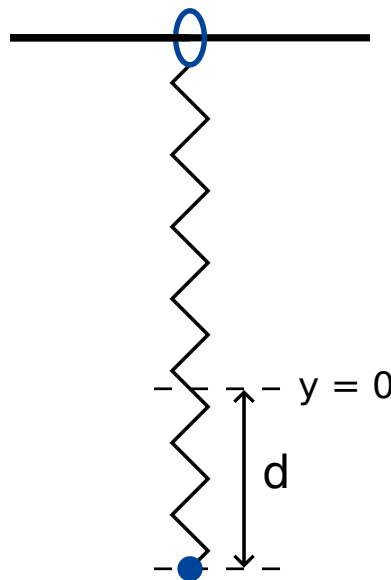


Figure 5: Setup.

- B.8** Alice pulls the mass a distance d downwards from the equilibrium point $x = 0$, $y = 0$, and then lets it go (see figure 5). 1.7pt
- Give an algebraic expression of $x(t)$ and $y(t)$. You may assume that $\omega_{ss}d$ is small, and neglect the Coriolis force for motion along the y -axis.
 - Sketch the trajectory $(x(t), y(t))$, marking all important features such as amplitude.

Alice and Bob continue to argue.

Nonlinear Dynamics in Electric Circuits (10 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

Introduction

Bistable non-linear semiconducting elements (e.g. thyristors) are widely used in electronics as switches and generators of electromagnetic oscillations. The primary field of applications of thyristors is controlling alternating currents in power electronics, for instance rectification of AC current to DC at the megawatt scale. Bistable elements may also serve as model systems for self-organization phenomena in physics (this topic is covered in part B of the problem), biology (see part C) and other fields of modern nonlinear science.

Goals

To study instabilities and nontrivial dynamics of circuits including elements with non-linear $I - V$ characteristics. To discover possible applications of such circuits in engineering and in modeling of biological systems.

Part A. Stationary states and instabilities (3 points)

Fig. 1 shows the so-called **S-shaped** $I - V$ characteristics of a non-linear element X . In the voltage range between $U_h = 4.00$ V (the holding voltage) and $U_{th} = 10.0$ V (the threshold voltage) this $I - V$ characteristics is multivalued. For simplicity, the graph on Fig. 1 is chosen to be piece-wise linear (each branch is a segment of a straight line). In particular, the line in the upper branch touches the origin if it is extended. This approximation gives a good description of real thyristors.

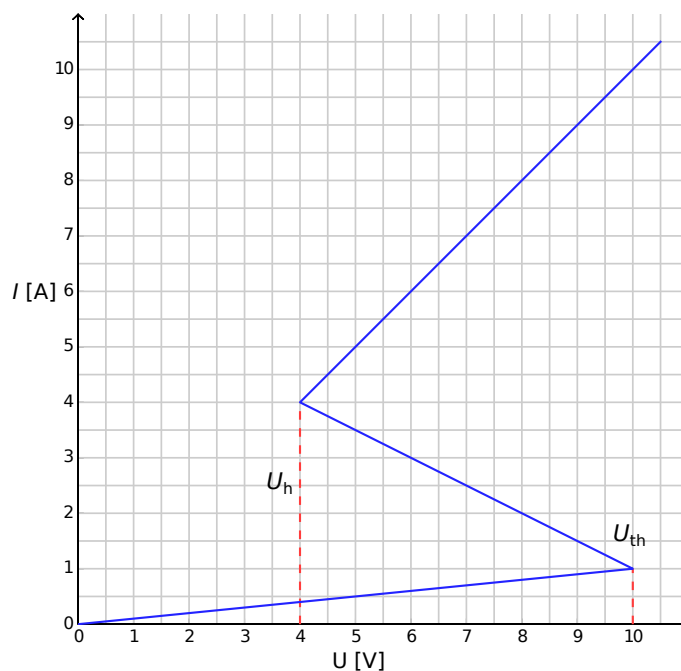


Figure 1: $I - V$ characteristics of the non-linear element X .

- A.1** Using the graph, determine the resistance R_{on} of the element X on the upper branch of the $I - V$ characteristics, and R_{off} on the lower branch, respectively. The middle branch is described by the equation 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Find the values of the parameters I_0 and R_{int} .

The element X is connected in series (see Fig.2) with a resistor R , an inductor L and an ideal voltage source $\mathcal{E}$. One says that the circuit is in a stationary state if the current is constant in time, $I(t) = \text{const.}$

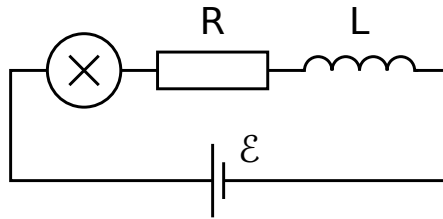


Figure 2: Circuit with element X , resistor R , inductor L and voltage source $\mathcal{E}$.

- A.2** What are the possible numbers of stationary states that the circuit of Fig. 2 may have for a fixed value of $\mathcal{E}$ and for $R = 3.00 \, \Omega$? How does the answer change for $R = 1.00 \, \Omega$? 1pt

- A.3** Let $R = 3.00 \, \Omega$, $L = 1.00 \, \mu\text{H}$ and $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$ in the circuit shown in Fig. 2. Determine the values of the current $I_{\text{stationary}}$ and the voltage $V_{\text{stationary}}$ on the non-linear element X in the stationary state. 0.6pt

The circuit in Fig. 2 is in the stationary state with $I(t) = I_{\text{stationary}}$. This stationary state is said to be stable if after a small displacement (increase or decrease in the current), the current returns towards the stationary state. And if the system keeps moving away from the stationary state, it is said to be unstable.

- A.4** Use numerical values of the question **A.3** and study the stability of the stationary state with $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Is it stable or unstable? 1pt

Part B. Bistable non-linear elements in physics: radio transmitter (5 points)

We now investigate a new circuit configuration (see Fig. 3). This time, the non-linear element X is connected in parallel to a capacitor of capacitance $C = 1.00 \, \mu\text{F}$. This block is then connected in series to a resistor of resistance $R = 3.00 \, \Omega$ and an ideal constant voltage source of voltage $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$. It turns out that this circuit undergoes oscillations with the non-linear element X jumping from one branch of the $I - V$ characteristics to another over the course of one cycle.

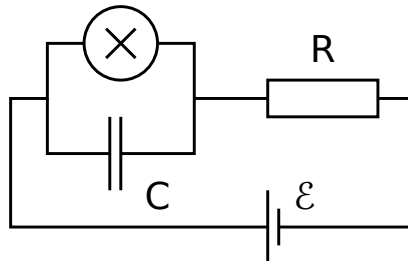


Figure 3: Circuit with element X , capacitor C , resistor R and voltage source $\mathcal{E}$.

- | | | |
|------------|---|-------|
| B.1 | Draw the oscillation cycle on the $I - V$ graph, including its direction (clockwise or anticlockwise). Justify your answer with equations and sketches. | 1.8pt |
| B.2 | Find expressions for the times t_1 and t_2 that the system spends on each branch of the $I - V$ graph during the oscillation cycle. Determine their numerical values. Find the numerical value of the oscillation period T assuming that the time needed for jumps between the branches of the $I - V$ graph is negligible. | 1.9pt |
| B.3 | Estimate the average power P dissipated by the non-linear element over the course of one oscillation. An order of magnitude is sufficient. | 0.7pt |

The circuit in Fig. 3 is used to build a radio transmitter. For this purpose, the element X is attached to one end of a linear antenna (a long straight wire) of length s . The other end of the wire is free. In the antenna, an electromagnetic standing wave is formed. The speed of electromagnetic waves along the antenna is the same as in vacuum. The transmitter is using the main harmonic of the system, which has period T of question **B.2**.

- | | | |
|------------|---|-------|
| B.4 | What is the optimal value of s assuming that it cannot exceed 1 km? | 0.6pt |
|------------|---|-------|

Part C. Bistable non-linear elements in biology: neuristor (2 points)

In this part of the problem, we consider an application of bistable non-linear elements to modeling of biological processes. A neuron in a human brain has the following property: when excited by an external signal, it makes one single oscillation and then returns to its initial state. This feature is called excitability. Due to this property, pulses can propagate in the network of coupled neurons constituting the nerve systems. A semiconductor chip designed to mimic excitability and pulse propagation is called a *neuristor* (from neuron and transistor).

We attempt to model a simple neuristor using a circuit that includes the non-linear element X that we investigated previously. To this end, the voltage $\mathcal{E}$ in the circuit of Fig. 3 is decreased to the value $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$. The oscillations stop, and the system reaches its stationary state. Then, the voltage is rapidly increased back to the value $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$, and after a period of time τ (with $\tau < T$) is set again to the value $\mathcal{E}'$ (see Fig. 4). It turns out that there is a certain critical value $\tau_{\text{crit.}}$, and the system shows qualitatively different behavior for $\tau < \tau_{\text{crit.}}$ and for $\tau > \tau_{\text{crit.}}$.

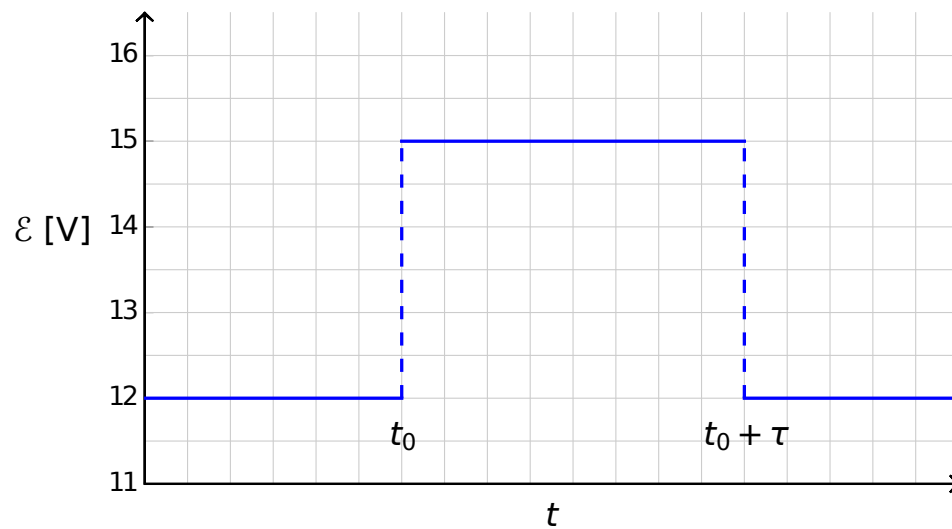


Figure 4: Voltage of the voltage source as a function of time.

- | | | |
|------------|--|-------|
| C.1 | Sketch the graphs of the time dependence of the current $I_X(t)$ on the non-linear element X for $\tau < \tau_{\text{crit}}$ and for $\tau > \tau_{\text{crit}}$. | 1.2pt |
| C.2 | Find the expression and the numerical value of the critical time τ_{crit} for which the scenario switches. | 0.6pt |
| C.3 | Is the circuit with $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s a neuristor? | 0.2pt |

Large Hadron Collider (10 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

In this task, the physics of the particle accelerator LHC (Large Hadron Collider) at CERN is discussed. CERN is the world's largest particle physics laboratory. Its main goal is to get insight into the fundamental laws of nature. Two beams of particles are accelerated to high energies, guided around the accelerator ring by a strong magnetic field and then made to collide with each other. The protons are not spread uniformly around the circumference of the accelerator, but they are clustered in so-called bunches. The resulting particles generated by collisions are observed with large detectors. Some parameters of the LHC can be found in table 1.

LHC ring	
Circumference of ring	26659 m
Number of bunches per proton beam	2808
Number of protons per bunch	1.15×10^{11}
Proton beams	
Energy of protons	7.00 TeV
Centre of mass energy	14.0 TeV

Table 1: Typical numerical values of relevant LHC parameters.

Particle physicists use convenient units for the energy, momentum and mass: The energy is measured in electron volts [eV]. By definition, 1 eV is the amount of energy gained by a particle with elementary charge, e , moved through a potential difference of one volt ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$).

The momentum is measured in units of eV/c and the mass in units of eV/c^2 , where c is the speed of light in vacuum. Since 1 eV is a very small quantity of energy, particle physicists often use MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$), GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) or TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$).

Part A deals with the acceleration of protons or electrons. Part B is concerned with the identification of particles produced in the collisions at CERN.

Part A. LHC accelerator (6 points)

Acceleration:

Assume that the protons have been accelerated by a voltage V such that their velocity is very close to the speed of light and neglect any energy loss due to radiation or collisions with other particles.

- | | |
|--|--------------|
| <p>A.1 Find the exact expression for the final velocity v of the protons as a function of the accelerating voltage V, and physical constants.</p> | <p>0.7pt</p> |
|--|--------------|

A design for a future experiment at CERN plans to use the protons from the LHC and to collide them with electrons which have an energy of 60.0 GeV.

- A.2** For particles with high energy and low mass the relative deviation $\Delta = (c - v)/c$ of the final velocity v from the speed of light is very small. Find a first order approximation for Δ and calculate Δ for electrons with an energy of 60.0 GeV using the accelerating voltage V and physical constants. 0.8pt

We now return to the protons in the LHC. Assume that the beam pipe has a circular shape.

- A.3** Derive an expression for the uniform magnetic flux density B necessary to keep the proton beam on a circular track. The expression should only contain the energy of the protons E , the circumference L , fundamental constants and numbers. You may use suitable approximations if their effect is smaller than precision given by the least number of significant digits. Calculate the magnetic flux density B for a proton energy of $E = 7.00$ TeV, neglecting interactions between the protons. 1.0pt

Radiated Power:

An accelerated charged particle radiates energy in the form of electromagnetic waves. The radiated power P_{rad} of a charged particle that circulates with a constant angular velocity depends only on its acceleration a , its charge q , the speed of light c and the permittivity of free space ϵ_0 .

- A.4** Use dimensional analysis to find an expression for the radiated power P_{rad} . 1.0pt

The real formula for the radiated power contains a factor $1/(6\pi)$; moreover, a full relativistic derivation gives an additional multiplicative factor γ^4 , with $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

- A.5** Calculate P_{tot} , the total radiated power of the LHC, for a proton energy of $E = 7.00$ TeV (Note table 1). You may use suitable approximations. 1.0pt

Linear Acceleration:

At CERN, protons at rest are accelerated by a linear accelerator of length $d = 30.0$ m through a potential difference of $V = 500$ MV. Assume that the electrical field is homogeneous. A linear accelerator consists of two plates as sketched in Figure 1.

A.6 Determine the time T that the protons take to pass through this field.

1.5pt

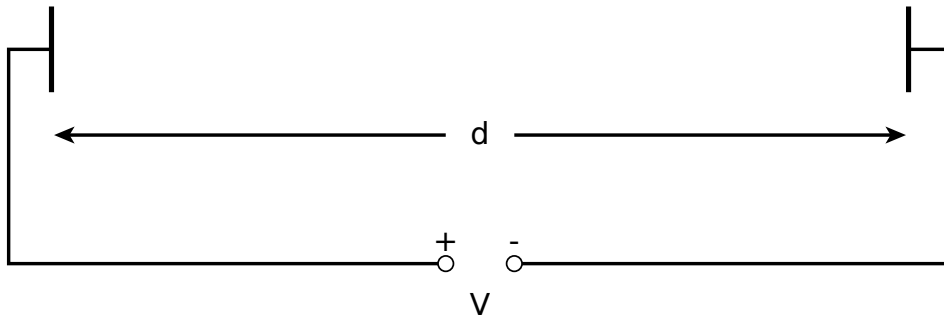


Figure 1: Sketch of an accelerator module.

Part B. Particle Identification (4 points)

Time of flight:

It is important to identify the high energy particles that are generated in the collision in order to interpret the interaction process. A simple method is to measure the time (t) that a particle with known momentum needs to pass a length l in a so-called Time-of-Flight (ToF) detector. Typical particles which are identified in the detector, together with their masses, are listed in table 2.

Particle	Mass [MeV/ c^2]
Deuteron	1876
Proton	938
charged Kaon	494
charged Pion	140
Electron	0.511

Table 2: Particles and their masses.

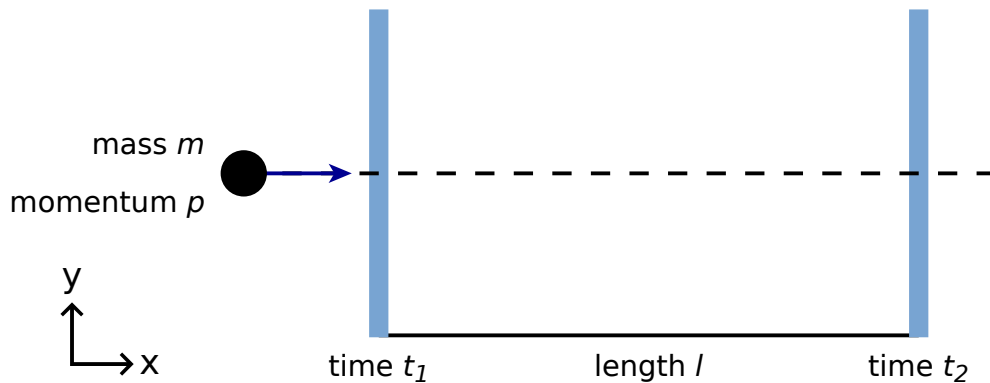
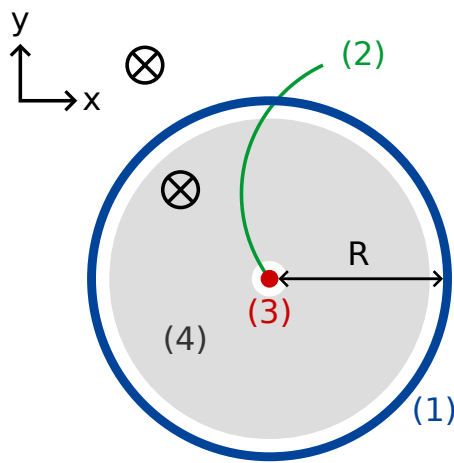


Figure 2: Schematic view of a time-of-flight detector.

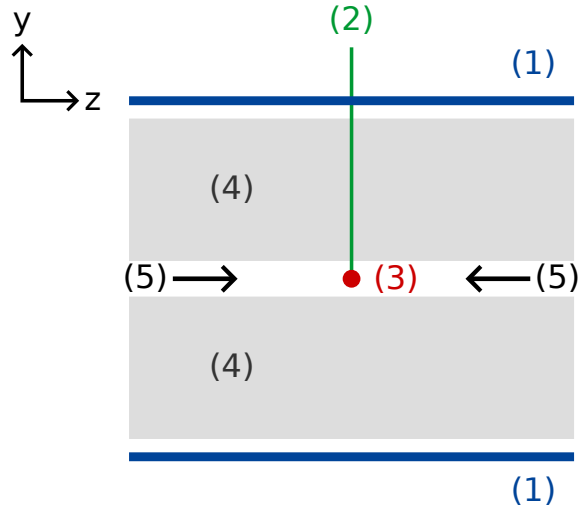
- B.1** Express the particle mass m in terms of the momentum p , the flight length l and the flight time t , assuming that particles have elementary charge e and travel with velocity close to c on straight tracks in the ToF detector and that they travel perpendicular to the two detection planes (see figure 2). 0.8pt

- | | | |
|------------|--|-------|
| B.2 | Calculate the minimal length l of a ToF detector that allows to safely distinguish a charged kaon from a charged pion, given both their momenta are measured to be $1.00 \text{ GeV}/c$. For a good separation it is required that the difference in the time-of-flight is larger than three times the time resolution of the detector. The typical resolution of a ToF detector is 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$). | 0.7pt |
|------------|--|-------|

In the following, particles produced in a typical LHC detector are identified in a two stage detector consisting of a tracking detector and a ToF detector. Figure 3 shows the setup in the plane transverse and longitudinal to the proton beams. Both detectors are tubes surrounding the interaction region with the beam passing in the middle of the tubes. The tracking detector measures the trajectory of a charged particle which passes through a magnetic field whose direction is parallel to the proton beams. The radius r of the trajectory allows one to determine the transverse momentum p_T of the particle. Since the collision time is known the ToF detector only needs one tube to measure the flight time (time between the collision and the detection in the ToF tube). This ToF tube is situated just outside the tracking chamber. For this task you may assume that all particles created by the collision travel perpendicular to the proton beams, which means that the created particles have no momentum along the direction of the proton beams.



transverse plane



cross section of the
longitudinal view at the center
of the tube along the beamline

- (1) - ToF tube
- (2) - track
- (3) - collision point
- (4) - tracking tube
- (5) - proton beams
- ⊗ - magnetic field

Figure 3 : Experimental setup for particle identification with a tracking chamber and a ToF detector. Both detectors are tubes surrounding the collision point in the middle. Left : transverse view perpendicular to the beamline. Right : longitudinal view parallel to the beam line. The particle is travelling perpendicular to the beam line.

B.3 Express the particle mass in terms of the magnetic flux density B , the radius R of the ToF tube, fundamental constants and the measured quantities: radius r of the track and time-of-flight t . 1.7pt

We detected four particles and want to identify them. The magnetic flux density in the tracking detector was $B = 0.500 \text{ T}$. The radius R of the ToF tube was 3.70 m . Here are the measurements ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$):

Particle	Radius of the trajectory r [m]	Time of flight t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

B.4 Identify the four particles by calculating their mass.

0.8pt

일반 지시사항: 이론 시험 (30 점)

2016 년 7 월 14 일

이론시험은 5 시간 동안 진행되며, 총 30 점입니다.

시험 시작 전

- 시험 시작을 알리는 신호 벨이 울리기 전에 문제가 들어 있는 봉투를 열어서는 안 됩니다.
- 시험의 시작과 끝은 벨 소리로 안내됩니다. 매 시간마다 경과된 시간이 안내될 것이며, 시험의 종료를 알리는 벨 소리가 울리기 15 분 전에도 안내될 것입니다.

시험 응시 중

- 답안을 쓰는 전용 답안지가 각 문제당 제공됩니다. 각 문제 번호와 일치하는 답안지 (A 로 표시됨) 답을 적으십시오. 각각의 문제에 여분의 빈 계산용지 (W 로 표시됨) 가 제공됩니다. 현재 풀고 있는 문제번호와 풀이과정을 작성하는 계산용지가 맞는지 확인하십시오.(상단의 문제 번호를 확인하십시오.) 어느 계산용지이든 쓴 것 중 채점이 되지 않기를 원하는 것은 X 표시를 하십시오. 각 계산용지의 앞면만 활용하십시오.
- 풀이과정을 작성할 때 최대한 간결하게 작성하십시오: 방정식을 사용하거나, 논리 연산자를 사용하고, 생각하는 내용을 간단하게 작성하십시오. 긴 문장을 쓰는 것을 피하십시오.
- 숫자를 표시할 때에는 알맞은 유효숫자의 개수를 주어야 합니다.
- 전 단계의 문제를 풀지 않았다하더라도, 다음 단계의 문제를 풀 수도 있습니다.
- 물리 상수 목록은 다음 페이지에 있습니다.
- 허가 없이 시험 장소를 떠날 수 없습니다. 도움이 필요 하면 (마실 물을 보충할 경우, 계산기 고장, 화장실 방문이 필요, 등), 세개의 깃발 중 하나 (" 마실 물을 보충하고자 합니다.", " 화장실에 가려고 합니다.", 또한" 도움이 필요 합니다.") 를 사용하여 감독관에게 알려 주시기 바랍니다.

시험 종료 후

- 시험이 끝나는 즉시 답안 작성을 중지해야 합니다.
- 각 문제에 대해 작성한 용지의 순서를 정렬합니다. 순서는 다음과 같습니다: 겹장 (cover sheet, C), 문제지 (questions, Q), 답안지 (answer sheets, A), 계산용지 (work sheet, W)
- 한 문제에 해당되는 모든 계산용지들은 해당 문제의 봉투에 함께 넣으세요. 일반적인 지시사항 (G) 는 남는 봉투에 따로 넣으세요. 학생 수험번호가 각 봉투의 투명한 창을 통해 보일 수 있게 넣으십시오. 사용하지 않은 계산용지 또한 제출하세요. 어떠한 종이도 시험장 밖으로 가지고 나갈 수 없습니다.
- 제공된 파란색 계산기는 책상위에 그대로 두고 가세요.
- 필기구 (볼펜 2 자루, 펄트펜 1 자루, 연필 1 자루, 가위 1 개, 자 1 개, 2 쌍의 귀마개) 와 각자의 개인 계산기를 가져가세요. 또한, 개인의 물병도 가져가세요.
- 봉투가 수거될 때 까지 책상에서 대기하십시오. 봉투가 수거되면 감독관이 시험장 밖으로 안내해줄 것입니다.

일반적인 상수 목록 (General Data Sheet)

진공에서 빛의 속력	c	$=$	$299\,792\,458\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
진공에서의 투자율 (자기 상수)	μ_0	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\,\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
진공에서의 유전율 (전기 상수)	ε_0	$=$	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\,\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
기본 전하	e	$=$	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\,\text{A} \cdot \text{s}$
전자의 질량	m_e	$=$	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\,\text{kg}$ $= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
양성자의 질량	m_p	$=$	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\,\text{kg}$ $= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
중성자의 질량	m_n	$=$	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\,\text{kg}$ $= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
통일된 (unified) 원자 질량 단위	u	$=$	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\,\text{kg}$
리드버그 상수	R_∞	$=$	$10\,973\,731.568\,508(65)\,\text{m}^{-1}$
만유인력 상수	G	$=$	$6.674\,08(31) \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
(꺾리히의) 중력 가속도	g	$=$	$9.81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
플랑크 상수	h	$=$	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
아보가드로 수	N_A	$=$	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
몰 기체상수	R	$=$	$8.314\,4598(48)\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
몰 질량 상수	M_u	$=$	$1 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
볼츠만 상수	k_B	$=$	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
스테판-볼츠만 상수	σ	$=$	$5.670\,367(13) \times 10^{-8}\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

2 가지 역학 문제 (10 점)

문제를 풀기 전에 다른 봉투에 담긴 일반 지시사항을 읽으세요.

파트 A. 숨겨진 원판 (3.5 점)

반지름이 r_1 이고, 두께가 h_1 인 나무로 만들어진 속이 찬 원통이 있다. 이 나무 원통 내부 어딘가에 나무를 파내고, 반지름이 r_2 이고, 두께가 h_2 인 금속 원판을 넣었다. 나무 원통의 대칭축 S 와 금속 원판의 대칭축 B 는 평행하며, 금속 원판은 나무 원통의 윗면과 아랫면으로부터 같은 거리에 위치한다. 대칭축 S 와 대칭축 B 사이의 거리를 d 라고 하자. 나무의 밀도는 ρ_1 이고, 금속의 밀도는 $\rho_2 > \rho_1$ 이다. 나무 원통과 금속 원판의 전체 질량은 M 이다.

나무 원통을 바닥에 놓고, 좌우로 자유롭게 구를 수 있게 하자. 그림 1 은 옆에서 본 그림과 위에서 본 그림이다.

이번 문제의 목표는 금속 원판의 위치와 크기를 결정하는 것이다.

지금 이후 단계에서, 알려진 양으로 결과를 표현하라는 문제에서는 다음의 양들이 항상 알려져 있다고 가정해도 좋다:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

목표는 간접적인 측정을 통하여 r_2, h_2, d 를 결정하는 것이다.

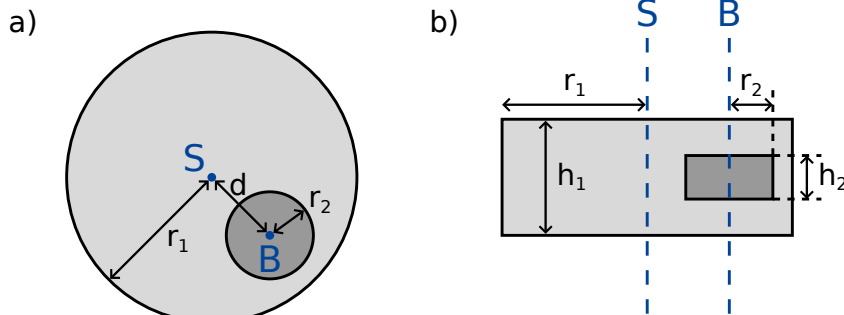


그림 1 : a) 측면에서 본 그림, b) 위에서 본 그림

전체 시스템의 질량 중심 C 에서 나무 원통의 대칭축 S 까지의 거리를 b 라고 하자. 이 거리를 결정하기 위해서, 다음과 같은 실험을 설계하자: 전체 시스템을 수평 바닥면에 놓고, 안정적 평형 상태에 있게 한다. 바닥면을 θ 의 각도로 천천히 비스듬하게 올린다 (그림 2 참고). 정지 마찰력에 의해서, 나무 원통은 미끄러지지 않고 구를 수 있다. 나무 원통은 경사를 조금 굴러 내려오고 난 후 안정적 평형상태가 될 것이고, 나무 원통이 평형에 도달하는 동안 회전한 각도가 ϕ 이다.

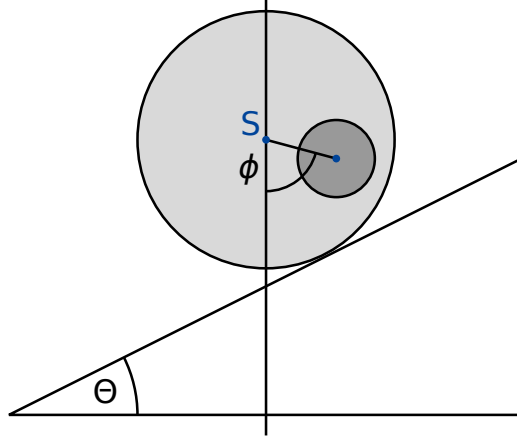


그림 2: 기울어진 바닥면 위의 원통

- A.1** (1)에 주어진 양들과 ϕ , 수평면으로 부터 바닥면이 기울어진 각도 θ 을 이용하여, b 를 표현 하시오. 0.8pt

지금부터, b 값은 알고 있다고 가정한다.

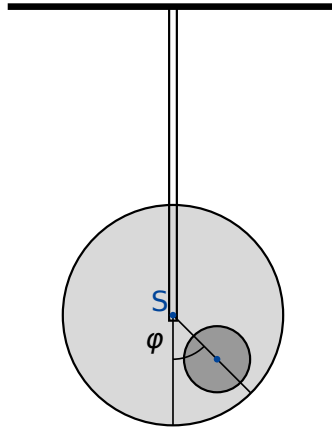


그림 3: 매달린 시스템

그 다음, 대칭축 S 에 대한 시스템의 관성모멘트 I_S 를 측정하자. 이를 위해, 나무 원통의 중심축을 강체 막대에 고정시켜 나무 원통을 매단다. 그리고 안정적 평형상태에서 아주 작은 각도인 φ 만큼 돌린 뒤, 가만히 놓는다. 그림 3 이 이 실험의 셋업이다. φ 는 주기 T 인 주기 운동을 나타내는 변수로 사용될 수 있다.

- A.2** φ 에 대한 운동방정식을 구하시오. 시스템의 대칭축 S 에 대한 관성모멘트 I_S 를 T, b , 그리고 (1)의 알려진 양들을 이용하여 표현하시오. φ 값이 아주 작도록, 평형상태를 아주 조금만 교란시킨다고 가정하자. 0.5pt

문제 **A.1** 과 **A.2** 에서 측정한 결과를 이용하여 나무 원통 내부의 금속 원판의 기하학적 구조와 위치를 결정하자.

A.3 거리 d 를 b 와 (1) 에서 주어진 값을 이용해 표현하여라. 또한, 문제 **A.5** 에서 계산할 변수인 r_2 와 h_2 도 포함하시오. 0.4pt

A.4 관성모멘트 I_S 를 b 와 (1) 에서 주어진 양들을 이용하여 표현하시오. 또한, 문제 **A.5** 에서 계산할 변수인 r_2 와 h_2 도 포함하시오. 0.7pt

A.5 위의 모든 결과들을 활용하여, h_2 와 r_2 를 b, T , 그리고 (1) 에서 주어진 양들을 이용하여 표현하시오. h_2 는 r_2 를 이용하여 표현해도 됩니다. 1.1pt

파트 B. 회전하는 우주 정거장 (6.5 점)

앨리스 (Alice) 는 우주 정거장에 살고 있는 우주 비행사이다. 반지름 R 인 아주 큰 바퀴 모형의 우주 정거장은 우주 정거장의 우주 비행사들에게 중력을 제공하기 위해서 축을 중심으로 회전하고 있다. 우주 비행사들은 바퀴 테두리의 안쪽 내부 (inner side of the rim) 에 살고 있다. 우주 정거장을 구성하는 재료들의 만유인력과 바닥의 곡률은 무시한다.

B.1 얼마의 각 진동수 ω_{ss} 로 우주 정거장이 회전하면, 우주 비행사가 지구 표면에 있을 때와 같은 중력 g_E 를 느낄까? 0.5pt

앨리스와 비행사 동료인 밥 (Bob) 이 논쟁을 했다. 밥은 자신이 우주 정거장에 살고 있지 않으며, 지구에 살고 있다고 믿고 있다. 앨리스는 물리학을 이용하여, 회전하는 우주 정거장에 살고 있다는 것을 증명해주고자 한다. 이를 위해 앨리스는 용수철 상수 k 인 용수철에 질량 m 인 물체를 매달고 진동시켰다. 이 물체는 오직 수직 방향으로만 진동하며 수평 방향으로의 운동하지 않는다.

B.2 지구에서 중력이 중력가속도 g_E 로 일정하다고 가정하면, 지구에 있는 사람이 측정하게 되는 이 용수철의 각 진동수 ω_E 의 수식은 무엇인가? 0.2pt

B.3 앨리스가 우주 정거장에서 측정하게 되는 이 용수철의 각 진동수 ω 의 수식은 무엇인가? 0.6pt

앨리스는 자신의 실험을 통해 그들이 회전하는 우주 정거장 위에 있음을 입증하였다고 확신한다. 하지만, 밥은 아직 의심하고 있다. 밥은 지구 표면 위에서 중력의 변화를 고려하면, 이와 유사한 효과를 발견할 것이라고 주장한다. 다음 과제에서 밥이 옳은지를 조사하자.

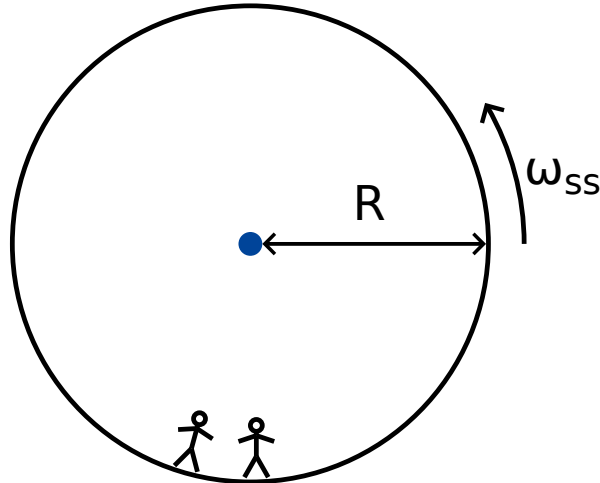


그림 4: 우주 정거장 (Space station)

- B.4** 지구 표면으로부터 아주 작은 높이 h 에서 중력 $g_E(h)$ 을 나타내는 수식을 유도하고, 이 위치에서 진동하는 물체의 진동수 $\tilde{\omega}_E$ 를 계산하시오. (선형 근사 (linear approximation) 를 활용하라.) 지구의 반지름은 R_E 로 표시하시오. 지구의 회전은 무시하시오. 0.8pt

정말로, 엘리스는 이 우주정거장에서 용수철 진자가 밥이 예상한 대로 진동한다는 것을 발견하였다.

- B.5** 우주 정거장에서 용수철의 진동수 ω 가 지구에서 진동수 $\tilde{\omega}_E$ 와 같으려면, 우주 정거장의 반지름 R 이 얼마가 되어야하는가? 답을 R_E 를 이용하여 나타내시오. 0.3pt

밥의 고집에 화가 난 엘리스는 자신의 주장을 증명하기 위해 한 실험을 제안한다. 다시 말해, 우주 정거장의 바닥에서 높이가 H 인 타워에 올라가, 물체를 우주 비행선의 바닥으로 떨어뜨린다. 이 실험은 관성기준틀 (inertial reference frame) 에서 뿐 아니라 회전하는 기준틀 (rotating reference frame) 에서도 이해할 수 있다.

균일하게 회전하는 기준틀에서 우주비행사들은 전향력 (Coriolis force) 이라고 불리는 가상의 힘 (fictitious force) $\vec{F}_C$ 을 느낀다. 일정한 각 진동수 $\tilde{\omega}_{ss}$ 로 회전하는 기준틀에서 $\vec{v}$ 의 속도로 운동하는 질량 m 인 물체에 작용하는 힘 $\vec{F}_C$ 는 다음과 같이 주어진다:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \tilde{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

스칼라 양만을 사용하게 되면, 다음과 같다.

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

여기서 ϕ 는 물체의 속도와 기준틀의 회전축 사이의 각도이다. 이 힘은 속도 v 와 회전축 모두에 수직 방향으로 작용한다. 힘의 부호는 오른손 법칙에 의해 결정되지만, 아래 문제에서는 자유롭게 선택해도 된다.

- B.6** 물체가 (우주 정거장의) 바닥을 치는 순간, 물체의 수평 속도 v_x 와 (타워의 바닥에서 타워에 수직인 방향으로) 수평 변위 d_x 을 계산하시오. 타워의 높이 H 가 매우 작으므로 우주 비행사가 측정하는 동안 물체의 가속도가 일정하다고 가정한다. 또한, $d_x \ll H$ 을 가정한다. 1.1pt

좋은 결과를 얻기 위하여, 엘리스는 실험을 전보다 매우 더 높은 타워에서 하기로 결심하였다. 하지만 놀랍게도, 물체가 타워의 바로 아래 부분에 떨어져서 $d_x = 0$ 라는 결과를 얻게 되었다.

B.7 $d_x = 0$ 이 될 수 있는 타워의 높이의 하한 (lower bound) 를 구하시오.

1.3pt

앨리스는 밥을 설득하기 위해 마지막으로 다음 실험을 시도한다. 앨리스는 자신의 용수철 진동자를 이용하여 전향력의 효과를 보여주려고 한다. 이를 위해, 원래의 실험 셋업에 그림과 같이 변화를 주었다. 우주정거장의 바닥과 평행하게 수평으로 놓인 막대의 x 방향으로 마찰없이 움직일 수 있는 고리에 용수철을 붙인다. 용수철은 y 방향으로 진동한다. 막대는 우주정거장의 바닥면과 평행하며, 우주 정거장의 회전축의 방향에 대해서 수직이다. xy 평면은 회전축에 대하여 수직이며, y 방향은 우주 정거장의 회전 중심을 향하는 방향이다.

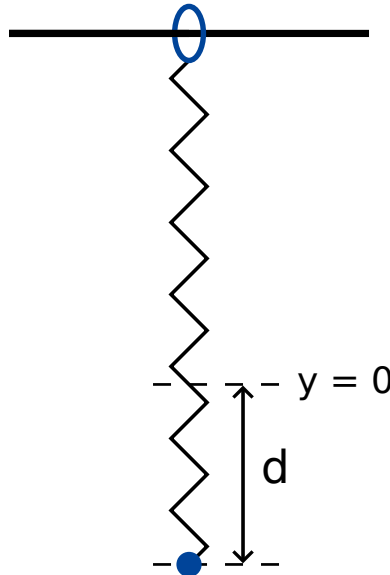


그림 5: 실험의 셋업

B.8 앨리스가 용수철에 매달린 물체를 평형점 $x = 0, y = 0$ 으로부터 아랫방향으로 거리 d 만
큼 당긴 후에 놓았다. (그림 5 참고)

1.7pt

- $x(t)$ 와 $y(t)$ 를 수식으로 표현하시오. $\omega_{ss}d$ 는 작다고 가정하고, y 축 방향 운동에 대한 전향력은 무시할 수 있다.
- $(x(t), y(t))$ 의 궤적을 그리고, 진폭 등과 같은 중요한 특징들을 표시하시오.

앨리스와 밥은 계속해서 논쟁한다.

전기회로에서의 비선형 동역학 (10 점)

문제를 풀기 전에 동봉된 일반 지시사항을 꼭 읽으세요.

서론

사이리스터 (thyristor) 와 같이 두 개의 안정적인 (쌍안정) 상태를 가지는 비선형 반도체 소자는 스위치나 전자기 진동의 발전기와 같은 전자 제품에 널리 사용된다. 사이리스터의 주요 응용 분야는 메가 와트 규모의 AC 전류를 DC 로 정류 하는 전력 소자에서 교류 전류를 제어하는 것이다. 쌍안정 요소는 물리학과 생물학 및 다양한 현대 비선형 과학에서 나타나는 자기 조직화 (Self-organization) 현상의 모델 시스템으로도 고려될 수 있다. 파트 B 에서는 물리학 분야에서, 파트 C 에서는 생물학 분야에서 응용되는 쌍안정 소자에 대해 알아보도록 한다.

탐구 목표

비선형 전류-전압 ($I - V$) 특성을 가지는 소자를 포함하는 전기회로에서 불안정성과 주요 동역학을 알아본다. 공학과 생물 시스템의 모델링 분야에서 이러한 회로의 응용 가능성을 알아본다.

파트 A. 정상 상태와 불안정성 (3 점)

그림 1 에서 어떤 쌍안정 소자 X 의 소위 S-형태라 불리는 비선형 $I - V$ 특성 곡선을 볼 수 있다. 소자 X 에 걸리는 전압을 U 라 할 때, $U_h = 4.00 \text{ V}$ (유지 전압, holding voltage) 과 $U_{th} = 10.0 \text{ V}$ (문턱 전압, threshold voltage) 사이에서 $I - V$ 특성 곡선은 다중값을 가지고 있다. 문제를 간단히 하기 위해, 그림 1 에서 여러 조각으로 구성된 선형 (piece-wise linear) 으로 (각 구간의 선을 직선으로) 취급한다. 특히, 가장 위 구간의 직선은 연장해서 그리면 원점을 통과한다. 이것은 실제 사이리스터의 설명하기 위해 적절한 근사이다.

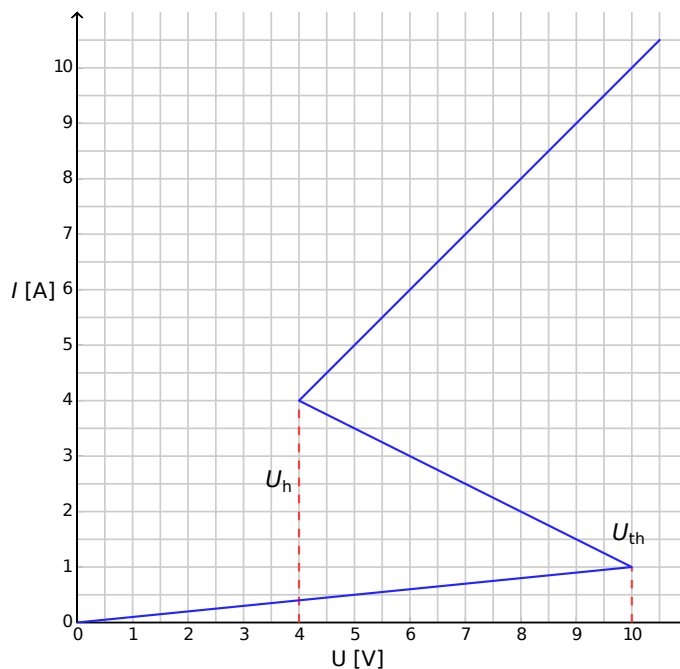


그림 1: 비선형 소자 X 의 전류-전압 ($I - V$) 특성 곡선.

- A.1** $I - V$ 특성 그래프에서 가장 위 구간 직선 영역에서 소자 X 의 저항값 R_{on} 과 가장 아래 구간 직선 영역에서 저항값 R_{off} 을 각각 구하시오. 가운데 구간의 직선은 다음 수식으로 표현된다. 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

I_0 and R_{int} 값을 구하시오.

그림 2와 같이 비선형 소자 X 가 저항 R 과 인덕터 L 그리고 이상적인 전원 (voltage source) $\mathcal{E}$ 에 직렬로 연결되어 있다. 전류가 시간에 무관한 상수값, 즉 $I(t) = \text{const}$ 일때 회로는 정상상태 (stationary state)에 있다고 한다.

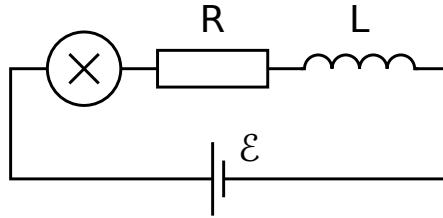


그림 2: 소자 X , 저항 R , 인덕터 L , 전원 $\mathcal{E}$ 로 구성된 회로

- A.2** 저항 $R = 3.00 \, \Omega$ 일때, $\mathcal{E}$ 값이 변함에 따라 그림 2의 회로에서 가능한 정상 상태는 몇개 인가? 저항 $R = 1.00 \, \Omega$ 의 경우는 어떠한가? 1pt

- A.3** 그림 2에서 $R = 3.00 \, \Omega$, $L = 1.00 \, \mu\text{H}$, $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$ 일 때, 비선형 소자 X 에 흐르는 정상 상태에서 전류값 $I_{\text{stationary}}$ 과 비선형 소자 양단의 전압 $V_{\text{stationary}}$ 을 구하시오. 0.6pt

그림 2의 회로가 $I(t) = I_{\text{stationary}}$ 인 정상상태에 있다고 하자. 어떤 정상상태에서 전류값이 조금 커지거나 줄어든 뒤에 다시 원래의 정상상태의 값으로 돌아오면 안정적 (stable) 이라고 한다. 반면에, 이 경우와 달리 전류값이 조금 변하면 그 뒤로 정상상태에서 점점 벗어나는 값을 가지게 되는 경우들을 불안정한 (unstable) 상태라고 말한다.

- A.4** 문제 A.3에 주어진 값들을 사용하여 $I(t) = I_{\text{stationary}}$ 인 정상상태의 안정성을 따져보라. 문제 A.3에서 구한 정상상태는 안정적인가 또는 불안정한가? 이를 설명하시오. 1pt

파트 B. 물리학에서 쌍안정한 비선형 소자: 무선 송신기 (5 점)

그림 3과 같이 새로운 회로의 구성을 살펴보자. 비선형 소자 X 는 축전지 ($C = 1.00 \, \mu\text{F}$)에 병렬로 연결되어 있다. 병렬 연결된 소자 X 와 축전지는 저항 ($R = 3.00 \, \Omega$)과 이상적인 전원 ($\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$)에 직렬로 연결되어 있다. 이 회로에서 세 직선중 한 직선 부분에서 다른 직선 부분으로 전류가 갑자기 튀면서 (jumping) 전류가 계속적으로 변화하는 주기적 진동 (oscillation, 왕복)의 순환 사이클을 반복하고 있다.

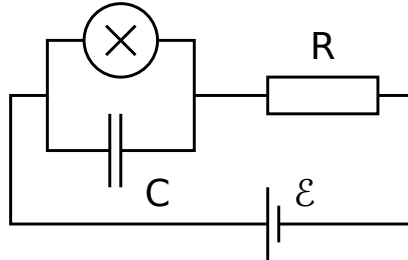


그림 3: 소자 X , 축전지 C , 저항 R , 전원 $\mathcal{E}$ 로 구성된 회로

- | | | |
|------------|--|-------|
| B.1 | $I - V$ 그래프에 순환 사이클 (oscillation cycles) 을 방향을 포함해서 (시계방향 또는 반시계방향) 그리시오. 수식과 그래프상 스케치를 이용하여 당신의 답이 맞는 이유를 나타내시오. | 1.8pt |
| B.2 | $I - V$ 그래프에서 순환 사이클이 각 영역에서 머무르는 시간 t_1 과 t_2 를 수식으로 표현하십시오. 주어진 회로 소자 값들을 넣어 각 영역에서 머무르는 시간 값을 구하십시오. $I - V$ 그래프 상의 한 직선 구간에서 다른 직선 구간으로 갑자기 튀는데 걸리는 시간을 무시할 수 있다면, 상태변화 주기 T 는 얼마인가? | 1.9pt |
| B.3 | 한 사이클이 일어나는 동안 비선형 소자에서 소모되는 평균 전력 P 를 구하십시오. 해답은 값의 대략적 자릿수 크기 (order of magnitude, 승수) 로 충분하다. | 0.7pt |

그림 3 의 회로는 무선 송신기를 만드는데 사용된다. 소자 X 가 길이 s 인 선형 안테나 (긴 직선의 도선) 에 끝에 붙어 있다. 도선의 다른 쪽에는 아무것도 붙어있지 않다. (한쪽은 자유단이고 다른 쪽은 고정되어 있다.) 이 안테나에서 전자기파는 정상파를 이룬다. 안테나에서 전자기파의 속도는 진공에서 속도와 같다. 송신기는 질문 **B.2** 에서 주기가 T 인 전자기파의 기본 진동수의 주요 배수파 (main harmonic) 을 이용한다.

- | | | |
|------------|---|-------|
| B.4 | s 값은 1 km 를 넘지 않는다고 할 때, 최적의 s 값은 얼마인가? | 0.6pt |
|------------|---|-------|

파트 C. 생물학에서 쌍안정한 비선형 소자: 뉴리스터 (neuristor) (2 점)

이번 C 파트에서는 생물학적 과정의 모델링으로 쌍안정한 비선형 소자의 응용을 고려해 보자. 인간의 뇌에서 신경 세포는 다음과 같은 속성을 가진다: 외부 신호에 의해 흥분 될 때, 신경은 한 번 진동을 한 후 초기 상태로 돌아간다. 이 기능은 흥분이라고 한다. 이러한 특성 때문에, 신경망을 구성하는 뉴런 (신경세포) 네트워크에 펄스가 전달된다. 이러한 흥분과 펄스의 전파를 모방해서 만든 반도체 칩을 neuristor (neuron 과 transistor 의 합성어) 라고 한다.

위에서 사용된 비선형 소자 X 를 포함한 회로를 이용해 간단한 뉴리스터 (neuristor) 를 구현해보자. 이 목적을 위해, 그림 3 의 회로에서 전원 $\mathcal{E}$ 을 $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$ 로 줄인다. 이에 따라 순환 사이클이 정지하고 회로가 정상상태에 도달했다. 그 후, 전압이 급속하게 이전의 값 $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ 으로 증가했다가 시간 τ ($\tau < T$) 이후 다시 $\mathcal{E}'$ 값으로 돌아간다. (그림 4 를 보시오.) 특정 임계값 τ_{crit} 을 경계로 $\tau < \tau_{\text{crit}}$ 일 때와 $\tau > \tau_{\text{crit}}$ 일 때, 회로는 매우 다른 현상을 보인다.

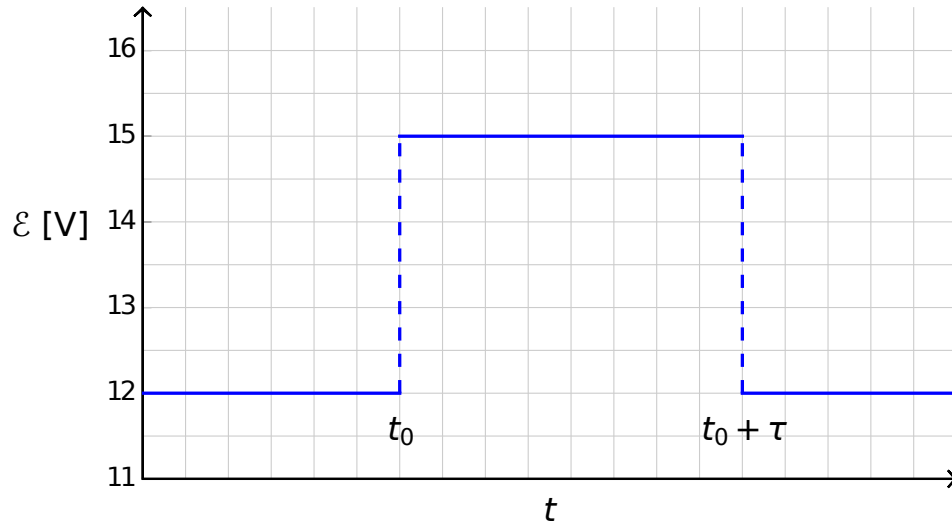


그림 4: 시간에 따른 전원의 전압.

C.1 $\tau < \tau_{\text{crit}}$ 와 $\tau > \tau_{\text{crit}}$ 일 때의, 각각의 경우 비선형 소자 X 를 흐르는 전류 $I_X(t)$ 의 시간에 따른 변화를 그래프로 표시하시오. 1.2pt

C.2 목적인 의도대로 스위치 회로가 작동하기 위한 임계값 τ_{crit} 을 수식으로 보이고 그 값을 계산하시오. 0.6pt

C.3 $\tau = 1.00 \times 10^{-6} \text{ s}$ 인 회로는 뉴리스트 (neuristor) 인가? 0.2pt

거대 강입자 충돌기 (Large Hadron Collider, LHC) [10 점]

풀이를 시작하기 전에 별도의 봉투에 있는 일반 지시사항을 꼭 읽으시오.

이 과제에서는 스위스 CERN 에 있는 입자가속기 LHC(Large Hadron Collider) 의 물리를 다룬다. CERN 은 세계에서 제일 큰 입자 물리 연구소이다. 연구의 주된 목표는 자연의 기본법칙에 대한 통찰력을 얻는 것이다. 두 개의 다른 입자 다발 (beam) 을 매우 높은 에너지까지 가속시키고, 강한 자기장으로 가속기 고리 (ring) 내부로 인도한 (집속시킨) 후, 서로 충돌하게 한다. 양성자들은 가속기 둘레에 균일하게 퍼져있지 않고, 군데군데 소위 "뭉치 (bunch)" 라고 불리는 집단을 이루고 있다. 양성자들의 충돌로 발생하는 입자들은 대형 감지장치 (detector) 들로 관찰한다. LHC 의 파라미터들은 표 1 에서 찾을 수 있다.

LHC 고리 (ring)	
고리의 둘레 길이	26659 m
양성자 다발 (beam) 당 뭉치 (bunch) 들의 개수	2808
뭉치 당 양성자의 개수	1.15×10^{11}
양성자 다발 (beam)	
양성자들의 에너지	7.00 TeV
질량 중심 에너지	14.0 TeV

표 1: LHC 파라미터들의 일반적인 값들

입자 물리학자들은 에너지, 운동량, 질량에 대해 다음의 단위를 사용한다: 에너지 단위는 전자 볼트 [eV]. 1 eV 는 기본 전하 e 를 가지는 입자가 1V 의 전위차로 가속될 때 얻는 에너지 양이다. ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$)

운동량은 eV/c 의 단위로, 질량은 eV/c^2 의 단위로 측정한다. 여기서 c 는 진공에서 광속이다. 1 eV 는 매우 작은 에너지 양이므로, 종종 MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$), GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) 또는 TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$) 을 사용한다.

파트 A 는 양성자 또는 전자의 가속을 다룬다. 파트 B 는 CERN 의 충돌에서 만들어진 입자들 중 새로운 것을 발견해 내는 것과 연관되어 있다.

파트 A. LHC 가속기 (6 점)

가속:

양성자들이 전압 V 로 가속되어 속도가 광속에 매우 가까워졌다고 가정하고, 복사 (radiation) 또는 다른 입자들과의 충돌로 인한 에너지 손실은 무시하시오.

- A.1** 가속 전압 V 와 물리 상수들 (physical constants) 의 함수로 양성자의 최종 속도 v 의 정확한 표현식을 구하시오. 0.7pt

CERN 에서는 LHC 에서 나오는 양성자들을 에너지 60.0 GeV 인 전자들과 충돌시키는 실험을 다음 단계로 계획 중이다.

- A.2** 에너지가 크고 질량이 작은 입자들의 경우, 최종 속도 v 가 광속으로부터 벗어난 정도의 상대값 $\Delta = (c - v)/c$ 이 매우 작다. Δ 에 대한 1 차 근사식을 구하고, 이로부터 가속전압 V 와 물리상수들을 이용하여 에너지 60.0 GeV 의 전자에 대해 Δ 를 계산하시오. 0.8pt

이제 LHC 내의 양성자들로 되돌아간다. 양성자가 흘러가는 관 (pipe) 은 원 모양이라고 가정한다.

- A.3** 양성자의 흐름 (beam) 이 원 모양 트랙 (궤적) 을 유지하는 데 필요한 균일한 자속 밀도 B 의 수식을 유도하시오. 수식은 양성자 에너지 E , 양성자 궤적의 원둘레 길이 L , 기본 상수들과 숫자들만을 포함하여야 한다. 유효숫자의 마지막 자리의 값보다 정밀도에서 작은 영향을 주는 경우에는 적당한 근사를 사용해도 된다. 양성자의 에너지가 $E = 7.00 \text{ TeV}$ 인 경우 자속밀도 B 를 계산하시오. 양성자들의 상호작용은 무시하시오. 1.0pt

복사 일률 (radiated power)

가속된 대전 입자는 전자기파 형태로 에너지를 복사 (radiate) 한다. 일정한 각속도로 회전하고 있는 대전된 가속 입자의 복사 일률 (radiated power) P_{rad} 은 가속도 a , 대전 입자의 전하량 q , 광속 c , 진공 유전율 ϵ_0 에만 의존한다.

- A.4** 차원분석 (dimensional analysis) 을 이용하여 복사 일률 P_{rad} 의 표현식을 구하시오. 1.0pt

복사 일률의 실제 공식은 $1/(6\pi)$ 의 계수를 더 포함하게 된다: 또한, 상대론을 완전히 적용하여 유도하면 추가적인 곱하기 인수 γ^4 을 가지게 된다. 이 때, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 이다.

- A.5** 양성자 에너지 $E = 7.00 \text{ TeV}$ 인 경우 LHC 의 전체 복사 일률 P_{tot} 을 계산하시오. (앞의 표 1 참조) 여기서 적절한 근사를 사용해도 좋다. 1.0pt

선형 가속:

CERN 에서는 정지해 있는 양성자들이 길이 $d = 30.0 \text{ m}$ 인 선형 가속기 (직선 경로에서 가속하는 장치) 에 의해 전위차 $V = 500 \text{ MV}$ 으로 가속된다. 전기장은 길이 방향을 따라 균일하다고 가정한다. 선형 가속장치는 그림 1 과 같이 두 개의 판으로 이루어져 있다.

- A.6** 양성자들이 길이 d 의 균일한 전기장을 지나가는 데 걸리는 시간 T 를 계산하시오. 1.5pt

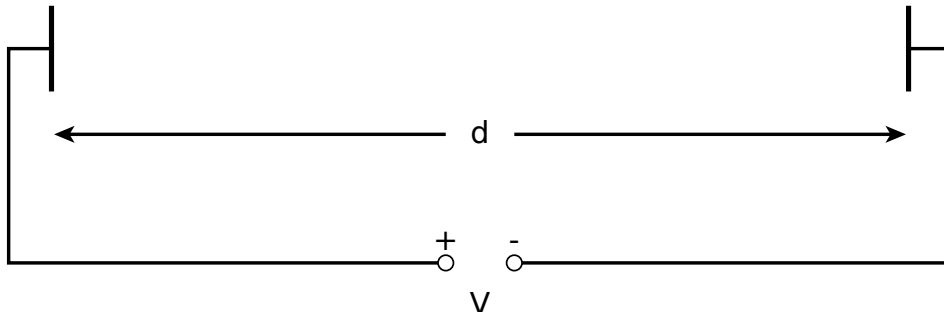


그림 1: 가속기 모듈의 개략도

파트 B. 입자 검출 (4 점)

비행 시간 (time of flight, ToF)

상호작용 과정을 해석하기 위하여 충돌로 발생한 큰 에너지의 입자들을 구분해 내는 것이 중요하다. 이를 위한 간단한 방법으로, 운동량을 알고 있는 입자가 비행 시간 검출기 (Time-of-Flight detector, ToF detector) 라고 불리는 장치에서 길이 l 을 지나가는 데 걸리는 시간 (t) 을 측정하는 방법이 있다. 비행 시간 검출기에서 발견되는 대표적인 입자들이 질량과 함께 표 2 에 열거되어 있다.

입자	질량 [MeV/c^2]
중양성자 (Deuteron)	1876
양성자 (Proton)	938
대전된 중간자 케이온 (Kaon)	494
대전된 중간자 파이온 (Pion)	140
전자 (Electron)	0.511

표 2: 입자들의 질량

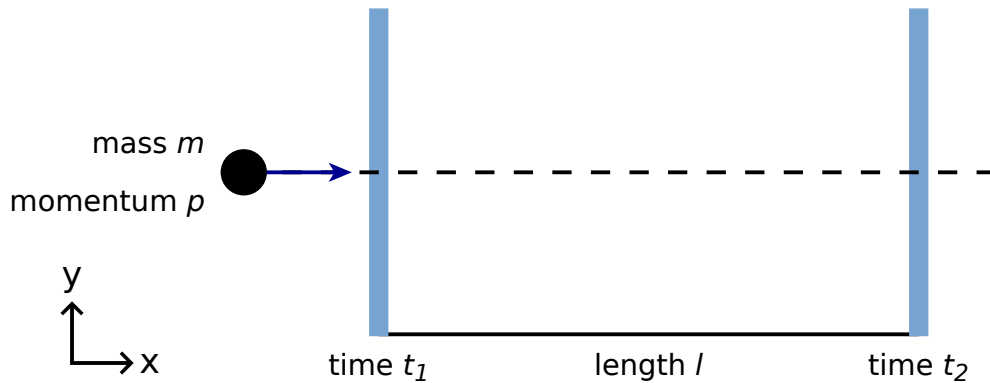
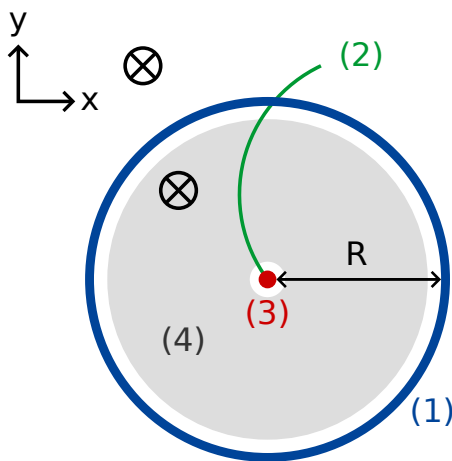


그림 2: 비행시간 검출기의 개략적인 그림 (mass= 질량, momentum= 운동량, time= 시각, length= 길이)

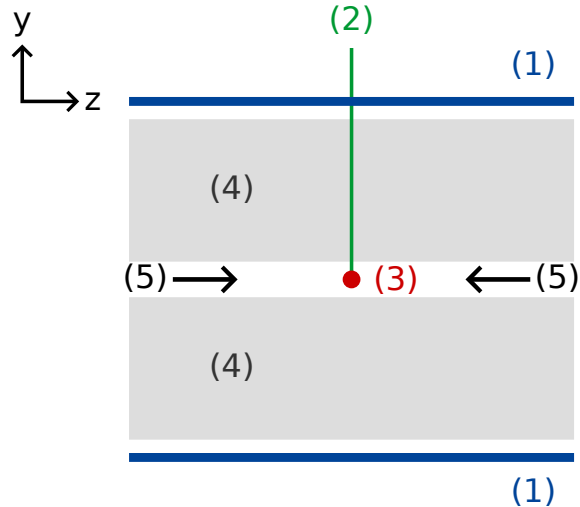
- B.1** 운동량 p , 비행 거리 l , 비행 시간 t 의 함수로 입자의 질량 m 을 나타내시오. 입자들이 기본 전하 e 를 가지고 광속에 가까운 속도로 ToF 검출기 내의 직선 트랙을 따라, 두 개의 감지 평면 (detection plane) 에 수직 방향으로 이동한다고 가정하시오 (그림 2 를 보시오) 0.8pt

- B.2** 운동량이 $1.00 \text{ GeV}/c$ 으로 같은, 대전된 중간자 케이온과 대전된 중간자 파이온을 안전하게 구분하려면, 비행 시간 (ToF) 검출기의 최소 길이 l 이 얼마가 되어야 하는지 계산하시오. 0.7pt
안전하게 구분하기 위해서는, 두 입자의 비행 시간의 차이가 검출기의 시간 분해능의 3 배보다 커야 한다. 비행 시간 검출기의 분해능은 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$) 이다.

아래에서는, 궤도 추적 감지기 (tracking detector) 와 비행 시간 (ToF) 검출기로 구성된 두 단계 검출 시스템을 사용하여 LHC 에서 양성자의 충돌에 의해 생성된 입자들을 검출하려고 한다. 그림 3 은 양성자 흐름에 대해 가로 방향 (transverse) 단면과 길이 방향 (longitudinal) 단면에서 실험 셋업을 보여주고 있다. 두 검출장치는 모두 양성자가 흘러가고 상호작용하며 충돌하는 원통 (pipe) 의 중심축을 둘러싸고 있는 튜브 형태이다. 궤도 추적 감지기는 양성자 흐름에 평행한 방향의 자기장이 존재하는 영역을 지나가는 대전입자의 이동 경로 (trajectory) 를 측정한다. 입자의 이동경로의 반지름 r 로부터 그 입자의 축에 수직인 방향의 (transverse) 운동량 p_T 을 구할 수 있다. 양성자들의 충돌이 일어난 시각을 알기 때문에, 충돌 지점부터 비행 시간 (ToF) 튜브 경계까지의 비행 시간을 재기 위해 바깥쪽에 있는 튜브 하나만 필요하다. 비행 시간 (ToF) 검출기 튜브는 궤도 추적 감지기 (tracking chamber) 바로 밖에 둔다. 이 과제에서는 충돌로 생성된 모든 입자들이 양성자 흐름에 수직인 방향으로만 (transverse 방향) 이동한다고, 즉, 생성된 입자들에는 양성자흐름 방향으로의 (longitudinal) 운동량은 없다고 가정하시오.



transverse plane



cross section of the
longitudinal view at the center
of the tube along the beamline

- (1) - 비행 시간 (ToF) 검출기 튜브
- (2) - 트랙 (생성 입자의 궤적)
- (3) - 충돌 지점
- (4) - 궤도 추적 감지기 튜브
- (5) - 양성자 흐름들 (beam)
- ⊗ - 자기장

그림 3: 궤도 추적 감지기 (tracking chamber) 와 ToF 검출기를 가지고 있는 입자 검출을 위한 실험 셋업. 두 검출장치 모두 충돌 지점을 둘러싸고 있는 튜브들이다. 왼쪽: 양성자 흐름선 (beamline) 에 수직인 단면을 본 그림. 오른쪽: 양성자 흐름선에 평행한 길이 방향의 단면을 본 그림. 입자가 흐름선에 수직으로 이동하고 있다.

(transverse plane = 가로 방향의 단면, cross section of the longitudinal view at the center of the tube along the beamline = 흐름선을 따라 튜브의 중앙에서 길이 방향의 단면 그림)

B.3 자속 밀도 B , 비행 시간 (ToF) 튜브의 반지름 R , 기본 상수, 그리고 측정한 양들 (트랙의 반지름 r 과 비행 시간 t) 으로 입자의 질량을 표현하시오. 1.7pt

네 개의 입자들을 감지하여, 이 입자들이 무엇인지 확인하려고 한다. 궤도 추적 감지기 내의 자속밀도는 $B = 0.500 \text{ T}$ 이다. 비행 시간 (ToF) 튜브의 반지름 R 은 3.70 m 이다. 측정값들은 아래와 같다. ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$)

입자	궤적의 반지름 r [m]	비행 시간 t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

B.4 각 입자의 질량을 계산하여 무슨 입자인지 알아내시오. 0.8pt