

LIGO-GW150914 (10 points)

In 2015, the gravitational-wave observatory LIGO detected, for the first time, the passing of gravitational waves (GW) through Earth. This event, named GW150914, was triggered by waves produced by two black holes that were orbiting on quasi-circular orbits. This problem will make you estimate some physical parameters of the system, from the properties of the detected signal.

Part A: Newtonian (conservative) orbits (3.0 points)

- A.1** Consider a system of two stars with masses M_1, M_2 , at locations $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, respectively, with respect to the center-of-mass of the system, that is, 1.0pt

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

The stars are isolated from the rest of the Universe and moving at non-relativistic velocities. Using Newton's laws, the acceleration vector of mass M_1 can be expressed as

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

where $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$. Find $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$, where G is Newton's constant [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$].

- A.2** The total energy of the 2-mass system, in circular orbits, can be expressed as: 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

where

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

are the *reduced mass* and *total mass* of the system, Ω is the angular velocity of each mass and L is the total separation $L = r_1 + r_2$. Obtain the explicit form of the term $A(\mu, \Omega, L)$.

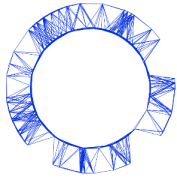
- A.3** Equation 3 can be simplified to $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$. Determine the number β . 1.0pt

Part B: Introducing relativistic dissipation (7.0 points)

The correct theory of gravity, *General Relativity*, was formulated by Einstein in 1915, and predicts that gravity travels with the speed of light. The messengers carrying information about the interaction are called GWs. GWs are emitted whenever masses are accelerated, making the system of masses lose energy.

Consider a system of two point-like particles, isolated from the rest of the Universe. Einstein proved that for small enough velocities the emitted GWs: 1) have a frequency which is twice as large as the orbital frequency; 2) can be characterized by a luminosity, i.e. emitted power $\mathcal{P}$, which is dominated by Einstein's

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-2

English (Official)

quadrupole formula,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

Here, c is the velocity of light $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s. For a system of 2 pointlike particles orbiting on the $x - y$ plane, Q_{ij} is the following table (i, j label the row/column number)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad Q_{33} = -\sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

and $Q_{ij} = 0$ for all other possibilities. Here, (x_A, y_A) is the position of mass A in the center-of-mass frame.

- B.1** For the circular orbits described in A.2 the components of Q_{ij} can be expressed as a function of time t as: 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

Determine k in terms of Ω and the numerical values of the constants a_i, b_i, c_{ij} .

- B.2** Compute the power $\mathcal{P}$ emitted in gravitational waves for that system, and obtain: 1.0pt

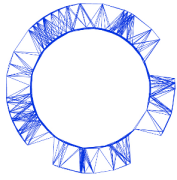
$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

What is the number ξ ? [If you could not obtain ξ , use $\xi = 6.4$ in the following.]

- B.3** In the absence of GW emission the two masses will orbit on a fixed circular orbit indefinitely. However, the emission of GWs causes the system to lose energy and to slowly evolve towards smaller circular orbits. Obtain that the rate of change $\frac{d\Omega}{dt}$ of the orbital angular velocity takes the form 1.0pt

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

where M_c is called the *chirp mass*. Obtain M_c as a function of M and μ . This mass determines the increase in frequency during the orbital decay. [The name "chirp" is inspired by the high pitch sound (increasing frequency) produced by small birds.]



- B.4** Using the information provided above, relate the orbital angular velocity Ω with the GW frequency f_{GW} . Knowing that, for any smooth function $F(t)$ and $a \neq 1$, 2.0pt

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

where χ is a constant and t_0 is an integration constant, show that (10) implies that the GW frequency is

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

and determine the constant p .

On September 14, 2015 GW150914 was registered by the LIGO detectors, consisting of two L-shaped arms, each 4 km long. These arms changed by a relative length according to Fig. 1. The arms of the detector respond linearly to a passing gravitational wave, and the response pattern mimics the wave. This wave was created by two black holes on quasi-circular orbits; the loss of energy through gravitational radiation caused the orbit to shrink and the black holes to eventually collide. The collision point corresponds, roughly, to the peak of the signal after point D, in Fig. 1.

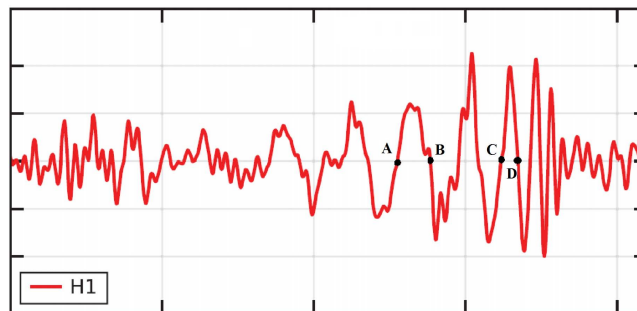


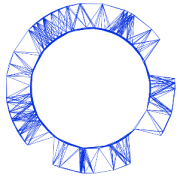
Figure 1. Strain, i.e. relative variation of the size of each arm, at the LIGO detector H1. The horizontal axis is time, and the points A, B, C, D correspond to $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ seconds, respectively.

- B.5** From the figure, estimate $f_{\text{GW}}(t)$ at 1.0pt

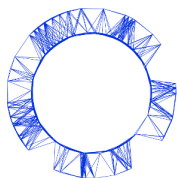
$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{and} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

Assuming that (12) is valid all the way until the collision (which strictly speaking is not true) and that the two objects have equal mass, estimate the chirp mass, M_c , and total mass of the system, in terms of solar masses $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

- B.6** Estimate the minimal orbital separation between the two objects at $t_{\overline{CD}}$. Hence estimate a maximum size for each object, R_{max} . Obtain $R_\odot/R_{\text{max}}$ to compare this size with the radius of our Sun, $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km. Estimate also their orbital linear velocity at the same instant, v_{col} , comparing it with the speed of light, v_{col}/c . 1.0pt



Conclude that these are extremely fast moving, extremely compact objects indeed!



Where is the neutrino? (10 points)

When two protons collide with a very high energy at the Large Hadron Collider (LHC), several particles may be produced as a result of that collision, such as electrons, muons, neutrinos, quarks, and their respective anti-particles. Most of these particles can be detected by the particle detector surrounding the collision point. For example, quarks undergo a process called *hadronisation* in which they become a shower of subatomic particles, called "jet". In addition, the high magnetic field present in the detectors allows even very energetic charged particles to curve enough for their momentum to be determined. The ATLAS detector uses a superconducting solenoid system that produces a constant and uniform 2.00 Tesla magnetic field in the inner part of the detector, surrounding the collision point. Charged particles with momenta below a certain value will be curved so strongly that they will loop repeatedly in the field and most likely not be measured. Due to its nature, the neutrino is not detected at all, as it escapes through the detector without interacting.

Data: Electron rest mass, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg; Elementary charge, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C;

Speed of light, $c = 3.00 \times 10^8$ m s⁻¹; Vacuum permittivity, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F m⁻¹

Part A. ATLAS Detector physics (4.0 points)

- A.1** Derive an expression for the cyclotron radius, r , of the circular trajectory of an electron acted upon by a magnetic force perpendicular to its velocity, and express that radius as a function of its kinetic energy, K ; charge modulus, e ; mass, m ; and magnetic field, B . Assume that the electron is a non-relativistic classical particle. 0.5pt

Electrons produced inside the ATLAS detector must be treated relativistically. However, the formula for the cyclotron radius also holds for relativistic motion when the relativistic momentum is considered.

- A.2** Calculate the minimum value of the momentum of an electron that allows it to escape the inner part of the detector in the radial direction. The inner part of the detector has a cylindrical shape with a radius of 1.1 meters, and the electron is produced in the collision point exactly in the center of the cylinder. Express your answer in MeV/ c . 0.5pt

When accelerated perpendicularly to the velocity, relativistic particles of charge e and rest mass m emit electromagnetic radiation, called synchrotron radiation. The emitted power is given by

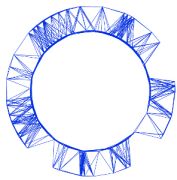
$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

where a is the acceleration and $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$.

- A.3** A particle is called ultrarelativistic when its speed is very close to the speed of light. For an ultrarelativistic particle the emitted power can be expressed as: 1.0pt

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

where ξ is a real number, n, k are integers, E is the energy of the charged particle and B is the magnetic field. Find ξ , n and k .



- A.4** In the ultrarelativistic limit, the energy of the electron as a function of time is: 1.0pt

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

where E_0 is the initial energy of the electron. Find α as a function of e , c , B , ϵ_0 and m .

- A.5** Consider an electron produced at the collision point along the radial direction with an energy of 100 GeV. Estimate the amount of energy that is lost due to synchrotron radiation until the electron escapes the inner part of the detector? Express your answer in MeV. 0.5pt

- A.6** Find an expression for the cyclotron frequency of the electron as a function of time in the ultrarelativistic limit. 0.5pt

Part B. Finding the neutrino (6.0 points)

The collision between the two protons shown in Figure 1 leads to the production of a top quark (t) and an anti-top quark ($\bar{t}$), the heaviest elementary particles ever detected. The top quark decays into a W^+ boson and a bottom quark (b), while the anti-top quark decays into a W^- boson and an anti-bottom quark ($\bar{b}$). In the case depicted in Figure 1, the W^+ boson decays into a anti-muon (μ^+) and a neutrino (ν), and the W^- boson decays into a quark and an anti-quark. The task of this problem is to reconstruct the full momentum of the neutrino using the momenta of some detected particles. **For simplicity, all particles and jets in this problem will be considered massless, except for the top quark and $W^\pm$ bosons.**

The momenta of the top quark decay products can be determined from the experiment (see Table), except for the neutrino momentum component along the (z -axis). The total linear momentum of the final state particles caught by the detector is only zero on the transverse plane (xy plane), and not along the collision line (z -axis). As such, one can find the transverse momentum of the neutrino from the missing momentum in the transverse plane.

On June 4, 2015, the ATLAS experiment at the LHC recorded a proton-proton collision at 00:21:24 GMT+1 like the one represented in Figure 1.

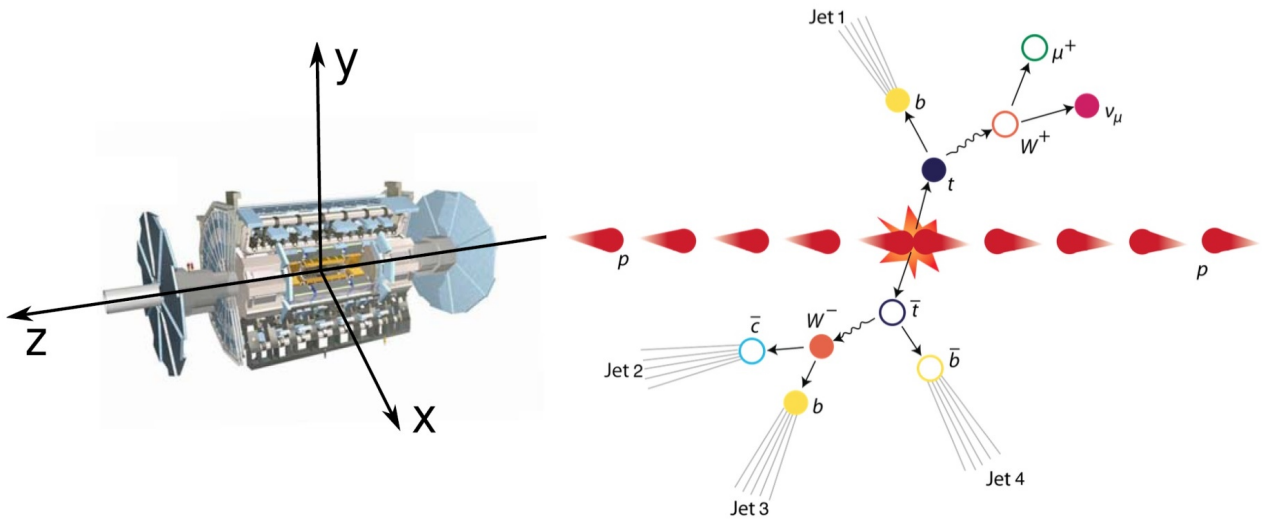
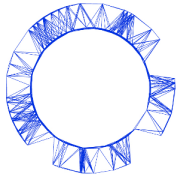


Figure 1. Schematic representation of the ATLAS detector coordinate system (left) and proton-proton collision (right).

The linear momenta of the three final-state particles coming from the top quark decay, including the neutrino, is presented below for each component.

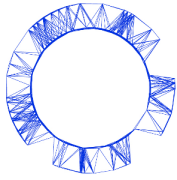
Particle	p_x (GeV/c)	p_y (GeV/c)	p_z (GeV/c)
anti-muon (μ^+)	-24.7	-24.9	-12.4
jet 1 (j_1)	-14.2	+50.1	+94.1
neutrino (ν)	-104.1	+5.3	---

- B.1** Find an equation which relates the square of the W^+ boson mass, m_W^2 , with the neutrino and anti-muon momentum components presented in the table above. Express your answer in terms of the neutrino and anti-muon transverse momentum, $\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j}$ and $\vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j}$, and their z -axis momentum components, $p_z^{(\mu)}$ and $p_z^{(\nu)}$. 1.5pt

- B.2** Assuming a W^+ boson mass of $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$ calculate the two possible solutions for the neutrino momentum along the z -axis, $p_z^{(\nu)}$. Express your answer in GeV/c. 1.5pt

- B.3** Calculate the top quark mass for each one of the two previous solutions. Express your answer in GeV/c^2 . [If you did not obtain the two solutions in B.2, use $p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c$ and $p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c$.] 1.0pt

The normalised number of collision events for the measurement of the top quark mass (as determined



from the experiment), has two components: the so-called "signal" (corresponding to the decay of top quarks) and "background" (corresponding to events from other processes that do not include top quarks). Experimental data include both processes, see Fig. 2.

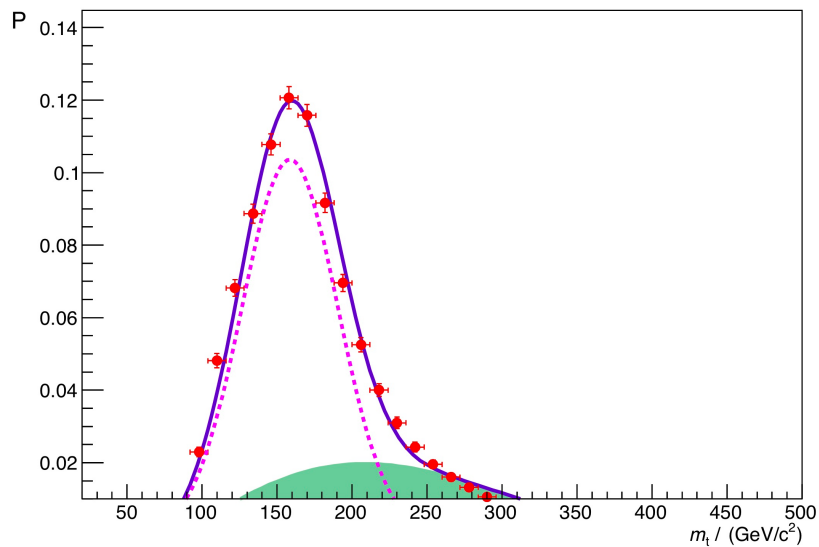
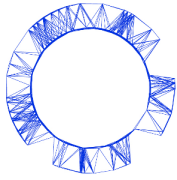


Figure 2. Top quark mass distribution as determined from the experiment, i.e. the normalised number of events plotted against the top quark mass. The dots correspond to the data. The dashed line corresponds to the "signal" and the shade to the "background".

B.4 According to the top quark mass distribution, which one of the two previous solutions is more likely to be the right one? Estimate the probability for the most likely solution. 1.0pt

B.5 Calculate the distance traveled by the top quark before decaying, using the most likely solution. Assume the top quark has a mean lifetime at rest of 5×10^{-25} s. 1.0pt



Physics of Live Systems (10 points)

Data: Normal atmospheric pressure, $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

Part A. The physics of blood flow (4.5 points)

In this part you will analyse two simplified models of blood flow in vessels.

Blood vessels are approximately cylindrical in shape, and it is known that for a steady, non turbulent flow of an incompressible fluid in a rigid cylinder, the difference in pressure of the fluid at the two ends of the cylinder is given by

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

where ℓ and r are the length and radius of the cylinder, η is the fluid viscosity and Q is the volumetric flow rate, i.e. the fluid volume that passes the cylinder cross section per unit time. This expression is often able to provide the correct order of magnitude for the pressure difference in a vessel, even without taking into account the pulsatile flow, the vessel's compressibility and irregular shape, and the fact that blood is not a simple fluid but a mixture of cells and plasma. Moreover, this expression has the same form as Ohm's law, with the volumetric flow rate being interpreted as a current, the difference in pressure as a voltage, and the factor $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ as a resistance.

Consider for example the symmetrical network of arterioles (small arteries) depicted in Figure 1 that delivers blood to the capillary bed of a tissue. In this network, at each bifurcation a vessel is divided in two identical vessels. However, the vessels of higher levels are thinner and shorter: consider that the radii and lengths of vessels in two consecutive levels, i and $i + 1$, are related by $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ and by $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$.

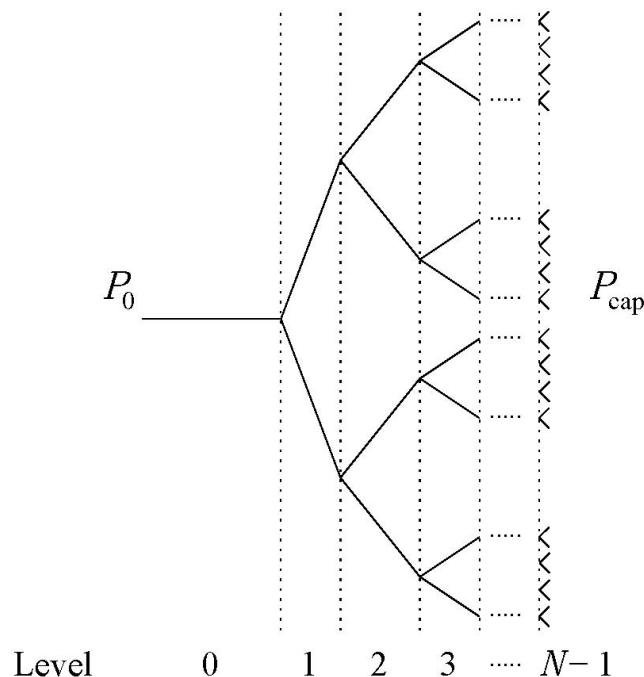
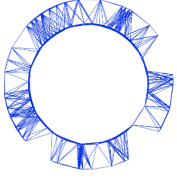


Figure 1. Network of arterioles.



A.1 Obtain an expression for the volumetric flow rate, Q_i , in a vessel at any level i , as a function of the total number of levels N , of the viscosity η , of the radius r_0 and length ℓ_0 of the first vessel, and of the difference $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ between the pressure at the arteriole at level 0, P_0 , and the pressure at the capillary bed, P_{cap} . 1.3pt

A.2 Calculate the numerical value of the volumetric flow rate Q_0 of the arteriole at level 0, if its radius is 6.0×10^{-5} m and its length is 2.0×10^{-3} m. Consider that the pressure at the arteriole inlet is 55 mmHg and the vessel network has $N = 6$ levels linking this arteriole to the capillary bed at the pressure 30 mmHg. Consider that the blood viscosity is $\eta = 3.5 \times 10^{-3}$ kg m⁻¹ s⁻¹. Express your result in ml/h. 0.5pt

A blood vessel as an LCR circuit

The approximation of rigid cylindrical vessels falls short for several reasons. It is particularly important to include the time dependent flow and to take into account the change in vessel diameter that occurs when the pressure varies during a blood pumping cycle done by the heart. Moreover, it is observed that in the larger vessels the blood pressure varies significantly during a cycle, while in the smaller vessels the amplitude of the oscillations in pressure is much smaller, and the flow is almost time independent.

When the pressure increases in a single elastic vessel, there will be an increase in its diameter, thus permitting to store more fluid in the vessel, and to deliver it when the pressure drops. For this reason, the elastic behaviour of the vessel can be simulated by adding a capacitor to our initial description. Moreover, when taking into account the time dependent blood flow rate, one has to consider the inertia of the fluid, proportional to its density $\rho = 1.05 \times 10^3$ kg m⁻³. This inertia can be described by an inductance in our model. In Figure 2 we represent the equivalent circuit for a single vessel in this model. The equivalent capacitance and inductance are given by

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{and} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

respectively, where h is the width of the vessel wall and E is the artery Young's modulus, a coefficient that describes the alteration in size of the vessel tissue when a force is applied. The Young's modulus has units of pressure and is on the order of $E = 0.06$ MPa for arterioles.

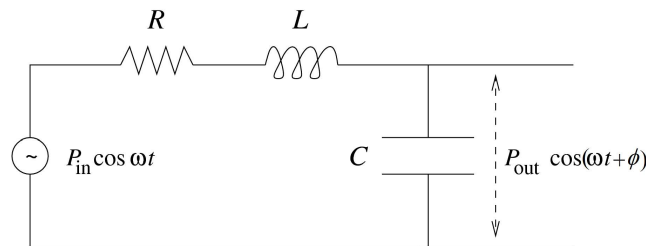
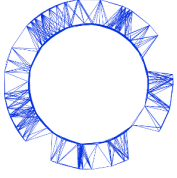


Figure 2. Equivalent electric circuit for a single vessel.



A.3 Obtain, in the stationary regime, the pressure amplitude at the vessel outlet, P_{out} , as a function of the pressure amplitude at the inlet, P_{in} , the equivalent resistance, R , inductance, L and capacitance, C , for a flow with angular frequency ω . Establish the condition between η , ρ , E , h , r and ℓ so that, for low frequencies, the pressure oscillation amplitude at the outlet is smaller than that of P_{in} . 2.0pt

A.4 For the vessel network in **A.2** estimate the maximum arteriole wall thickness h so that the condition established in **A.3** is satisfied (consider that h is level independent). 0.7pt

Part B. Tumour growth (5.5 points)

Tumour growth is a very complex process where biological mechanisms such as cell proliferation and natural selection are intertwined with physics. In this problem we will consider a simplified model of tumour growth that addresses the increase in pressure commonly observed in solid tumors.

Consider a group of normal cells forming a tissue surrounded by an inextensible basement membrane, which forces the tissue to maintain always the same form: a sphere of radius R (Figure 3).

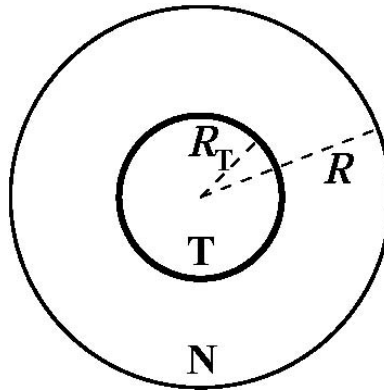


Figure 3. Simplified tumour.

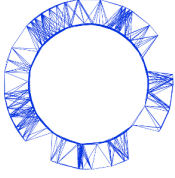
Initially the tissue does not have residual stresses, i.e. the pressure at every point is equal to the atmospheric pressure.

At time $t = 0$, a tumour starts growing at the centre of this sphere and, as it grows, the pressure inside the tissue increases. Consider that both tissues (normal, N, and tumour, T) are compressible such that their densities, ρ_N and ρ_T , increase linearly with pressure:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

where ρ_0 is the rest tissue density, p is the pressure difference to the atmospheric pressure and K_N , K_T are the compressibility moduli (bulk moduli) of the normal and tumour tissues, respectively. In general, tumours are stiffer and so they have a higher bulk modulus.

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q3-4

English (Official)

- B.1** The mass of normal cells is not altered while the tumour is growing. Obtain the ratio between the tumour volume and the total tissue volume, $v = V_T/V$, as a function of the ratio between the tumour mass (M_T) and the normal tissue mass (M_N), $\mu = M_T/M_N$ and the ratio of the bulk moduli, $\kappa = K_N/K_T$. 1.0pt

Hyperthermia is sometimes used together with chemotherapy and radiotherapy in the treatment of cancer. In hyperthermia the cancer cells are selectively heated from the normal human body temperature, 37 °C, to temperatures above 43 °C, inducing their death. Researchers are currently developing carbon nanotubes covered with special proteins capable of binding to tumour cells. When the tissue is irradiated with near-infrared radiation, the nanotubes absorb it in a much greater extent than the surrounding tissues and therefore can be selectively heated as well as the tumour cells to which they are attached.

Consider that the tumour, the normal cells and the surrounding tissue have a constant thermal conductivity k , i.e. in the geometry of this problem, the energy that crosses a spherical surface of radius r per unit time and per unit area is equal to k times the derivative of the temperature with respect to r . The nanotubes are uniformly distributed in the tumour volume and are able to deliver a power $\mathcal{P}$ of thermal energy per unit volume. Assume that the temperature is equal to the normal human body temperature very far away from the tumour.

- B.2** Obtain, for the stationary state, the temperature at the centre of the tumour as a function of $\mathcal{P}$, k , the human body temperature and the tumour radius, R_T . 1.7pt

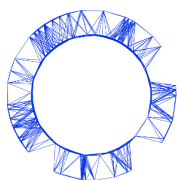
- B.3** Obtain the minimum power per unit volume, $\mathcal{P}_{\min}$, needed to heat up all tumour cells in a tumour with 5.0 cm radius to a temperature larger than 43.0 °C. Take the thermal conductivity of the tissue to be equal to $k = 0.60 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$. 0.5pt

Consider that the tumour is irrigated by a vessel network with a branched structure like in question **A.1**. As the tumour grows, when its pressure p becomes larger than the pressure P_{cap} at the thinnest vessels, the radii of these vessels will decrease by a small amount δr . If this pressure reaches a critical value p_c (which would correspond to a radius decrease of δr_c), the thinnest vessels would collapse, compromising seriously the irrigation to the tumour. The pressure and the radius change can be related by the following phenomenological relation:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Consider that just the smallest vessels (of level $N-1$) have their radius altered when the tumour increases its pressure.

- B.4** In the linear regime (i.e. consider that $p - P_{\text{cap}}$ is very small), express the relative drop in the flow rate, $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$, in these thinnest vessels, as a function of the tumour volume ratio $v = V_T/V$ and K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} , P_{cap} . 2.3pt



일반 지시사항: 이론 시험 (30 점)

이론 시험은 5 시간동안 진행되며, 총 30 점입니다.

시험 시작 전

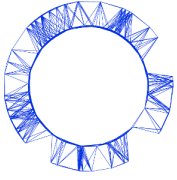
- 시험 시작을 알리는 신호 벨이 울리기 전에 문제가 들어 있는 봉투를 열어서는 안됩니다.
- 이론 시험의 시작과 끝은 벨소리로 안내됩니다. 매 시간마다 경과된 시간이 안내될 것이며, 이론 시험의 종료를 알리는 벨 소리가 울리기 15 분 전에도 안내될 것입니다.

시험 응시 중

- 답안을 쓰는 전용 답안지가 각 문제당 제공됩니다. 각 문제 번호와 일치하는 답안지 (A 로 표시됨) 의 적절한 표와 상자, 그래프에 측정 결과를 적으십시오. 각각의 문제에 여분의 빈 계산용지 (W 로 표시됨) 가 제공됩니다. 현재 풀고 있는 문제번호와 풀이과정을 작성하는 계산용지가 맞는지 확인하십시오. (상단의 문제 번호를 확인하십시오.) 어느 계산용지이든 쓴 것 중 채점이 되지 않기를 원하는 것은 X 표시를 하십시오. 각 계산용지의 앞면만 활용하십시오.
- 풀이과정을 작성할 때 최대한 간결하게 작성하십시오: 방정식을 사용하거나, 논리 연산자를 사용하고, 생각하는 내용을 간단하게 작성하십시오. 긴 문장을 쓰는 것을 피하십시오.
- 숫자를 표시할 때에는 알맞은 유효 숫자의 개수를 주어야 합니다.
- 전 단계의 문제를 풀지 않았다하더라도, 다음 단계의 문제를 풀 수도 있습니다.
- 허가 없이 시험 장소를 떠날 수 없습니다. 도움이 필요 하면 (마실 물을 보충할 경우, 계산기 고장, 화장실 방문이 필요, 등), 세개의 깃발 중 하나를 사용하여 감독관에게 알려 주시기 바랍니다: "H₂O": 마실 물을 보충하고자 합니다. "WC"화장실에 가려고 합니다. "Help!": 그 외의 도움이 필요 합니다. 계산 용지 또는 그래프 용지가 더 필요한 경우 "Help!" 깃발을 들어주세요.

시험 종료 후

- 시험이 끝나는 즉시 답안 작성을 중지해야 합니다.
- 각 문제에 대해 작성한 용지의 순서를 정렬합니다. 순서는 다음과 같습니다: 겉장 (cover sheet, C), 문제지 (questions, Q), 답안지 (answer sheets, A), 계산용지 (work sheet, W)
- 한 문제에 해당되는 모든 계산용지들은 해당 문제의 봉투에 함께 넣으세요. 일반적인 지시사항 (G) 는 남는 봉투에 따로 넣으세요. 또한, 사용하지 않은 빈 종이도 제출하세요. 어떠한 종이도 시험장 밖으로 가지고 나갈 수 없습니다.
- 봉투가 수거될 때 까지 책상에서 대기하십시오. 봉투가 수거되면 감독관이 시험장 밖으로 안내해줄 것입니다. 필기구 가방을 가져가세요. 필기구 (볼펜 1 자루, 연필 1 자루, 자 1 개, 지우개/연필깎이 1 개) 와 제공된 계산기, 물병을 가져가세요.



LIGO-GW150914 (10 점)

2015 년, 중력파 관측소 LIGO 에서 지구를 통과하는 중력파 (gravitational waves, GW) 를 처음으로 검출했다. GW150914 라고 이름이 붙은 이 이벤트는 준-원형 궤도 (quasi-circular) 를 도는 두 개의 블랙홀이 만드는 중력파에 의해 발생 (trigger) 되었다. 이 문제에서는 검출된 중력파 신호의 특성 (property) 을 이용하여 계 (system) 의 물리적 변수들을 추정한다.

파트 A : 뉴턴역학에 따른 (에너지가 보존되는) 궤도 운동 (3.0 점)

- A.1** 두 별의 질량이 각각 M_1, M_2 이고, 계 (system) 의 질량중심에서부터 위치가 각각 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 일 때, 다음 식이 성립한다. 1.0pt

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

두 별은 비상대론적인 속도로 운동하고, 우주에서 두 별을 제외한 나머지 부분이 주는 영향은 무시한다. 뉴턴 법칙을 사용하면 질량 M_1 의 가속도 벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

여기서, $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$ 이다. 자연수 n 의 값을 구하고, α 를 G, M_1, M_2 로 나타내시오. G 는 중력 상수이다. [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$]

- A.2** 원형 궤도를 도는 두 물체 계 (2-mass system) 의 총 에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다: 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

여기서,

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

인데, 이는 각각 계의 환산 질량 (reduced mass) 과 총 질량 (total mass) 이다. Ω 는 질량 중심에 대한 물체의 각속도 (angular velocity), L 은 두 물체 사이의 거리로 $L = r_1 + r_2$ 이다. A 를 μ, Ω, L 로 나타내시오.

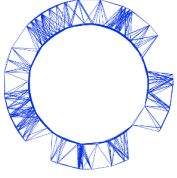
- A.3** 식 (3) 을 정리하면 $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$ 로 나타낼 수 있다. 상수 β 의 값을 결정하시오. 1.0pt

파트 B: 상대론적 에너지 손실 도입하기 (7.0 점)

1915 년 아인슈타인은 중력에 대해 더 정확한 이론인 일반 상대성 이론을 수립하면서 중력은 광속으로 전달된다고 예측하였다. 중력 상호 작용에 대한 정보를 담고 있는 전달자 (messenger) 를 중력파 (GW) 라고 부른다. 질량을 가진 물체가 가속되면 중력파가 방출되며, 질량계의 에너지가 감소한다.

두 개의 점 입자 (point-like particles) 로 구성된 고립계를 고려하자. 아인슈타인은 속도가 충분히 느린 경우에는

- 1) 방출된 중력파의 진동수는 궤도 진동수 (orbital frequency) 의 2 배이고,
- 2) 중력파의 밝기 (luminosity), 즉 방출되는 일률 $\mathcal{P}$ 는 다음과 같이 아인슈타인의 사중극자 공식 (quadrupole formula)



으로 주어진다.

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

여기서 c 는 광속으로 $c \simeq 3 \times 10^8 \text{m/s}$ 이다. $x-y$ 평면에서 궤도를 도는 2 개의 점 입자 계에 대해서 Q_{ij} 는 다음과 같다. (i, j 는 행과 열을 의미한다.)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

위의 경우 외에는 $Q_{ij} = 0$ 이다. 여기서 (x_A, y_A) 는 질량 중심 좌표계에서 질량 A 의 위치이다.

B.1 A.2 에 언급된 원형 궤도에 대해 Q_{ij} 의 성분은 다음과 같이 시간 t 의 함수로 표현 될 수 있다. 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

여기서, k 를 Ω 로 나타내고, 상수 a_i, b_i, c_{ij} 의 값을 모두 구하시오.

B.2 이 계에 대해 방출되는 중력파의 일률 $\mathcal{P}$ 를 계산하여 다음이 성립함을 보이시오: 1.0pt

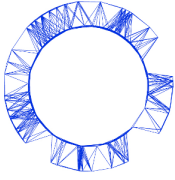
$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

ξ 의 값을 구하시오. [귀하가 문제에서 ξ 의 값을 구하지 못했다면, 이 뒤의 문제에서는 $\xi = 6.4$ 를 사용하시오.]

B.3 만약 중력파가 방출되지 않는다면, 두 별은 영원히 고정된 원형 궤도를 돌 것이다. 하지만, 중력파의 방출로 인해 계는 에너지를 조금씩 잃게되고, 궤도의 크기는 점점 작아진다. 이때 궤도 각속도의 변화율 $\frac{d\Omega}{dt}$ 이 다음 식으로 주어짐을 보이시오. 1.0pt

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

여기서 M_c 는 처프 질량 (chirp mass) 이라고 한다. M_c 를 M 과 μ 의 함수로 나타내시오. 이 질량은 궤도가 줄어드는 동안 진동수가 얼마나 증가하는지를 결정한다. [” 처프 ” 이라는 이름은 짧은 시간에 진동수가 증가하는 소리를 내는 작은 새의 지저귐에서 유래했다.]



- B.4** 위에 주어진 정보를 이용하여 궤도 각속도 Ω 와 중력파의 진동수 f_{GW} 사이의 관계를 구하시오. $F(t)$ 가 부드럽게 변하는 (smooth) 함수이고 $a \neq 1$ 이면 다음 식이 성립한다. 2.0pt

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

여기서 χ 는 상수이고, t_0 는 적분상수이다. 이를 이용하여, 식 (10) 으로부터 중력파의 진동수가 다음과 같이 주어짐을 보이시오.

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

그리고, 상수 p 의 값을 결정하시오.

2015 년 9 월 14 일, GW150914 는 4km 길이의 팔 두 개로 구성된 L 자형 LIGO 검출기에 의해 검출되었다. 이 때 두 팔의 길이 차이는 그림 1 과 같이 변했다. 검출기의 팔은 이를 지나가는 중력파에 대해 선형적으로 응답하므로, 응답 패턴(response pattern) 은 파동의 모습을 그대로 나타낸다. 이 중력파는 준-원형 궤도를 도는 두 개의 블랙홀에 의해 생성되었다; 중력파 방출에 의해 궤도가 줄어들므로 결국 두 블랙홀은 충돌하게 된다. 충돌 순간은 대략 그림 1 의 D 점 이후에 위치한 신호의 최대점 근처이다.

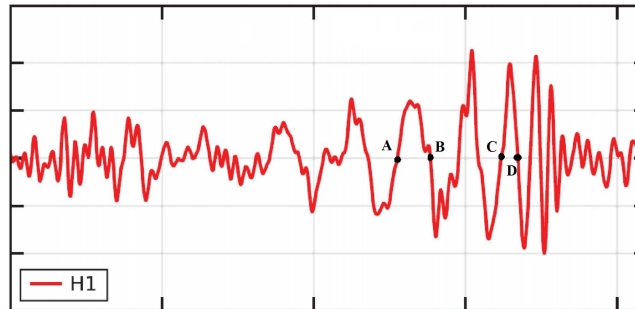


그림 1. LIGO 검출기 H1 에서 중력파에 의한 변형 (strain) 때문에 생긴 두 팔의 길이 차이. 가로축은 시간이며, 점 A, B, C, D 는 각각 $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ 초 에 해당한다.

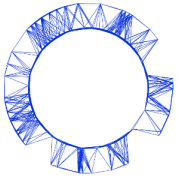
- B.5** 그림으로부터 다음 두 시각에서 $f_{\text{GW}}(t)$ 값을 각각 추정하시오. 1.0pt

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{and} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

충돌이 일어나는 순간까지 (엄밀히 말하면 사실이 아니지만) 식 (12) 가 항상 성립하고, 두 물체가 같은 질량을 가지고 있다고 가정하자. 계의 처프 (chirp) 질량 M_c 와 계의 총 질량을 태양 질량 $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ 을 이용하여 나타내시오.

- B.6** 시각 $t_{\overline{CD}}$ 에서, 두 물체 사이의 거리를 구하시오. 이로부터 물체의 반지름으로 가능한 최댓값 R_{max} 을 추정하시오. 태양의 반지름은 $R_\odot \simeq 7 \times 10^5 \text{ km}$ 이다. $R_\odot/R_{\text{max}}$ 를 구하시오. 또한, 이 순간 물체의 선 속도 v_{col} 를 구하고, 이것을 광속으로 나눈 값 v_{col}/c 를 구하시오. 1.0pt

이로부터 블랙홀들이 대단히 빠르게 움직이며, 매우 밀집되어 (compact) 있다는 결론을 얻을 수 있다.



중성미자 (neutrino) 는 어디에? (10 점)

거대 강입자 가속기 (Large Hadron Collider, LHC) 에서 매우 높은 에너지로 두 개의 양성자가 충돌할 때, 충돌의 결과로 전자, 뮤온, 중성미자, 쿼크, 그리고 그 반입자 (anti-particle) 들 등이 생성될 수 있다. 이들 중 대부분은 충돌점 주위의 입자 검출기 (particle detector) 로 검출할 수 있다. 예를 들어, 쿼크는 강입자화 (hadronization) 라는 과정을 거쳐, “제트 (jet)” 라고 불리는 아원자 입자들 (subatomic particles) 의 소나기 (shower) 로 변한다. 게다가, 검출기 내부에서 높은 자기장은 매우 에너지가 높은 대전 입자들까지도 경로를 휘게하여 운동량을 결정할 수 있게 한다. ATLAS 검출기는 충돌점 주위를 감싸는 검출기 안쪽 부분에 균일하고 시간에 대해 변하지 않는, 2.00 테슬라 (2.00 T) 의 자기장을 만들기 위해 초전도 솔레노이드 시스템을 사용한다. 어떤 값 이하의 운동량을 가지는 대전된 전하들은 경로가 매우 강하게 휘어, 반복적으로 자기장 안에서 원을 그리며 움직이므로, 대부분 거의 검출되지 않는다. 중성미자는 아무 상호작용도 하지 않고 검출기를 빠져 나가기 때문에, 전혀 검출되지 않는다.

데이터: 전자 질량, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg; 기본 전하, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C;

광속, $c = 3.00 \times 10^8$ m s⁻¹; 진공 유전율 (Vacuum permittivity), $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F m⁻¹

파트 A. ATLAS 검출기의 물리 (4.0 점)

- A.1** 전자가 속도에 수직인 방향으로 자기력을 받아 원운동을 할 때 전자의 원형궤도 반지름, 즉 사이클로트론 반지름 (cyclotron radius) r 의 공식을 유도하시오. 사이클로트론 반지름을 운동에너지 K , 전하량 e , 질량 m , 자기장 B 의 함수로 나타내시오. 전자는 비상대론적인 고전 입자로 생각하시오. 0.5pt

ATLAS 검출기에서 생성된 전자는 상대론적으로 다루어야 하지만, 사이클로트론 반지름 공식에 상대론적 운동량 (relativistic momentum) 을 고려하면, 상대론적 운동에도 사용할 수 있다.

- A.2** 전자가 검출기의 내부 (안쪽 부분) 를 방사 (radial) 방향으로 빠져나갈 수 있는 운동량의 최소값을 계산하시오. 검출기의 안쪽 부분은 반지름 1.1 m 의 원통 모양이고, 전자는 원통 내부의 정확히 중심에 있는 충돌점에서 생성된다. 답안은 MeV/c 의 단위로 표현하시오. 0.5pt

속도에 수직 방향으로 가속될 때, 전하 e , 정지질량 m 의 상대론적 입자는 싱크로트론 복사라고 불리는 전자기 복사 (electromagnetic radiation) 를 방출한다. 방출 일률은 다음 수식으로 주어진다:

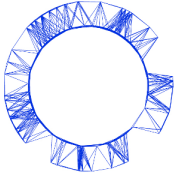
$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

여기서 a 는 가속도, $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ 이다.

- A.3** 입자의 속력이 광속에 매우 가까울 때 입자를 초상대론적 (ultrarelativistic) 이라고 부른다. 초상대론적 입자 (ultrarelativistic particle) 의 경우 방출 일률은 다음과 같이 표현된다: 1.0pt

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

여기서 ξ 는 실수 (real number), n, k 는 정수 (integer), E 는 대전된 전하의 에너지, B 는 자기장이다. ξ, n, k 를 구하시오.



- A.4** 초상대론적 극한 (ultrarelativistic limit) 에서, 전자의 에너지는 시간의 함수로 다음과 같다: 1.0pt

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

여기서 E_0 는 전자의 초기 에너지이다. α 를 e, c, B, ϵ_0, m 의 함수로 구하시오.

- A.5** 전자가 충돌 지점에서 방사 (radial) 방향으로 100 GeV 의 에너지를 가지고 생성되었다고 하자. 전자가 앞서 주어진 크기의 검출기 안쪽 부분을 벗어날 때까지, 싱크로트론 복사로 손실되는 에너지의 양을 계산하시오. 답을 MeV 의 단위로 나타내시오. 0.5pt

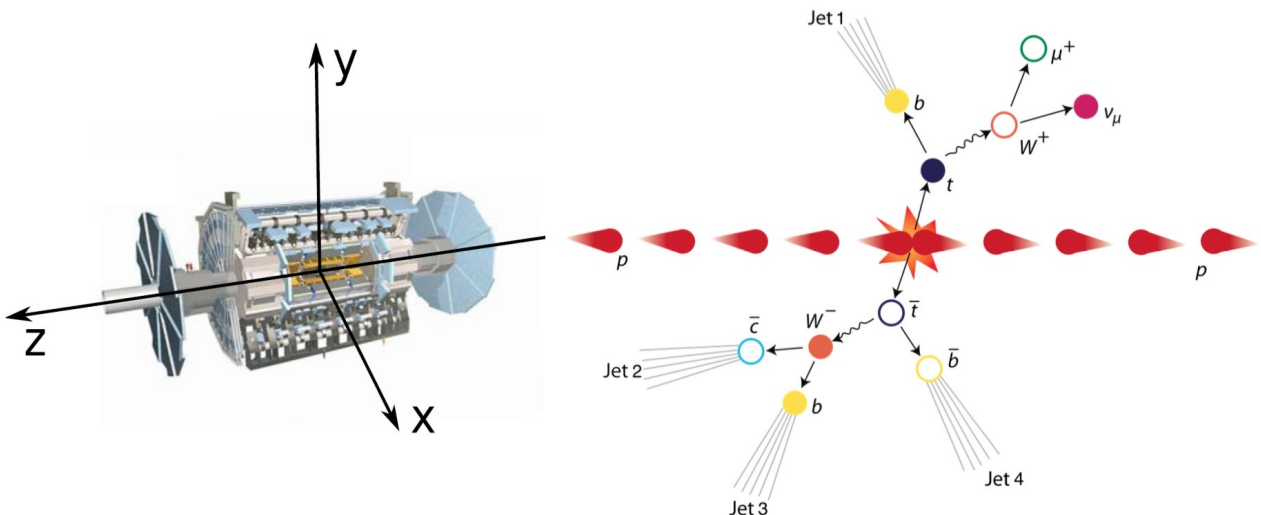
- A.6** 초상대론적 극한 (ultrarelativistic limit) 에서 전자의 사이클로트론 진동수 (cyclotron frequency) 의 표현식을 시간의 함수로 구하시오. 0.5pt

파트 B. 중성미자 (neutrino) 를 찾아서 (6.0 점)

그림 1 에 보인 두 양성자의 충돌은, 지금까지 검출된 가장 무거운 기본입자인, 꼭대기 쿼크 (top quark, t) 와 반-꼭대기 쿼크 (anti-top quark, $\bar{t}$) 를 생성한다. 꼭대기 쿼크는 W^+ 보손 (boson) 과 바닥 쿼크 (bottom quark, b) 로 붕괴하고, 반-꼭대기 쿼크는 W^- 보손 (boson) 과 반-바닥쿼크 (anti-bottom quark, $\bar{b}$) 로 붕괴한다. 그림 1 에 묘사한 경우에는, W^+ 보손은 반-뮤온 (μ^+) 과 중성미자 (ν_μ) 로, W^- 보손은 쿼크와 반-쿼크로 붕괴한다. 이 문제의 과제는 검출된 입자들의 운동량을 이용하여 중성미자의 모든 운동량을 재구성 (reconstruct) 하는 것이다. **단순하게 하기 위해, 이 문제의 모든 입자들과 제트들 (jets) 은 꼭대기 쿼크와 $W^\pm$ 보손들을 제외하고는 질량이 없다고 가정한다.**

꼭대기 쿼크가 붕괴하여 생성되는 것들의 운동량은, 중성미자의 z -축 운동량 성분을 제외하고는, 실험으로부터 결정할 수 있다 (표에서 - 기호는 이것을 의미한다. 표를 보시오). 최종-상태 입자들의 총 선운동량은, 충돌 방향 (z -축) 으로는 0 이 되지 않으므로 충돌방향의 중성미자 운동량 성분은 결정할 수 없다. 하지만, 수직 (transverse) 평면 (xy 평면) 위에서는 0 이 되기 때문에, z -축에 수직인 평면에서 손실된 운동량으로부터 중성미자의 수직 (횡적, transverse) 운동량만을 구할 수 있다.

2015 년 6 월 4 일, LHC 의 ATLAS 실험에서 그림 1 에 나타낸 것처럼 양성자-양성자 충돌 결과를 기록하였다. (시각은 00:21:24 GMT+1)



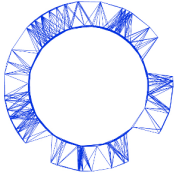


그림 1. ATLAS 검출기 좌표계 (왼쪽) 와 양성자-양성자 충돌 (오른쪽) 의 개략적인 표시도.

중성미자를 포함하여, 꼭대기 쿼크의 붕괴에서 나오는 세 개의 최종-상태 입자들의 선형 운동량을 각 성분 별로 다음 표에 제시하였다.

입자	p_x (GeV/c)	p_y (GeV/c)	p_z (GeV/c)
반-뮤온 (μ^+)	-24.7	-24.9	-12.4
제트 (jet) 1 (j_1)	-14.2	+50.1	+94.1
중성미자 (ν)	-104.1	+5.3	—

- B.1** W^+ 보손 (boson) 의 질량의 제곱 m_W^2 과, 위 표에 제시한 중성미자와 반-뮤온의 운동량 성분들간의 관계식을 구하시오. 답안을 아래에 적힌 중성미자와 반-뮤온의 수직 (횡적, transverse) 운동량

$$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j}, \quad \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j},$$

그리고 이 입자들의 z -축 운동량 성분, $p_z^{(\mu)}, p_z^{(\nu)}$ 를 이용하여 표현하시오.

1.5pt

- B.2** W^+ 보손의 질량을 $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$ 으로 가정하고 다음 단계의 지문도 고려하여, z -축 방향의 중성미자 운동량 $p_z^{(\nu)}$ 에 대해 두 가지 가능한 해 (값, solution) 를 계산하시오. 답을 GeV/c 단위로 표현하시오.

1.5pt

- B.3** 위에서 구한 두 가지 해 (solution) 의 각각에 대해 꼭대기 쿼크의 질량을 계산하시오. 답을 GeV/c^2 의 단위로 표시하시오. [B.2 에서 해 (solution) 를 구하지 못했다면, 다음의 값을 사용하여 계산하시오.

1.0pt

$$p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c \quad \text{and} \quad p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c.]$$

실험에서 쿼크 질량이 측정될 때마다 이벤트 (event) 수가 하나씩 올라간다. (실험으로부터 얻은 대로) 꼭대기 쿼크 질량이 측정되는 충돌 이벤트의 수를 구하여 정규화한 (normalized) 결과에는 두 성분이 있다: (꼭대기 쿼크의 붕괴에 대응하는) “신호 (signal)” 와 (꼭대기 쿼크를 포함하지 않는 다른 과정으로부터 나온 이벤트들에 대응하는) “배경값 (background)”. 그림 2 에 보인 실험 데이터는 두 과정을 모두 포함한다.

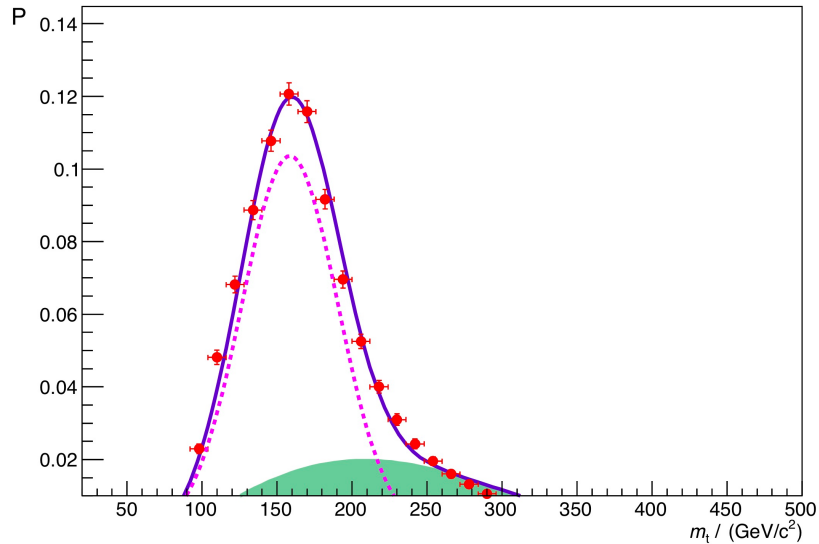
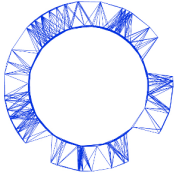
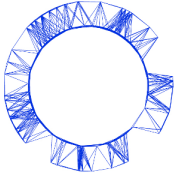


그림 2. 실험으로 측정된 꼭대기 쿼크의 질량 분포 (Top Quark Mass Distribution), 즉 꼭대기 쿼크 질량을 정규화한 (normalized) 충돌 이벤트의 수로 바꾸어 나타낸 그래프. 큰 동그라미 점들은 데이터에 해당한다. 점선은 “신호 (signal)” 를, 회색부분은 “배경값 (background)” 을 나타낸다.

B.4 꼭대기 쿼크 (top quark) 질량 분포에 따르면, 위 두 개의 해 (solution) 중에서 어느 것이 좀더 옳을 가능성이 높은가? 두 개의 해에 대한 확률을 대략적으로 추산하고 타당한 질량값을 제시하시오. 1.0pt

B.5 가장 가능성이 높은 해를 사용하여, 붕괴하기 전까지 꼭대기 쿼크 (top quark) 가 움직인 길이를 계산하시오. 꼭대기 쿼크가 정지했을 때 평균 수명은 5×10^{-25} s 으로 가정하시오. 1.0pt



생명체에 대한 물리 (생물 물리) (10 점)

데이터: 보통 상태의 대기압 (공기 압력)

$$P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$$

파트 A. 혈액의 흐름에 관한 물리 (4.5 점)

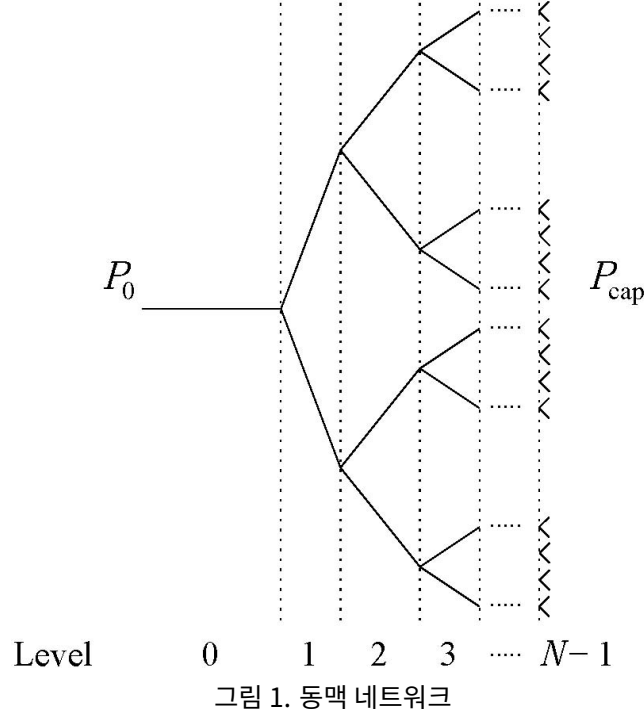
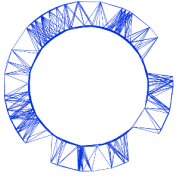
여기서는 혈관을 흐르는 혈액에 대한 두 개의 간단한 모델을 분석한다.

혈관의 모양은 근사적으로 실린더 (원통) 로 간주할 수 있다. 관이 실린더 모양이고, 강체로 만들어져 단단하며, 액체가 압축되지 않으며, 난류 (turbulence) 가 없이 흐름이 일정한 경우에, 관 양쪽 끝 사이의 압력 차이는 다음 수식으로 주어진다.

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

이 수식에서 ℓ 과 r 은 각각 관의 길이와 단면의 반지름이고, η 는 액체의 점성 (viscosity), Q 는 부피로 나타낸 흐름의 속력 (volumetric flow rate), 다시 말해 단위 시간에 관의 단면을 지나가는 액체의 부피이다. 혈액처럼 심장이 뿜 때마다 일정한 주기로 압력이 변하거나, 관의 벽이 강체가 아니거나, 관이 완전한 실린더가 아니고 모양에 변형이 있거나, 혈액처럼 압축이 되지 않는 이상적인 액체가 아니라 세포와 혈장 (plasma) 의 혼합 액체인 경우에도, 이 수식을 이용하면 관 양쪽 사이의 압력 차이를 실제와 비슷한 크기 (correct order of magnitude) 구할 수 있다. 뿐만 아니라, 액체의 부피 흐름 속력 (volumetric flow rate) Q 을 전류라고 간주하면, 이 수식은 옴의 법칙 (Ohm's law) 과 같은 형태가 되는데, 이 경우에는 관의 양쪽 끝 사이의 압력 차이가 전압에 해당하고, $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ 이 저항에 해당한다.

예를 들어, 그림 1 에 있는, 동맥을 연결하여 만든 대칭 형태의 네트워크 (network) 를 고려하자. 이 동맥 네트워크는 모세 혈관에 혈액을 보내준다. 네트워크는, 그림에서 보듯, 0 에서 N-1 까지 여러 단계 (level) 로 나눌 수 있는데, 나누어질 때마다 하나의 혈관은 두 개의 동일한 혈관들로 나누어진다. 그렇지만 단계가 높아지면 혈관이 얇아지고 짧아진다. 단계가 i 에서 $i+1$ 로 변할 때 혈관의 반지름과 길이가 각각 $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ 와 $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$ 로 변한다고 가정하자.



A.1 임의의 단계 i 에서 혈액의 부피 흐름 속력 (volumetric flow rate) Q_i 를 단계의 총갯수 (total number of levels) N , 혈액의 점성 η , 첫 단계 (단계 0) 의 관의 반지름 r_0 과 길이 ℓ_0 , 그리고 첫 단계 (단계 0) 의 압력 P_0 와 모세혈관의 압력 P_{cap} 사이의 차이 $\Delta P = P_0 - P_{cap}$ 로 나타내시오. 1.3pt

A.2 단계 0 에 있는 동맥의 반지름이 $6.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ 이고 길이가 $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 일 때, 부피 흐름 속력 Q_0 의 값을 구하시오. 동맥 네트워크 입구의 압력은 55 mmHg 이고, 단계 0 에서 모세혈관까지 네트워크의 총 단계수는 $N = 6$ 이다. 모세혈관의 압력은 30 mmHg 이고, 혈액의 점성은 $\eta = 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ 이다. 답을 ml/h 단위로 나타내시오. 0.5pt

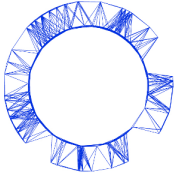
혈관을 LCR 회로 모델로 나타내기

혈관을 강체로 만들어진 실린더로 간주하는 모델은 다음 몇몇 이유 때문에 실제 상황과는 다르다. 우선, 혈액의 압력은 일정하지 않고 심장 박동 때문에 달라지는 시간 의존성 (time dependent flow) 을 보이며, 혈관의 지름도 심장의 박동 주기에 맞추어 변한다. 또한, 혈관의 지름이 클수록 심장 박동에 따라 혈압 변화가 크고, 혈관의 지름이 작을수록 혈압의 변화폭 (amplitude) 이 작으며 시간 의존성이 별로 없다.

혈관이 하나만 있고 탄성체라면, 혈압이 올라갔을 때 관의 벽이 얇아지고 반지름이 커져서 더 많은 혈액을 받아들였다가, 혈압이 내려갔을 때 내보낼 것이다. 혈관의 이러한 탄성은, 위에 언급된 우리의 전기회로 모델에 축전기 (capacitor) 를 추가하여 설명할 수 있다. 또한, 시간에 따라 혈액의 흐름 속도가 변한다는 사실을 고려한다면, 혈액의 밀도 $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 에 비례하는 유체의 관성도 무시할 수 없다. 이 관성은 우리의 전기 회로 모델에 인덕턴스 (inductance) 를 추가하여 기술할 수 있다. 하나의 혈관에 대한 등가 (전기) 회로가 (equivalent circuit) 가 그림 2 에 있다. 이 등가 회로에서 혈관의 탄성과 흐름 속도 변화를 나타내는 등가 전기용량 (equivalent capacitance) 과 등가 인덕턴스 (equivalent inductance) 는 다음과 같이 주어진다:

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{and} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q3-3

Korean (Korea)

h 는 혈관 벽의 두께, E 는 동맥의 영율 (Young's modulus)로 힘이 작용할 때 혈관 조직 크기의 변화율이다. 영율은 압력과 단위가 같으며, 동맥의 경우에 $E = 0.06 \text{ MPa}$ 정도 된다.

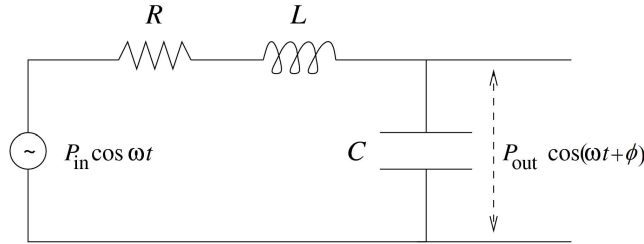


그림 2: 하나의 혈관에 대한 등가회로 (equivalent circuit).

A.3 혈압의 변화가 정상 범위 (stationary regime, 주기에 맞추어 규칙적으로 변한다는 뜻)에 있는 경우, 각진동수 ω 로 변하는 흐름 (flow)에 대해, 혈관 출구 (outlet)의 압력 진폭 (pressure amplitude) P_{out} 을 혈관 입구 (inlet)의 압력 진폭 P_{in} , 등가 저항 R , 인덕턴스 L , 전기용량 C 의 함수로 구하시오. 각진동수가 아주 낮을 때, 출구에서 압력 진동의 진폭이 P_{in} 보다 작아지게 만드는 $\eta, \rho, E, h, r, \ell$ 사이의 조건을 구하시오. 2.0pt

A.4 A.2의 혈관 네트워크에 대해, A.3에서 구한 조건을 만족하도록 동맥 벽의 두께 h 의 최대값을 구하시오. h 는 네트워크 안의 단계와 무관하다고 가정하라. 0.7pt

파트 B. 종양의 성장 (5.5 점)

종양의 성장은 매우 복잡한 과정으로 일어나는데, 이 때 세포 증식과 자연선택 같은 생물 메카니즘은 물리학과 밀접하게 연결될 수 있다. 이 문제에서는 종양의 성장에서 흔히 관찰되는 압력 증가를 단순한 모델로 바꾸어 알아본다.

한 무리의 정상 세포가 늘어나지 않는 막으로 둘러싸여 조직을 형성하고 있다. 둘러싼 막은 조직이 반지름 R 인 둥근 구 (그림 3) 모양으로 항상 유지되게 한다.

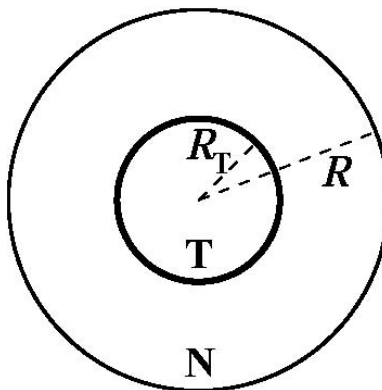
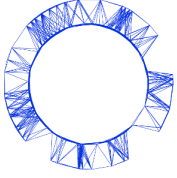


그림 3. 단순한 모델로 나타낸 종양.

처음에는 조직 (tissue)에 잔여 변형력 (residual stress)이 없다. 다시 말해, 조직의 모든 점에서 압력이 대기압과 같다. 시각 $t = 0$ 에서, 종양이 구의 중심에서부터 (정상 조직의 중심에서부터) 자라기 시작했고, 종양이 자라면서 조직 내부의 압력이 증가한다 (그림에서 N은 정상 조직, T는 종양을 나타낸다). 두 조직은 모두 압축될 수 있으며, 정상 조직의 밀도

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q3-4

Korean (Korea)

ρ_N 과 종양 조직의 밀도 ρ_T 는 압력에 대해 1 차함수로 증가한다:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

여기서, ρ_0 는 압력이 대기압일 때 조직의 밀도, p 는 조직의 압력과 대기압 (atmospheric pressure) 사이의 압력 차이, K_N, K_T 는 각각 정상 조직과 종양 조직의 압축률 (부피 탄성률) 이다. 일반적으로 종양이 더 딱딱하므로 종양이 더 큰 부피 탄성률을 가진다.

- B.1** 종양이 자라는 동안 정상 조직의 질량은 변하지 않는다. 종양의 부피와 총 조직의 부피의 비 $v = V_T/V$ 을 종양 질량 (M_T) 과 정상 조직의 질량 (M_N) 의 비 $\mu = M_T/M_N$, 부피 탄성률의 비 $\kappa = K_N/K_T$ 의 함수로 구하시오. 1.0pt

암을 치료할 때 종종 약물 치료, 방사선 치료와 함께 고열 치료를 사용한다. 고열 치료에서는 암세포만 선택하여 사람의 정상 체온인 37°C 보다 높은 43°C 이상으로 온도를 올려서 암세포를 죽인다. 연구자들은 현재 암 종양 세포와 결합할 수 있는 특별한 단백질로 덮인 나노 미터 크기의 탄소 튜브 (carbon nanotube) 들을 개발하고 있다. 이런 탄소 나노튜브들을 종양 조직 (tissue) 과 결합시키고 근적외선을 쬘이면, 나노튜브들이 주위 조직보다 훨씬 많이 근적외선을 흡수하므로 그것과 결합한 종양 세포의 온도가 올라가서 종양 조직이 선택적으로 죽게된다.

종양, 정상 세포, 이들을 둘러싼 주위의 조직이 일정한 열 전도도 k 를 가진다고 하자. 즉, 이 문제에서 주어진 조직의 구조에서는, 반지름 r 의 구 표면을 단위 시간과 단위 면적에 통과하는 에너지는 조직 안에서 온도 분포를 r 에 대해 미분한 것에 열 전도도 k 를 곱한 것과 같다. 나노튜브 (nanotube) 들은 종양 전체에 균일하게 분포하고 단위 부피당 일률 $\mathcal{P}$ 의 열 에너지를 전달할 수 있다. 종양에서 아주 먼 곳의 체온이 정상인의 체온과 같다고 가정하라.

- B.2** 종양의 크기가 변하지 않는 고정 상태 (stationary state) 에서 종양 중심의 온도를 $\mathcal{P}, k$, 사람의 정상 체온 (human body temperature) 값, 그리고 종양의 반지름 R_T 의 함수로 구하시오. 1.7pt

- B.3** 반지름 5.0 cm 의 종양 안에 있는 모든 종양세포들을 43.0°C 이상으로 온도를 높이는 데 필요한, 단위 부피당 최소 일률 $\mathcal{P}_{\min}$ 을 구하시오. 조직 (tissue) 의 열 전도도 $k = 0.60 \text{ W K}^{-1}\text{m}^{-1}$ 을 사용하시오. 0.5pt

종양이 문제 A.1 과 같은 구조를 가진 혈관 네트워크로 혈액을 공급받는다고 하자. 종양이 성장함에 따라 종양이 가하는 압력 p 가 혈관 벽이 가장 얇은 곳의 혈압 P_{cap} 보다 커지면, 혈관의 반지름이 작은 양이지만 δr 만큼 감소한다. 종양의 압력이 임계값 p_c (이 값은 혈관 반지름의 감소량 δr_c 에 대응) 에 도달하면 가장 얇은 혈관들이 파괴 (수축) 되어, 종양으로의 혈액 공급이 심각하게 위협받게 (감소하게) 된다. 혈압과 혈관 반지름의 변화는 다음과 같이 현상론적 관계로 표현할 수 있다:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

종양의 압력이 높아졌을 때 (단계 $N - 1$ 에 있는) 가장 작은 혈관들만 반지름이 감소한다고 생각하자.

- B.4** 종양의 압력이 선형 영역 (즉 $p - P_{\text{cap}}$ 이 매우 작은 경우) 에 있을 때, 가장 얇은 혈관들에 서 흐름 비율의 상대적 감소 $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$ 를 종양의 부피 비율 $v = V_T/V$, K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} , P_{cap} 의 함수로 표현하시오. 2.3pt