

General instructions: Theoretical Examination (30 points)

The theoretical examination lasts for 5 hours and is worth a total of 30 points.

Before the exam

You must not open the envelopes containing the problems before the sound signal indicating the beginning of the examination.

The beginning and end of the examination will be indicated by a sound signal. There will be announcements every hour indicating the elapsed time, as well as fifteen minutes before the end of the examination (before the final sound signal).

During the exam

- Dedicated answer sheets are provided for writing your answers. Enter the final answers into the appropriate boxes in the corresponding **answer sheet**. For every problem, there are extra blank **work sheets** for carrying out **detailed work**. Always use the work sheets that belong to the problem you are currently working on (check the problem number in the header). If you have written something on any sheet which you do not want to be graded, cross it out. Only use the front side of every page.
- In your answers, try to be as concise as possible: use equations, logical operators and sketches to illustrate your thoughts whenever possible. Avoid the use of long sentences.
- Please give an appropriate number of significant digits when stating numbers.
- You may often be able to solve later parts of a problem without having solved the previous ones.
- A list of physical constants is given on separate page.

You are not allowed to leave your working place without permission. If you need any assistance (need to refill your drinking water bottle, broken calculator, need to visit a restroom, etc.), please draw the attention of a team guide by lifting up one of the three flags into the air ("Refill my water bottle, please", "I need to go to the toilet, please", or "I need help, please" in all other cases).

At the end of the exam

- At the end of the examination you must stop writing immediately.

- For every problem, sort the corresponding sheets in the following order: problem sheets, answer sheets, work sheets and scratch paper.
- Put all the sheets belonging to one problem into the same envelope. Also put the general instructions into the remaining separate envelope. Make sure your student code is written on each envelope. Also hand in empty sheets. You are not allowed to take any sheets of paper out of the examination area.
- Leave the calculator provided by the organizers on the table.



Dark Matter

The first formal inference for the existence of dark matter was provided by Fritz Zwicky based on his observation on the dynamics of the Coma galaxy cluster, a cluster of galaxies that consist of about a thousand of galaxies. Zwicky used the Virial theorem to estimate the mass of the galaxy cluster. In a simple sun-planet system, where the planet revolves around the sun in a circular orbit, the Virial theorem states that the kinetic energy of the planet is exactly related to its gravitational potential energy. While in a general case for a system of many particles bounded by some interaction, the Virial theorem, relates the time average total kinetic energy with its time average total potential energy.

In 1933, based on his observation on the velocity of the galaxies near the edge of the Coma galaxy cluster, Zwicky estimated that the cluster has more mass than what was visually observed (i.e. the galaxies). The gravitational attraction from the observable matter (the galaxies) was too small to account for the velocities of the galaxies. Thus there must be some hidden masses that account for such a large velocity.

That hidden mass is the dark matter mass. In what follows, assume that the mass of each galaxy is the sum of its visible mass and the mass of the dark matter which moves together with that galaxy, and dark matter interacts with visible matter only gravitationally.

A. Cluster of Galaxies

Consider a cluster of galaxies consist of a large number N of galaxies and dark matter that are distributed homogeneously in a sphere of radius R with the total mass (galaxies and dark matters) of the cluster M . Assume that the average total mass (visible and dark matter) of a galaxy is m .

A.1	Assuming a continuous distribution of matter in the cluster, find the total gravitational potential energy of the cluster, in terms of M and R .	1.0 pt.
-----	--	---------

Due to cosmological expansion, any distance object will be moving away from an observer on Earth with a speed that depends on the distance from the observer to the object. A certain Lyman (a hydrogen emission spectral line) frequency from a type IA supernova on the i -th galaxy in the galaxy cluster is observed to be f_i , with $i = 1, \dots, N$, while the same corresponding Lyman frequency on Earth is f_0 .

A.2	Determine the average speed V_{cr} of the whole galaxy cluster moving away from the Earth in terms of f_i (with $i = 1, \dots, N$), f_0 and N . Note that a galaxy speed is very small compared to the speed of light c .	0.5 pt.
-----	--	---------

A.3	By assuming that the galaxies velocities with respect to the center of the cluster are isotropic (the same in all direction), determine the root-mean square speed v_{rms} of the galaxies with respect to the center of the cluster in terms of N , f_i (with $i = 1, \dots, N$), and f_0 . From this result determine the mean kinetic energy of a galaxy with respect to the center of the cluster in terms of v_{rms} and m .	1.5 pt.
-----	--	---------

To find the total mass of the cluster, one can use Virial theorem. The theorem stated that for a system of particles bounded by their conservative force,

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

where $\langle K \rangle_t$ is the time average total kinetic energy, $\langle U \rangle_t$ is the time average total potential energy, and γ is a constant. This theorem can be derived by assuming that for a system of particles bounded by its own interaction, the magnitudes of the position and momentum of each particle are finite, and thus the following quantity

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

is finite.

A.4	Using the fact that the time average over a long period of time of $d\Gamma/dt$ vanishes, $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$, determine γ in the Virial theorem above for the case of gravitational interaction. (Hint: Try to do the problem with the summation in Γ for a small finite number of galaxies).	1.7 pt.
A.5	From the previous results determine the total dark matter mass of the cluster in terms of N, m_g, R and v_{rms} , where m_g is the average total visible mass of a galaxy. Note that the root-mean square speed of the dark matter is the same as that of the galaxies.	0.5 pt.

B. Dark Matter in a Galaxy

Dark matter also exists inside and around a galaxy. Consider a spherical galaxy with a visible edge radius R_g (an approximate outermost distance where a large number of stars still visible, but note that a very small number of stars may still be distributed in the region beyond R_g). Assume that the stars in the galaxy are point particles with an average mass m_s . The stars in the galaxy, distributed homogeneously with a number density n , are assumed to move in circular orbits.

B.1	If the galaxy consists only of stars, find the speed $v(r)$ of a star as a function of its distance to the center of the galaxy and sketch $v(r)$ for $r < R_g$ and $r \geq R_g$.	0.8 pt.
-----	--	---------

The existence of dark matter can be inferred from the galaxy rotation curve, which is a plot of $v(r)$ obtained from observations. The figure below shows a common pattern of the galaxy rotation curve. You

may assume simplifyingly that $v(r)$ is a linear function for $r \leq R_g$ and a constant v_0 for $r > R_g$.

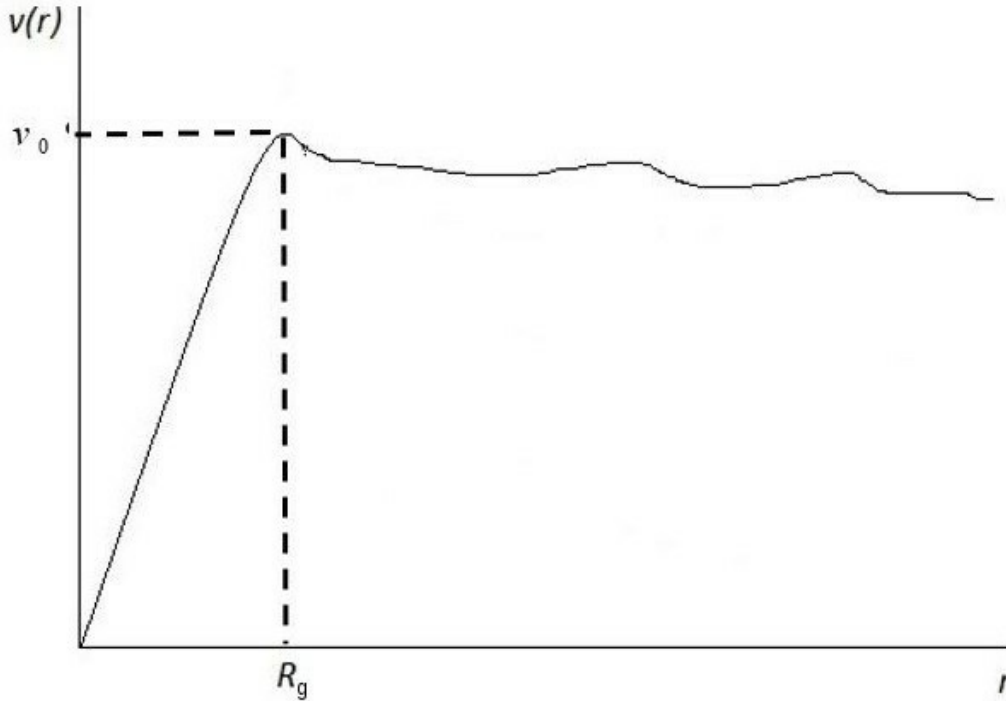


Fig. 1 Plot of galaxy rotation curve in a galaxy.

B.2	Find the total mass m_R of that part of the galaxy which lies within the sphere of radius R_g in terms of v_0 and R_g .	0.5 pt.
-----	---	---------

The discrepancy between the figure in B.2 and the plot obtained in B.1 indicates the existence of dark matter.

B.3	Determine the dark matter mass density as a function of r , R_g , v_0 , n , and m_s for $r < R_g$ and $r \geq R_g$.	1.5 pt.
-----	--	---------

C. Interstellar Gas and Dark Matter

Now consider a young galaxy whose mass is dominated by interstellar gas and dark matters (neglect the mass of the stars). The interstellar gas is assumed to consist of identical particles of mass m_p . The number density $n(r)$ and temperature $T(r)$ of the gas depend on the distance from the center of the galaxy r . Although many physical processes happen in the gas, we can assume the gas is in a hydrostatic equilibrium due to its pressure and the galaxy gravitational attraction.

C.1	Find the pressure gradient of the gas dP/dr , in terms of $m'(r)$, r and $n(r)$. Here, $m'(r)$ is the total mass of gas and dark matters within a sphere of radius r from the galaxy center.	0.5 pt.
-----	--	---------



C.2	Assuming the interstellar gas as an ideal gas, find $m'(r)$ in terms of $n(r)$, $T(r)$ and their derivatives with respect to r .	0.5 pt.
-----	---	---------

Next for simplicity assume that the gas is in isothermal distribution at temperature T_0 and the interstellar gas number density is given by

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

where α and β are some constants.

C.3	Find the dark matter mass density as a function of r inside the galaxy.	1.0 pt.
-----	---	---------



Earthquake, Volcano and Tsunami

Indonesia is the supermarket of natural hazards. Almost all of the natural hazards have occurred in Indonesia, such as volcano eruptions, earthquakes and tsunami.

A. Merapi Volcano Eruption



Merapi volcano in Yogyakarta is one of the most active volcano in Java. Pyroclastic flows are well-known eruption characteristics of the volcano. The pyroclastic flow is a hot mixture of gas and rock which travels away from a volcano. In October 26th, 2010, Merapi showed his explosive character by producing an ash plume that reached 12 km altitude (Fig. 1) and pyroclastic currents displacing more than 20,000 people around the volcano.

(Fig. 1: Pyroclastic cloud during Merapi eruption, Courtesy of Volcanological Office of Yogyakarta, BPPTKG)

Let us look at the causes of the largest eruption of Merapi in 2010. It is known by geophysicists that the influence of the external water into the magma plays an important role to the explosive behavior of volcanic eruptions (hydro magmatic eruptions). Let's assume that we dealt with a volcano as a system that consists of mixture of magmatic particles and water. The volcano vents structures and atmosphere are being boundary of the system. The explosive eruption is considered to be happening in two stages, (1) an instantaneous magma-water interaction, and (2) a system expansion. In the first stage, a mass of magma (m_m) at an absolute temperature (T_m) mixes with a mass of external water (m_w) at an absolute temperature (T_w). The thermal equilibrium is reached almost instantaneously. This interaction can be perceived as a nearly-constant volume process. Latent heat of evaporation of water and latent heat of melting of magma can be neglected.

A.1	Find the equilibrium temperature at the first stage in terms of the masses and heat capacity per unit mass of water c_{Vw} and magma c_{Vm} .	0.5 pt.
A.2	Determine its equilibrium pressure at the first stage by assuming that the mixture can be modeled as ideal gas. Assume that the volume per unit mole of the mixture is v_e .	0.3 pt.

The system expansion (the second stage) can occur through several possibilities, one of which is thermal detonation. Although such process is quite complicated, we can empirically measure the relative velocity of the erupted mixture. The velocity of gas during the eruption depend on the pressure p , the total mass m and the volume V of the mixture in the conduit of a volcano.

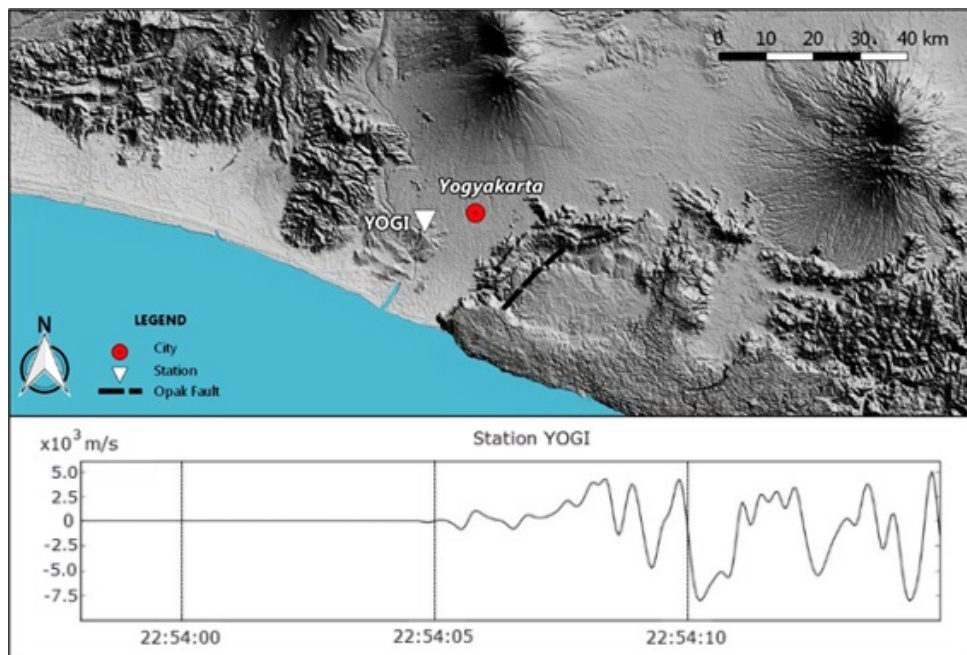
A.3	Express the velocity of gas during the eruption in terms of p , m , and V up to a proportional constant κ .	0.5 pt.
-----	--	---------

The observed pressure is around the order of 100 MPa. This makes the eruption (relative) velocity can be as large as ballistic velocity.

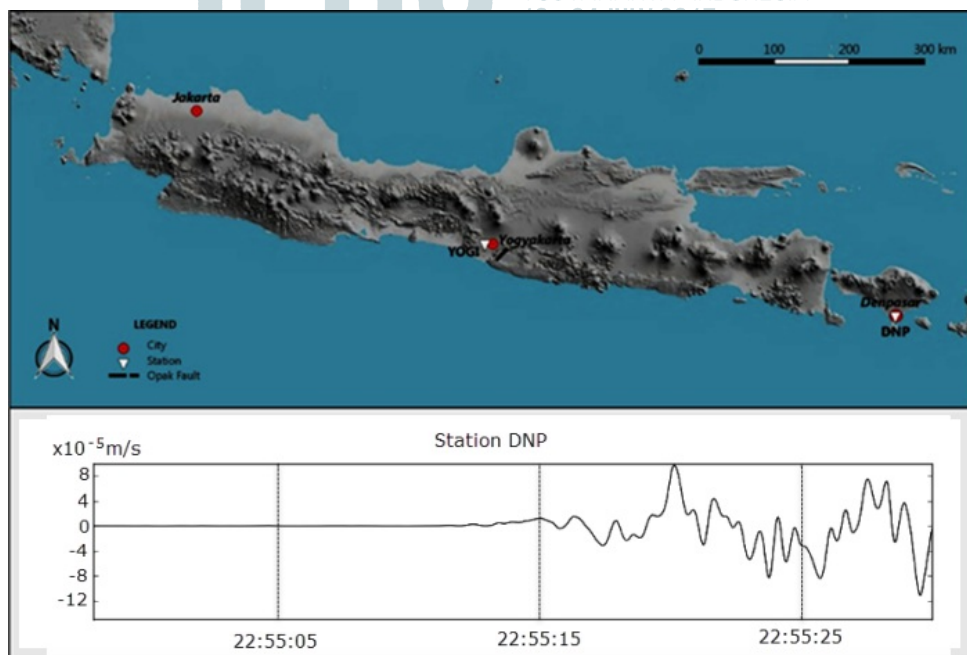
B. The Yogyakarta Earthquake

The 2006 Yogyakarta earthquake of magnitude $M_w = 6.4$, which destroyed many buildings in the Bantul and Yogyakarta area, occurred at 05:54:00.00 local time or 22:54:00.00 UTC. The earthquake was caused by a sudden displacement of the Opak fault segment (see Fig. 2). The hypocenter was located 15 km below the surface.

The seismic wave that propagates on the earth crust can be recorded using seismometer. The diagram from seismometer is called seismogram (Fig. 2 and 3, Lower graph). The seismograms represent the vertical ground velocity as a function of time recorded by the seismic station at Gamping Station Yogyakarta (YOGI) (Fig. 2) and Denpasar, Bali (DNP) (Fig. 3). In general, seismic wave consists of three wave types: the longitudinal or primary (P -wave), the transversal or secondary (S -wave), and the surface wave. The P -wave and S -wave travel in the subsurface while the surface wave travels along the Earth surface. Seismic waves traveling through subsurfaces to the stations can be divided into those that propagate in a straight line, those that are reflected by a layer's boundary, and those that are refracted into the next layer. The longitudinal wave or the primary wave has the highest velocity, while the surface wave has the lowest velocity, around 60% of the P -wave.



(Fig. 2: The maps location of YOGI)



(Fig. 3: The maps location of DNP (Denpasar))

The distance between the epicenter (the projection of hypocenter on the Earth surface) and the YOGI and DNP stations respectively are 22.5 km and 500 km. The depth of the Earth crust layer in Java, Indonesia, is 30 km. Beneath the Earth's crust is the Earth's mantle layer. Just like other wave phenomena, seismic wave also satisfies the Snell's law. The seismic wave can also be reflected by the mantle layer. In this problem we assume that the earth curvature is neglected.

B.1	Fig. 2 shows the seismogram at the YOGI station. Use the data to find the velocity of the P -wave in the Earth crust.	0.5 pt.
B.2	Find the travel time of the direct P wave and reflected wave due to the Yogyakarta earthquake that arrived at the DNP station in Denpasar.	0.6 pt.

By assuming that the Earth is composed of only two layers: the crust and the mantle, the primary wave propagates in the crust and in the mantle with different constant velocities. The velocity in the mantle is faster than in the crust. Note that P -wave refracted into the mantle at the right angle (90°) is being partly refracted back into the crust along its entire path of propagation along the crust-mantle boundary.

B.3	Find the velocity of the P -wave in the mantle.	1.2 pt.
-----	---	---------

For a more realistic Earth structure, the crust can be divided into a number of thin layers so that the velocity of the seismic wave is a function of the depth z according to $v(z) = v_0 + az$ where a is a constant and the hypocenter is approximated on the surface. In this model, the wave ray is curving.

B.4	Let us define the ray parameter $p = \sin \theta(z)/v(z)$, where $\theta(z)$ is the angle between the ray and the normal. Suppose a seismic wave arrives to the station with ray parameter p ; express the distance to the hypocenter in terms of p , v_0 , and a . Assume that the hypocenter is very close to the ground surface.	1.4 pt.
B.5	Find the travel time T from hypocenter to any station, in form of integral over z .	1.0 pt.

The earth consists of a stack of homogeneous layers with the velocity of each layer is v_i and the thickness of δz_i .

B.6	From the result of the previous problem, approximate the travel time (T) from the hypocenter to DNP station by assuming that the crust consists of only three discretized layers, ($i = 1, 2, 3$), characterized by $v_1 = 6.65$ km/sec, $v_2 = 6.97$ km/sec, $v_3 = 6.99$ km/sec, $p = 0.143$ sec/km, $\delta z_1 = 6.0$ km, $\delta z_2 = 9.0$ km, $\delta z_3 = 15$ km.	1.0 pt.
-----	--	---------

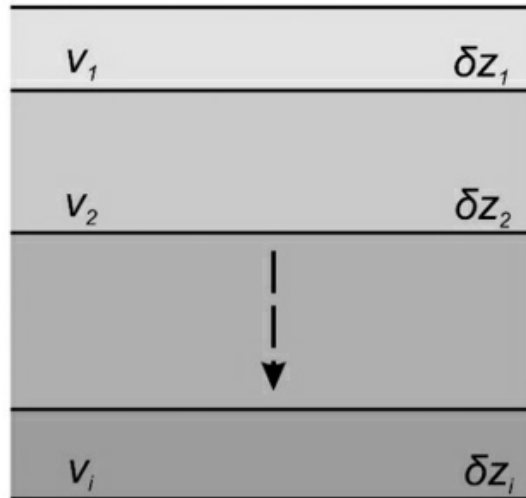


Fig. 4: A simplified model of earth's layers.

C. Java Tsunami

The 2006 Pangandaran earthquake and tsunami occurred on July 17 at 15:19:27 local time off the coast of west and central Java. During the earthquake where the epicenter fault is on the ocean floor, the fault may be displaced producing a remarkably large water wave called tsunami. In other words, a tsunami is a shallow-water wave which is initiated by a tiny amplitude, but with an extremely large wavelength. Consider a sudden fault causing a lifting of some ocean floor as shown in Fig. 5. Assume that the energy of the earthquake is transformed to the potential energy of this raised ocean water. For simple model we approximate that the raised water has a geometry of a box with its area of $\lambda L/2$ (where $L \gg \lambda$) and height of h .

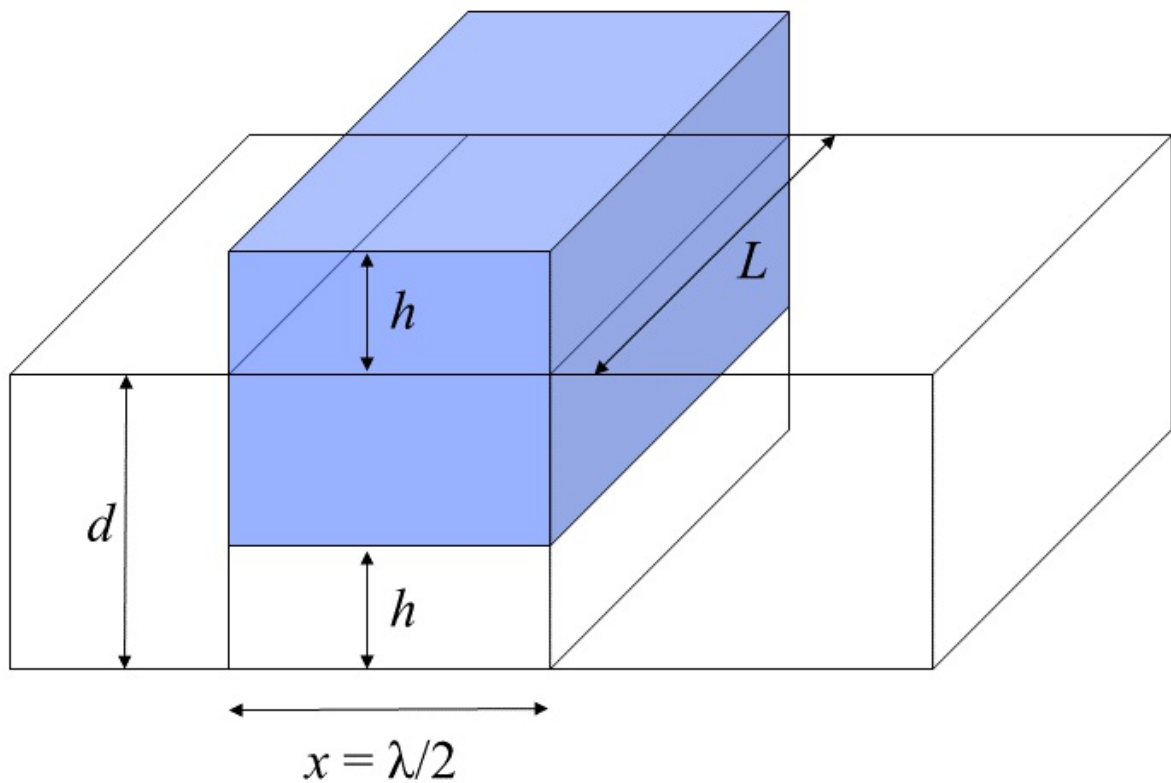


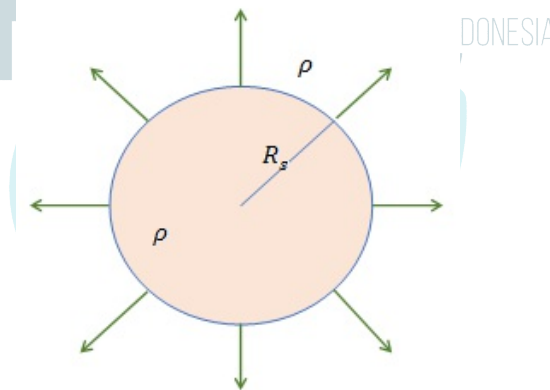
Fig. 5: Illustration for the tsunami wave d is the depth of the ocean.

C.1	Find the potential energy stored in the raised ocean water due to the earthquake with respect to ocean surface. Assume that the density of sea water is ρ .	0.5 pt.
C.2	Find the speed of tsunami wave up to dimensionless factor.	1.2 pt.
C.3	Using energy argument, determine the amplitude of the tsunami wave as a function of the depth, assuming that the depth varies slowly and also knowing that at a depth of d_0 the amplitude is A_0 .	1.3 pt.

Cosmic Inflation

Due to the relative movement of galaxies observed from the earth, the wavelength of visible spectrum of a particular galaxy differs from its original wavelength, which is known as the electromagnetic Doppler effect. One expects, for a collection of galaxies, to a random distributions of wavelength shifts: some positive (red shift) and some negative (blue shift). However, observations show that all, except for a nearby group of galaxies, are red shifted. This must be true even if the observation take place on different point in the universe. As a conclusion, our universe must be expanding. On the other hand local irregularity of the universe can be neglected on scales of more than 100 Mpc, in which 1 pc = 3.26 light-years. Averaged over large scales, the clumpy distribution of galaxies becomes more and more isotropic (independent of direction) and homogeneous (independent of position). Therefore we can assume the universe as a matter having a uniform mass density ρ and is expanding.

A. Expansion of Universe



For a simple model of our universe, let us consider an expanding uniform-density sphere embedded in a medium of a much larger sphere with the same density. Let say at some time, the radius of the smaller sphere is R_s . To express the expansion of the sphere, the time dependency of the radius $R(t)$ can be expressed by scale factor $a(t)$, that is $R(t) = a(t)R_s$.

Using Newton's law of gravity to evaluate velocity of a mass element on the sphere boundary according the model of our universe, one can obtain a set of Friedmann equations:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

where k a dimensionless constant, and c is velocity of light.

A.1	Determine the constant A_1 in the equation (1)	1.3 pt.
-----	--	---------

The discussion so far is non-relativistic. But in fact, it can be extended to a relativistic system by reinterpreting $\rho(t)c^2$ as total energy density (excluding the gravitational potential energy). In this relativistic system derives the 2nd Friedmann equation:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

using the 1st law thermodynamics of an adiabatic system, where p denotes the pressure on the sphere.

A.2	Determine the constants A_2 in the equation (2)	0.9 pt.
-----	---	---------

To solve Eqs. (1) and (2), one should assume a relation $p = p(\rho)$, such as $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, where w is a constant. There is also a factor $H = \dot{a}/a$ being called Hubble parameter. The present values of parameters are usually symbolized by subscript 0 such as t_0, ρ_0, H_0, a_0 and so on. For simplicity, we take $a_0 = 1$.

Universe is believed to start from a big explosion called Big-Bang that produces radiation of relativistic particles. During its expansion, the universe is cooling down and the particles in it become non-relativistic. However, the recent observations clarify that the present universe is dominated by cosmological constant energy density. For the case of photon, as the universe is expanding, the photon's wavelength expands proportionally to the scale factor.

A.3	For each of the following three cases determine the resulting value of w : (i) a universe filled only with radiation (i.e. photon energy), (ii) a universe filled only with non-relativistic matter and (iii) a universe with constant energy density.	1.2 pt.
A.4	In the case of $k = 0$, find $a(t)$ for each case of (i) to (iii) being mentioned in A.3. Use the initial condition $a(t = 0) = 0$ for case (i) and (ii), and use the condition $a_0 = 1$ for case (iii).	1.2 pt.

Constant k in Eq. (1) refers to classification of spatial geometry of the universe. Its value can be $k = +1$ for positive-curvature universe (closed), $k = 0$ for flat universe (infinite), and $k = -1$ for negative-curvature universe (open, infinite). Let define a density ratio $\Omega = \rho/\rho_c$, where $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ is critical energy density. Note that A_1 is obtained from problem A.1.

--	--	--

A.5	Express k in Eq.(1) in terms of Ω , H , a , and R_0 .	0.1 pt.
A.6	Find a range for Ω that corresponds to each value of $k = +1$, $k = 0$ and $k = -1$.	0.3 pt.

B. Motivation To Introduce Inflation Phase and Its General Conditions

The observation of cosmic microwave background radiation (CMB) suggests that our present universe is approximately flat. The problem is that if this is true then the present universe should start from exactly flat early universe, otherwise any deviation from the flatness will eventually grow over time and spoil the present flatness.

B.1	Find $(\Omega(t) - 1)$ as a function of time for the universe when it is dominated by radiation or non-relativistic matter (see problem A.3).	0.5 pt.
-----	---	---------

To solve the problem, at some early time in its history, the universe should undergo a constant energy density domination period which leads to an exponential expansion so called inflation period.

B.2	For this constant energy density domination period, find $(\Omega(t) - 1)$ as a function of time. Assume that $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0.3 pt.
B.3	Show that condition for inflation implies several following conditions: negative pressure, accelerated expansion ($\ddot{a} > 0$), and decreasing Hubble radius ($d(aH)^{-1}/dt < 0$).	0.9 pt.
B.4	Show that the condition of decreasing Hubble radius can be expressed in terms of parameter $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ as $\epsilon < 1$.	0.2 pt.

Inflation occurs as long as $\epsilon < 1$ and then ends when $\epsilon = 1$. We can define e-folding number N , such that $dN = d \ln a = H dt$ and $N = 0$ at the end of inflation.

C. Inflation Generated by Homogenously Distributed Matter

As an example of simple physical system that can generate period of inflation is a universe dominated by homogenously distributed matter. This kind of matter is called inflaton and can be characterized by a function $\phi(t)$.

The dynamical equation of the matter can be expressed as

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

where $V = V(\phi)$ is a potential function and $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. The Hubble parameter satisfies

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

with M_{pl} is a constant called the reduced Planck mass. Inflation phase occurs during domination of potential energy V over kinetic energy $\dot{\phi}^2/2$ for sufficient time such that $\ddot{\phi}$ term in equation (3) can be neglected. This condition is called slow-roll approximation.

The quantities ϵ and $\eta_V = \delta + \epsilon$, where $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$, are called 'slow-roll' parameters.

C.1	Estimate parameter ϵ , parameter η_V , $dN/d\phi$ in terms of potential $V(\phi)$ and its first and second derivative (V' and V'').	1.7 pt.
-----	---	---------



D. Inflation with A Simple Potential

Predictions of any inflation model should be compared to observational constraints from CMB as follow $n_s = 0.968 \pm 0.006$ and $r < 0.12$, where $r = 16\epsilon$ and $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ are evaluated at $\phi = \phi_{start}$ for inflation model being generated by a dominant matter. Assume that potential of matter takes a simple form $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ where n is any integer and Λ is a constant.

D.1	Calculate ϕ_{end} at the end of inflation.	0.5 pt.
D.2	Express r and n_s in terms of e-folding number N and integer n . Estimate the value of n that is closest to observational values r and n_s . Take $N = 60$ in your calculation.	0.9 pt.



일반적인 지시사항 : 이론 시험 (30점)

이론 시험은 5시간 동안 진행되며 총 30점 입니다.

시험 시작 전

시험 시작을 알리는 신호 벨이 울리기 전에 문제가 들어있는 봉투를 열어서는 안됩니다.

시험의 시작과 끝은 벨 소리로 알립니다. 매 시간 마다 경과된 시간을 알릴 것이며, 시험 종료를 알리는 벨 소리가 울리기 15분 전에도 알려줄 것입니다.

시험 응시 중

답안을 쓰는 전용 답안지가 각 문제당 제공됩니다. 최종 답안을 해당 문제의 답안지의 적절한 박스에 기입하오. 각각의 문제에 대해, 자세한 풀이는 계산 용지(work sheet)를 이용하시오. 계산 용지를 사용할 때에는 자신이 현재 풀고 있는 문제에 해당되는 계산 용지를 사용하시오. (상단에 문제 번호를 체크하시오.) 기록한 내용 중 채점이 되지 않기를 원하는 것은 X표시를 하십시오. 각 계산 용지의 앞면만 활용하십시오.

- 풀이과정을 작성할 때 간결하고 명확하게 작성하세요. 방정식을 사용하거나 논리 연산자를 사용하고, 생각하는 내용을 가능한 간단하게 작성하거나 스케치 하세요. 긴 문장을 쓰는 것을 피하세요.
- 숫자를 표시할 때에는 알맞은 유효숫자로 답해야 합니다.
- 전 단계의 문제를 풀지 못했다하더라도, 다음 단계의 문제를 풀 수 있습니다.
- 물리 상수의 목록은 분리된 페이지로 제공됩니다.

허가 없이 시험장소를 떠날 수 없습니다. 도움이 필요하면(마실 물을 보충할 경우, 계산기가 고장난 경우, 화장실에 가야하는 경우, 등) 세 개의 깃발 중 하나를 홀더에 끼워 감독관에게 알려주기 바랍니다. (“마실 물을 보충하고자 합니다.”, “화장실에 가려고 합니다.”, 다른 모든 경우에는 “도움이 필요합니다.”)

시험 종료 후

- 시험이 끝나는 즉시 답안 작성을 중지해야 합니다.
- 각 문제에 대해 작성한 종이의 순서를 다음 같이 정렬합니다. 문제지, 답안지, 계산 용지와 X표시 한 종이.
- 한 문제와 관련된 모든 종이는 같은 봉투에 넣으세요. 일반적인 지시사항은 여분 봉투에 넣으세요. 각 봉투에 학생 코드를 꼭 기입하세요. 또한, 빈 종이도 모두 제출하세요. 시험장 바깥으로 어떠한 종이도 반출되어서는 안됩니다.
- 조직위원회에서 제공받은 계산기는 테이블 위에 두고 가세요.

일반적인 데이터 시트

진공에서의 빛의 속도

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

진공에서의 투자율 (자기 상수)

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$$

진공에서의 유전율 (유전 상수)

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$$

기본 전하량

$$e = 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$$

전자의 질량

$$m_e = 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$= 0.510\,998\,946\,1(31) \text{ MeV}/c^2$$

양성자의 질량

$$m_p = 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$= 938.272\,081\,3(58) \text{ MeV}/c^2$$

중성자의 질량

$$m_n = 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$= 939.565\,413\,3(58) \text{ MeV}/c^2$$

원자 질량 단위 (Unified atomic mass unit)

$$u = 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$$

리드베리 상수

$$R_\infty = 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$$

중력상수(Universal constant of gravitation)

$$G = 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

중력 가속도

$$g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

플랑크 상수

$$h = 6.626\,070\,040\,(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

아보가드로 수

$$N_A = 6.022\,140\,857\,(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

기체 상수

$$R = 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

(Molar gas constant)

몰 질량 상수

$$M_u = 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

(Molar mass constant)

볼츠만 상수

$$k_B = 1.380\,548\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

슈테판-볼츠만 상수

$$\sigma = 5.670\,367\,(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$$

프리츠 츠위키는 약 천 개의 은하로 이루어진 코마 은하단의 운동을 관측함으로써 암흑 물질의 존재를 처음으로 추측하였다. 그는 코마 은하단의 질량을 추정하기 위해 비리얼 정리를 사용하였다. 행성이 별 주위의 원궤도를 따라 도는 간단한 별-행성 계에서는 비리얼(Virial) 정리를 이용하여 행성의 운동 에너지로부터 그 행성의 중력 퍼텐셜 에너지를 정확히 알 수 있다. 또한 서로 상호 작용하며 속박된 여러 입자로 이루어진 다체계의 경우에도 비리얼 정리를 이용하여 전체 운동 에너지의 시간 평균으로부터 전체 퍼텐셜 에너지의 시간 평균을 알 수 있다.

1933년 츠위키는 코마 은하단의 가장자리에 위치한 은하들의 속도를 관측하고 그로부터 추정한 은하단의 총 질량이 실제 관측되는 질량을 다 더한 것보다 더 크다는 것을 발견했다. 은하단 내에서 관측되는 은하들이 가장 자리에 위치한 은하를 끌어 당기는 중력이, 관측된 은하의 운동 속도를 설명하기에는 너무 작아서 어떤 숨겨진 질량들이 있어야 그러한 큰 속도를 설명할 수 있었다. 이 숨겨진 질량이 바로 암흑 물질(dark matter)의 질량이다. 아래에서 개별 은하의 질량은 관측가능한 가시(visible) 물질의 질량과 그 은하와 같이 운동하는 암흑 물질의 질량을 더한 값을 지칭하며 암흑 물질과 가시 물질 사이에는 중력만 작용 한다.

A. 은하단

반지름 R 인 구 안에 균일하게 분포한 N 개의 점으로 볼 수 있는 은하들과, 은하들 사이 공간에 균일하게 분포한 암흑 물질로 이루어진 하나의 은하단을 고려하자. 이 은하단의 전체(은하들과 암흑 물질) 질량을 M 이라 하자. N 은 매우 큰 수이고, 은하 하나의 질량(가시 물질과 암흑 물질 질량의 합)은 m 이다.

A.1	은하단 내의 물질이 연속적으로 분포한다고 가정하고, 전체 중력 퍼텐셜 에너지를 M 과 R 로 나타내시오. 중력상수는 G 라고 하자.	1.0 pt.
-----	---	---------

우주의 팽창으로 인해, 멀리 떨어진 천체는 지구의 관찰자로부터 멀어지게 되는데, 이 때 천체의 속력은 관측자와 천체 사이의 거리에 의존한다. 수소의 라이만 계열 스펙트럼에 속하는 어떤 방출선의 진동수가 지구에서 측정할 때 f_0 이고, 은하단의 i 번째 은하에 속한 IA형 초신성으로부터 나오는 같은 방출선의 진동수가 f_i ($i = 1, \dots, N$)로 관측된다고 하자.

A.2	전체 은하단이 지구로부터 멀어지는 속력, 은하들 속력의 평균 V_{cr} 을 f_i ($i = 1, \dots, N$), f_0 , N 으로 나타내시오. 단, 은하가 멀어지는 속력은 빛의 속력 c 에 비해서 매우 작다.	0.5 pt.
-----	--	---------

A.3	은하단의 중심에 대한 여러 은하들의 속도가 등방적(isotropic, 모든 방향에 대해 같음)을 가정하고, 은하단 중심에 대한 여러 은하 속력들의 제곱-평균-제곱근 속력(root-mean square speed) v_{rms} 를 N , f_i ($i = 1, \dots, N$), f_0 로 나타내시오. 은하단의 중심에 대한 은하의 평균 운동 에너지를 v_{rms} 와 m 으로 나타내시오.	1.5 pt.
-----	---	---------

은하단의 전체 질량을 구하기 위해 다음과 같은 비리얼 정리를 이용할 수 있다. 보존력이 작용하여 속박되어 있는 여러 입자들로 이루어진 계에 대해 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

여기서 $\langle K \rangle_t$ 은 전체 운동에너지의 시간 평균, $\langle U \rangle_t$ 는 전체 퍼텐셜 에너지의 시간 평균이며, γ 는 상수이다.

구성 입자 사이에 작용하는 자체적인 힘에 의해 속박된 입자계가 있을 때, 각 입자의 위치와 운동량의 크기가 유한하고 따라서 다음 물리량 역시 유한하다는 가정으로부터 비리얼 정리를 유도할 수 있다.

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

A.4	충분히 긴 시간 동안 $d\Gamma/dt$ 을 평균하면 $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$ 이 된다는 사실을 이용하여, 중력 상호작용의 경우 위의 비리얼 정리에서의 상수 γ 값을 구하시오. (힌트: Γ 에서 은하의 수가 작은 경우 즉 더하는 항의 수가 몇 개 안되는 경우에 대해 해보면 도움이 될 수 있음.)	1.7 pt.
A.5	앞의 결과로부터 은하단 내의 전체 (은하 내부와 은하사이) 암흑 물질의 질량을 N, m_g, R, v_{rms} 로 표현하시오. 여기서 m_g 는 하나의 은하 내에 존재하는 가시 물질의 질량이며, 암흑 물질의 제곱-평균-제곱근 속력은 은하의 그것과 같다.	0.5 pt.

B. 한 은하에서의 암흑 물질

암흑 물질은 개별 은하의 내부와 그 주위에도 존재한다. 어떤 구형 은하의 가시(visible) 반지름을 R_g 라 하자(많은 수의 별들이 관찰되는 가장 먼 거리; 매우 작은 갯수의 별들이 여전히 그 바깥에 분포할 수 있음). 은하 내의 별은 평균 질량이 m_s 인 점 입자이며, 갯수 밀도 n 으로 균일하게 분포되어 있고, 은하의 가운데를 중심으로 하는 원궤도를 따라 움직인다고 가정하자.

B.1	이 은하가 별들만으로 구성되어 있다고 할 때, 은하의 중심으로부터의 거리 r 이 $r < R_g$ 과 $r \geq R_g$ 인 경우에 대해 별의 속력 $v(r)$ 을 거리 r 의 함수로 구하시오. $v(r)$ 을 거리에 대해 그래프로 그리시오.	0.8 pt.
-----	---	---------

어떤 은하에 대해 $v(r)$ 을 관측한 결과를 그래프로 그린 은하 회전 곡선으로부터 암흑 물질의 존재를 추정할 수 있다. 아래 그림은 은하 회전 곡선의 일반적인 형태이다. $v(r)$ 을 단순화하여 $r \leq R_g$ 에서는 선형 함수로, $r > R_g$ 에서는 상수 v_0 로 근사한다.

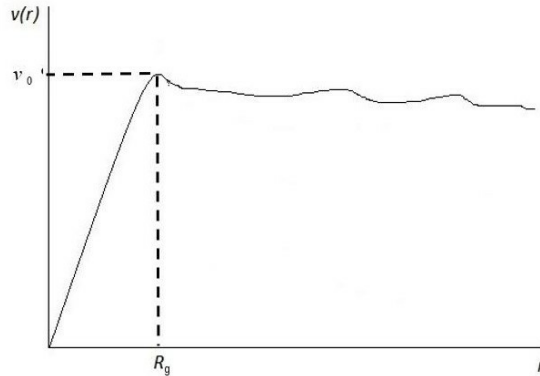


Fig. 1 한 은하에 대한 은하 회전 곡선

B.2	은하 중심으로부터 거리가 R_g 인 구(sphere) 영역 내부의 전체(별과 암흑 물질) 질량 m_R 을 v_0 와 R_g 로 나타내시오.	0.5 pt.
-----	---	---------

B.2의 그림과 B.1에서 구한 그래프가 서로 일치하지 않는다는 사실이 암흑 물질이 존재함을 나타낸다.

B.3	암흑 물질의 질량 밀도를 $r < R_g$ 와 $r \geq R_g$ 인 영역에서 각각 r, R_g, v_0, n, m_s 의 함수로 구하시오.	1.5 pt.
-----	--	---------

C. 성간 기체와 암흑 물질

갓 생성되어 별이 거의 없는 젊은 은하의 질량은 성간 기체와 암흑 물질의 질량의 합으로 생각할 수 있다(별들의 질량은 무시). 성간 기체는 질량이 m_p 인 동일 입자들로 구성되어 있으며, 갓수 밀도 $n(r)$ 과 온도 $T(r)$ 은 은하의 중심에서부터의 거리 r 에 의존한다. 기체 내에서 다양한 물리적 과정들이 일어나지만, 성간 기체는 기체의 압력과 은하에 의한 중력이 평형을 이루는 액체 정역학적 평형 상태에 있다고 생각할 수 있다.

C.1	성간 기체의 압력 기울기(gradient) dP/dr 을 $m'(r), r, n(r)$ 로 나타내시오. 여기서 $m'(r)$ 은 은하 중심으로부터의 거리 r 이내에 존재하는 기체와 암흑 물질의 질량의 합이다.	0.5 pt.
-----	--	---------

C.2	성간 기체를 이상 기체로 가정할 때, $m'(r)$ 을 $n(r), T(r)$ 과 이 물리량들의 r 에 대한 미분들로 표현하시오.	0.5 pt.
-----	--	---------

성간 기체가 온도 T_0 인 등온 분포(위치에 관계 없이 온도가 같은 분포)를 하고 있을 때, 성간 기체의 갯수 밀도는 다음과 같이 주어진다.

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

여기서 α 와 β 는 상수이다.

C.3	은하 내부에서 암흑 물질의 질량 밀도를 은하 중심으로부터의 거리 r 의 함수로 구하시오.	1.0 pt.
-----	---	---------

지진, 화산과 쓰나미

인도네시아는 자연재해의 슈퍼마켓과 같다. 화산 분출, 지진, 쓰나미와 같은 거의 대부분의 자연재해가 인도네시아에서 발생했다.

A. 메라피 화산의 분출



욕야카르타의 메라피 화산은 자바섬에서 가장 활동적인 화산중의 하나이다. 화산 쇄설류는 화산의 대표적인 분출 특성이다. 화산 쇄설류는 화산에서 분출되어 이동하는 뜨거운 기체와 암석의 혼합물이다. 2010년 10월 26일 메라피 화산은 그림 1과 같이 고도 12km에 달하는 화산재 구름을 만들며 폭발하였고, 쇄설류로 인해 20,000 명 이상의 사람들을 대피시켜야 했다.

(Fig. 1: 메라피 화산 분출로 인한 화산 쇄설암 구름, Courtesy of Volcanological Office of Yogyakarta, BPPTKG)

2010년 발생한 메라피 화산 분출의 원인을 살펴보자. 지질학자들은 외부에서 마그마로 유입된 물의 영향이 화산 분출의 폭발적인 양상(수화 마그마 분출)에서 중요한 역할을 한다는 것을 알게 되었다. 화산을 마그마 입자와 물의 혼합물로 구성된 계로 가정할 때 화산 배출 구조와 대기는 계의 외부 경계를 이룬다. 화산 폭발은 다음과 같은 두 단계에 걸쳐 발생한다. (1) 순간적인 마그마와 물의 반응, (2) 계의 팽창. 첫번째 단계에서 절대온도 T_m , 질량 m_m 의 마그마가 절대온도 T_w , 질량 m_w 인 물과 혼합된다. 열적 평형이 즉각적으로 이루어져 이 과정에서 부피가 일정하게 유지되며 물의 기화 잠열(latent heat)과 마그마의 용융(melting) 잠열은 무시한다.

A.1	첫번째 단계에서 평형 온도를 물의 비열 c_{Vw} 과 마그마의 비열 c_{Vm} 로 나타내시오.	0.4 pt.
A.2	물과 마그마의 혼합물을 이상기체로 가정하고, 혼합물의 단위 몰당 부피가 v_e 일 때 첫번째 단계에서의 평형 압력을 구하시오.	0.3 pt.

두번째 단계인 계의 팽창은 여러 원인에 의해 발생할 수 있는데 그 중 하나가 열적 폭발이다. 이것이 매우 복잡한 과정이지만 분출 혼합물의 상대 속도를 실험적으로 측정하여 분출하는 기체의 속도가 압력 p , 화산 분출 통로 내에서 혼합물의 질량 m 과 부피 V 의 적당한 지수곱으로 주어짐을 알 수 있다.

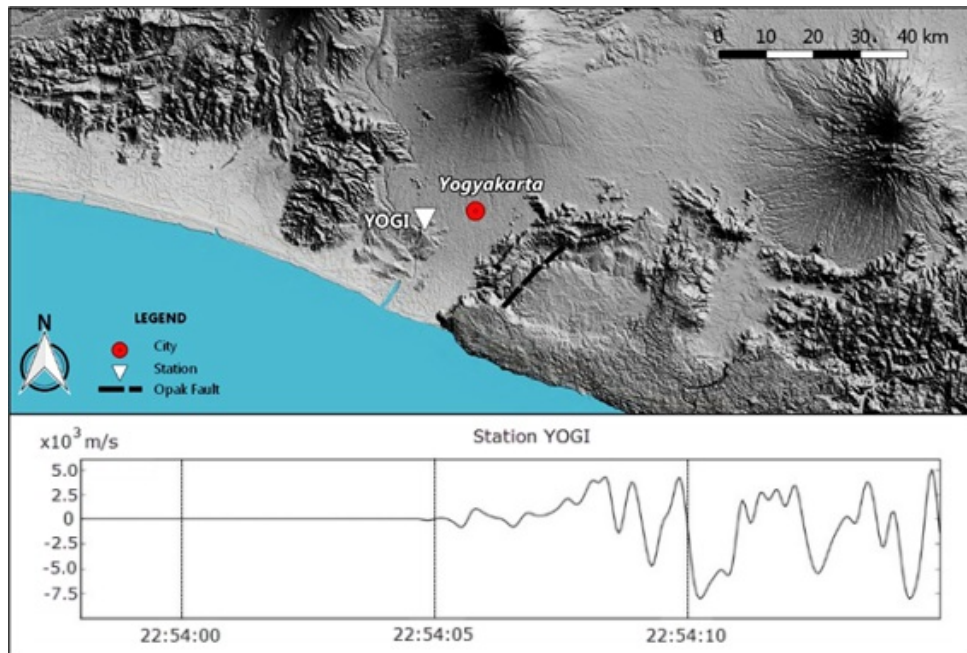
A.3	화산 분출 동안 가스의 속도를 p, m, V 와, 비례상수 κ 를 사용하여 나타내시오.	0.3 pt.
-----	---	---------

관측된 압력은 약 100 MPa 정도이며 이는 분출 (상대) 속도가 분출물이 하늘로 솟구칠 수 있을 정도가 되게 만든다.

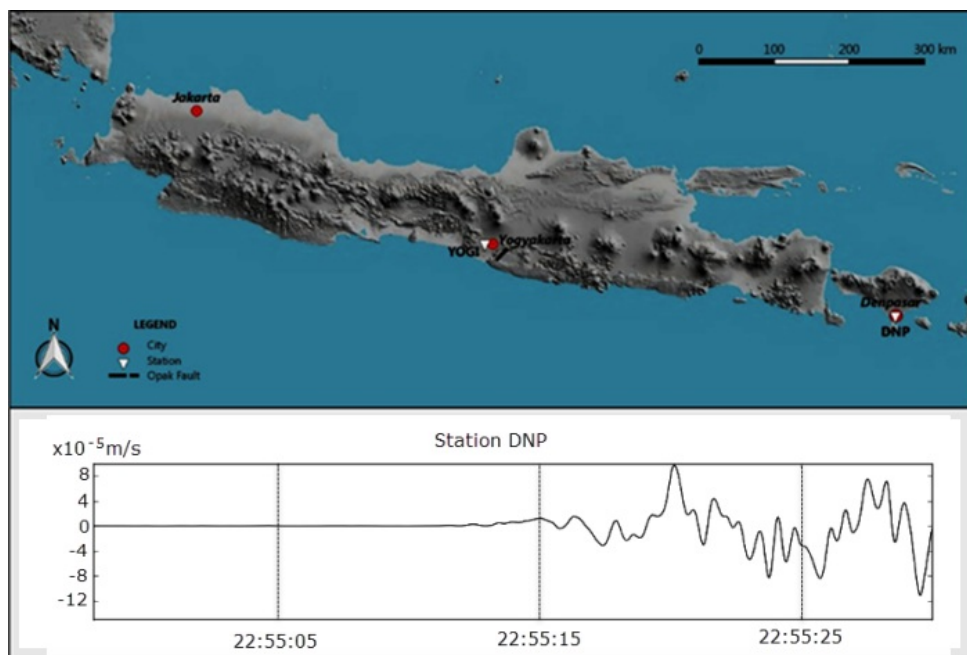
B. 욕야카르타 지진

2006년 현지시각 오전 5시 54분(또는 세계표준시 22:54)에 반톨과 욕야카르타 지역의 많은 건물을 파괴한 진도 $M_w = 6.4$ 의 지진이 발생했다. 지진은 그림 2와 같이 Opak 단층 부분의 갑작스런 움직임에 의해 발생했다. 진원 (지진의 발생 위치, hypocenter)은 지표면 15 km 아래 위치했다.

지각(earth crust. 지구 껍질)을 따라 전파하는 지진파는 지진계를 이용해 기록할 수 있다. 그림2, 3의 하단 그래프와 같은 지진계를 이용해 측정한 그림을 진동도(seismogram)라 부른다. 그림 2의 진동도는 욕야카르타 캄핑역의 지진계(YOGI)에서 측정한 것으로, 시간에 따른 지표면의 수직 방향 속도를 나타내며 그림 3은 발리 덴파사르 지진계의 진동도를 나타낸다. 일반적으로 지진파는 세 종류의 파로 구성되어 있다. 종축(longitudinal) 방향(지진 전파 방향)으로 진동하는 P (primary)파, 횡축(transversal) 방향(지진 전파 방향에 수직)으로 진동하는 S 파, 그리고 표면파이다. 표면파는 지표에서만 전파되는 반면 P 파와 S 파는 지표 아래에서 전파된다. 지표 아래를 통해 관측소에 도달한 지진 파는 진원으로부터 관측소까지 직선으로 직접 도달한 파와 경계면에서 반사된 파, 그리고 아래 층으로 굴절되어 어느 정도 거리를 진행하였던 파로 나눌 수 있다. P 파가 가장 빠르며, 표면파가 가장 느린데 표면파의 속도는 P 파의 60% 정도이다.



(그림 2: 욕야카르타 캠핑역에 있는 YOGI의 지도상 위치)



(그림 3: 발리 덴파사르에 있는 DNP의 지도상 위치)

진앙(epicenter, 진원을 지표면에 수직으로 투영한 점)으로부터 욱야카르타 관측소(YOGI)까지의 거리는 22.5 km이고, 발리 덴파사르 관측소(DNP)까지의 거리는 500 km이다. 인도네시아 자바에서 지각(지표면 껍질)의 두께는 30 km 이다. 지각 아래에는 지구의 맨틀 층이 있다. 다른 파동의 현상과 같이 지진파 역시 스넬의 법칙(snell's law)을 만족하며 지각과 맨틀 층의 경계면에서 반사도 될 수 있다. 이 문제에서 지구의 곡률 반경은 무시하고 평평한 것으로 가정한다.

B.1	그림 2는 욱야카르타 관측소 YOGI의 진동도를 보여준다. 이 데이터를 이용하여 지각에서 P 파의 속도를 구하시오.	0.5 pt.
B.2	욕야카르타 지진에 의해 발생되어 발리 덴파사르 관측소 DNP에 도달한 P 파 중, 직선으로 직접 도달한 파와 한번 반사되어 도달한 파의 이동 시간을 각각 계산하시오.	0.6 pt.

지구가 지각과 맨틀 두 개의 층으로만 구성되어 있다고 가정하면, P 파는 지각 층과 맨틀 층에서 각각 다른 속도로 전파된다. 지각 맨틀 경계면을 따라 전파되는 P 파의 속도는 맨틀 층 내에서의 속도와 동일하다. 맨틀 층에서 전파 속도는 지각 층에서의 전파 속도보다 빠르다. 지각 층에 있는 진앙으로부터 맨틀층으로 굴절되어 진행하는 P 파 중 굴절각이 90° 인 파는 지각-맨틀의 경계면을 따라 진행하는 동안에 일부가 다시 지각 층으로 굴절되어 진행한다.

B.3	맨틀 층에서 P 파의 전파 속도를 구하시오.	1.2 pt.
-----	----------------------------	---------

좀더 현실적인 지구 내부 구조를 고려하기 위해 지각이 여러 개의 얇은 층으로 나누어져 있다고 가정한다. 이 경우 지진파의 속도는 깊이 z 에 따라 $v(z) = v_0 + az$ 로 변화하며 a 는 상수이다. 진원이 근사적으로 지표면에 위에 있다고 가정하자. 이 모델에서 지진파는 휘어진 궤적을 따라 진행한다.

B.4	지진파의 경로 매개변수(ray parameter)로 $p = \sin \theta(z)/v(z)$ 라고 정의하자. 여기서 $\theta(z)$ 는 지진파 경로와 연직선 사이의 각도이다. 지진파가 관측소에 도달할 때 경로 매개변수가 p 라 하자. 진원으로부터 관측소까지의 거리를 p , v_0 그리고 a 로 나타내시오. 진원은 지표면에 매우 가까이 있음에 유의하시오.	1.4 pt.
B.5	지각의 두께가 주어질 때 진원에서 관측소까지 지진파가 이동하는데 걸리는 시간 T 를 깊이(지각 내에서의 수직 좌표) z 에 대한 적분형태로 나타내시오.	1.0 pt.

지구는 균일한 여러 층으로 이루어져 있으며 각 층에서 지진파의 전파 속도는 v_i 이며, 각 층의 두께는 δz_i 이다.

B.6	앞 문제의 결과로부터 지구가 3개의 균일층($i = 1, 2, 3$)으로 구성되어 있다고 가정할 때, 지표면상의 진원으로부터 덴파사르 DNP 관측소까지의 전달시간 (T)를 근사적으로 어림하여 구하시오. 여기서는 지구가 3개의 층으로 구성되어 있고 각 층의 특성은 다음 상수들로 주어진다고 가정하시오. $v_1 = 6.65 \text{ km/sec}$, $v_2 = 6.97 \text{ km/sec}$, $v_3 = 6.99 \text{ km/sec}$, $p = 0.143 \text{ km/sec}$, $\delta z_1 = 6.0 \text{ km}$, $\delta z_2 = 9.0 \text{ km}$, $\delta z_3 = 15 \text{ km}$.	1.0 pt.
-----	--	---------

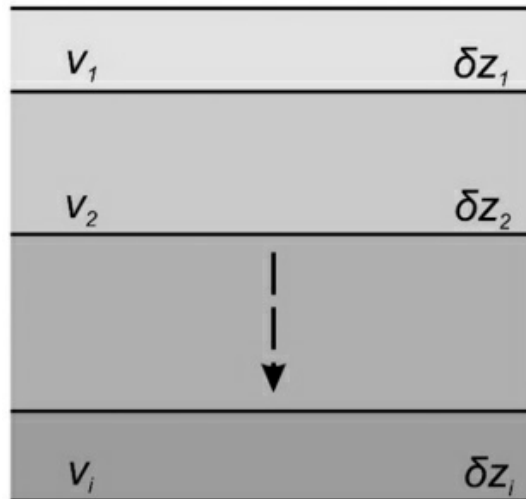


그림 4: 지구 내부를 단순화 하여 그린 모델

C. 자바 쓰나미

2006년 7월 17일 현지시간 15시 19분 27초에 자바섬 중서부 해안에서 떨어진 바다에서 판간다란 지진과 쓰나미가 발생했다. 해저의 지각 단층아래 위치한 진원으로부터 발생한 지진은 쓰나미라 불리는 거대한 수면파를 일으켰다. 즉, 쓰나미는 작은 진폭이지만 굉장히 큰 파장을 가진 파동으로부터 시작되는 얇은 수면파이다. 그림 5와 같이 해저면을 들어올리는 갑작스러운 단층을 고려하시오. 지진 에너지는 들어올려진 바닷물의 퍼텐셜 에너지로 전환되었다고 가정하시오. 단순한 모델을 위해 들어올려진 바닷물이 $\lambda L/2$ (where $L \gg \lambda$)의 넓이와 h 의 높이를 가진 상자 형태로 어림하자.

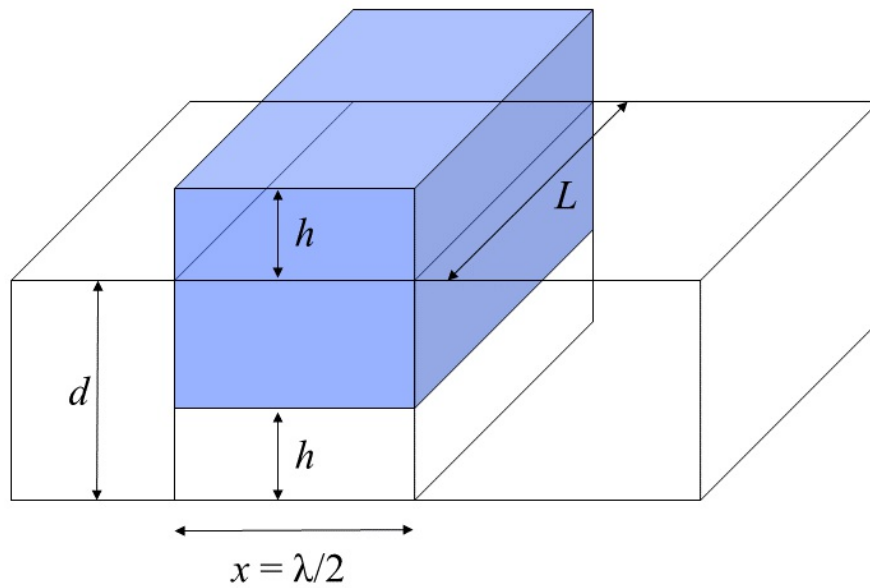


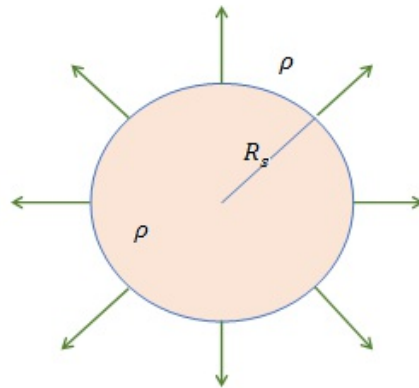
그림 5: 깊이 d 의 해양에서 수면 높이 h 를 가진 쓰나미 모양 그림

C.1	바닷물의 밀도를 ρ 라 할 때, 지진으로 인해 해수면으로부터 들어올려진 바닷물에 저장된 퍼텐셜 에너지를 구하시오.	0.4 pt.
C.2	쓰나미 파동의 속도를 구하시오. 차원이 없는 상수 (up to dimensionless factor)를 포함할 수도 있음.	1.2 pt.
C.3	에너지를 고려하여 쓰나미 파의 진폭을 깊이의 함수로 구하시오. 바다의 깊이가 천천히 변화하고 깊이가 d_0 일 때, 진폭이 A_0 라고 가정하시오.	1.3 pt.

우주의 급팽창

지구에서 관측된 은하계의 상대적인 운동때문에 특정 은하로부터 지구에서 관측된 가시광선 스펙트럼의 파장은 원래의 파장과 다른데, 이것은 전자기적인 도플러 효과로 알려져 있다. 여러 은하들을 관찰한다면 은하로부터 방출되는 가시광선 스펙트럼의 파장 변화는 랜덤한 분포를 갖을 것이다. (일부는 파장이 길어진 적색 변이, 일부는 파장이 짧아진 청색 변이) 그러나 가까운 은하계 그룹을 제외하면 모든 관측 결과들은 적색으로 변이되었다. 이 사실은 우주의 다른 지점에서 관찰을 하더라도 동일하다. 결론적으로는 우주는 팽창하고 있다는 것이다. 한편 우주의 국소적 균질성의 변화는 100 Mpc 이상의 스케일에서는 무시될 수 있다. 이때, $1\text{pc} = 3.26$ 광년이다. 더 큰 스케일에서 평균하면 은하들의 분포는 방향과 무관하게 점점 더 등방적이고 위치와 무관하게 균일해진다. 그러므로 우리는 우주를 단일한 질량 밀도 ρ 를 가지며 팽창하고 있는 물질로 가정할 수 있다.

A. 우주의 팽창



우리 우주의 간단한 모형으로, 무한히 큰 구형의 매질 내에 팽창하는 작은 구를 생각하자. 구와 매질의 밀도는 같다. 어떤 시간에, 작은 구의 반지름이 R_s 이고 구의 반지름이 시간에 따라 $R(t) = a(t)R_s$ 의 형태로 증가한다고 하자. 여기서 $a(t)$ 는 척도 인자(scale factor)이다.

위의 모형에서 뉴턴의 중력 법칙을 이용하여 구의 경계에 있는 질량 요소의 속도를 계산하면, 아래의 프리드만 방정식(Friedmann equations)을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

여기서 k 는 차원이 없는 상수이며, c 는 빛의 속력이다.

A.1	식 (1)에서 상수 A_1 을 구하시오.	1.3 pt.
-----	--------------------------	---------

지금까지의 논의가 비상대론적이기는 하지만 $\rho(t)c^2$ 이 중력 퍼텐셜 에너지를 제외한 전체 에너지 밀도라고 해석하면 상대론적인 논의로 확장될 수 있다. 이 상대론적인 계에서 단열 팽창하는 고립계에 대해 열역학 제 1법칙을 이용하면, 2번째 프리드만 식을 유도할 수 있다. 여기서 c 는 광속이고 p 는 구에서의 압력이다.

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

A.2	식 (2)에서 상수 A_2 를 구하시오.	0.9 pt.
-----	--------------------------	---------

식 (1)과 식 (2)를 풀기 위해서는 $p(t)/c^2 = w\rho(t)$ 와 같이 압력과 밀도 사이의 관계식 $p = p(\rho)$ 을 가정해야 한다. 또한 허블 상수라고 불리는 $H = \dot{a}/a$ 인 또 다른 변수도 있다. 변수들의 현재 값은 t_0, ρ_0, H_0, a_0 와 같이 아래 첨자 0으로 상징적으로 표시한다. 간단히 하기 위하여 $a_0 = 1$ 으로 놓자.

우주는 상대론적인 입자들의 복사 방출을 만들어내는 빅뱅이라 불리는 대폭발로부터 시작되었다고 믿어진다. 그와 같은 팽창 동안 우주는 냉각되어 온도가 내려가고 내부의 입자들은 비상대론적으로 바뀐다. 그러나, 최근의 관측 결과는 현재 우주의 대부분에서 에너지 밀도가 일정하다는 것을 보여주고 있다. 우주의 에너지가 광양자가 결정한다고 가정하면 광양자 (photon)의 경우, 우주가 팽창함에 따라 광양자의 파장은 척도 인자(scale factor)에 비례하여 커진다.

A.3	다음과 같은 세 경우에 대하여 w 값을 각각 결정하시오. (1) 우주가 오직 전자기복사 (즉, 광자) 에너지로만 채워져 있을 경우 (2) 우주가 비상대론적 입자(물질)로만 채워져 있을 경우 (3) 일정한 에너지 밀도를 가진 우주의 경우	0.9 pt.
-----	--	---------

A.4	$k = 0$ 일 때, A.3에서 언급한 (1), (2), (3)의 각각의 경우에 대해 척도 인자 $a(t)$ 를 구하시오. 이때, (1), (2)의 경우 $a(t = 0) = 0$ 의 초기 조건을 이용하고 (3)의 경우는 $a_0 = 1$ 을 이용하시오.	0.9 pt.
-----	---	---------

식 (1)의 상수 k 는 우주의 공간적인 기하학적 모양과 연관이 있다. $k = +1$ 은 양의 곡률의 우주 (닫혀있는), $k = 0$ 은 평평한 우주(무한한), $k = -1$ 은 음의 곡률의 우주(열려있고, 무한한)가 된다. $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ 을 임계 에너지 밀도라고 하면, 밀도비율을 $\Omega = \rho/\rho_c$ 로써 정의할 수 있다. A_1 은 문제 A.1로 부터 구한 값이다.

A.5	식 (1)의 k 를 Ω, H, a, R_0 로 나타내시오.	0.1 pt.
A.6	k 값 $k = +1, k = 0, k = -1$ 각각에 해당하는 Ω 의 범위를 구하시오.	0.3 pt.

B. 급팽창 단계를 도입해야 하는 이유와 제반 조건

우주 배경 복사 (CMB, cosmic microwave background)의 관측을 통하여 현재의 우주가 거의 평평한 것을 알 수 있다. 문제는 이것이 사실이라면 현재의 우주는 정확히 평평한 초기 우주에서 비롯되었어야 한다. 그렇지 않다면 완전 편평도에서 조금이라도 벗어나면 시간에 따라 증가하여 현재의 평평한 정도에서 크게 벗어나기 때문이다.

B.1	문제 A. 3에서 복사 에너지가 압도적인 우주와 비상대론적인 물질의 에너지가 압도적으로 우주의 에너지를 결정하는 경우 각각에 대해 시간의 함수로 $(\Omega(t) - 1)$ 을 구하시오.	0.5 pt.
-----	--	---------

이 문제를 해결하기 위해 우주는 초기에 일정한 에너지 밀도가 대부분인 기간이 있었으며, 이 후 에너지 밀도가 지수적으로 상승하는 급팽창이라 불리는 기간이 이어져야한다.

B.2	일정한 에너지 밀도가 우주를 압도하는 기간 동안에 $(\Omega(t) - 1)$ 를 시간의 함수로 나타내시오. 이때, $(\Omega(t) - 1) \ll 1$ 이다.	0.3 pt.
B.3	급팽창의 조건이 다음의 몇 가지 조건과 동등하다(equivalent)는 것을 보이시오: 음의 압력 (negative pressure), 가속 팽창($\ddot{a} > 0$), 작아지는 허블 반지름 ($(d(aH)^{-1}/dt < 0)$)	0.9 pt.
B.4	허블 반지름이 작아지는 조건은 변수 $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ 로 표현될 수 있음을 보이시오. 여기에서 $\epsilon < 1$ 이다.	0.2 pt.

급팽창은 $\epsilon < 1$ 인 동안 일어나며, $\epsilon = 1$ 일 때 끝난다. $dN = d \ln a = H dt$ 일때, e-폴딩 수 (e-folding number) N 을 정의할 수 있으며 급팽창이 끝날때 $N = 0$ 이다.

C. 균일하게 분포한 입자들에 의해 발생하는 팽창

급팽창하는 기간을 만들어 내는 간단한 물리적 시스템의 하나의 예로, 균일하게 분포된 물질이 압도하는 우주를 들 수 있다. 이러한 종류의 물질을 급팽창(inflation)이라고 부르고 이는 함수 $\phi(t)$ 로 특징지을 수 있다.

이 물질의 동역학적 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

여기에서 $V = V(\phi)$ 는 퍼텐셜 함수이고, $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$ 이다. 허블 변수는 다음과 같은 식을 만족한다.

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

여기에서 M_{pl} 은 플랑크 환산 질량이라고 한다. 식 (3)에서의 $\ddot{\phi}$ 항이 무시될 수 있는 충분한 시간 동안 퍼텐셜 에너지 V 가 운동에너지 $\dot{\phi}^2/2$ 보다 커져서 압도적 에너지가 되고 이 동안에 급팽창이 일어난다. 이러한 조건은 느린-롤(slow-roll) 근사라고 불린다.

ϵ 과 $\eta_V = \delta + \epsilon$,는 느린-롤 변수들로 불린다. 여기에서 $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$ 이다.

C.1	파라미터 ϵ , η_V , $dN/d\phi$ 를 퍼텐셜 $V(\phi)$, 퍼텐셜의 1계, 2계 미분 (V' , V'')으로 나타내시오.	1.7 pt.
-----	--	---------

D. 어느 간단한 퍼텐셜의 경우의 급팽창

어떠한 팽창 모델의 예측도 우주배경복사(CMB)의 관측 값 (observational constraints)인 $n_s = 0.968 \pm 0.006$, $r < 0.12$ 과 비교되어야 한다. 여기에서 $r = 16\epsilon$, $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ 은 물질 지배 팽창 모델의 $\phi = \phi_{start}$ 조건에서 계산된 것이다. 이 때 물질의 퍼텐셜로 간단하게 $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ 을 취한다. 여기에서 n 은 어떤 정수이고, Λ 은 상수이다.

D.1	급팽창이 끝났을 때 ϕ_{end} 를 구하시오.	0.5 pt.
D.2	r 과 n_s 를 e-폴딩 수 N 과 정수 n 으로 나타내시오. n 의 값을 r 과 n_s 가 관측 값과 가장 가까워지는 조건을 찾아 추정하시오. 계산할 때, $N = 60$ 으로 놓으시오.	0.9 pt.