

Zero-length springs and slinky coils

A zero effective length spring (ZLS) is a spring for which the force is proportional to the spring's length, $F = kL$ for $L > L_0$ where L_0 is the minimal length of the spring as well as its unstretched length. Figure 1 shows the relation between the force F and the spring length L for a ZLS, where the slope of the line is the spring constant k .

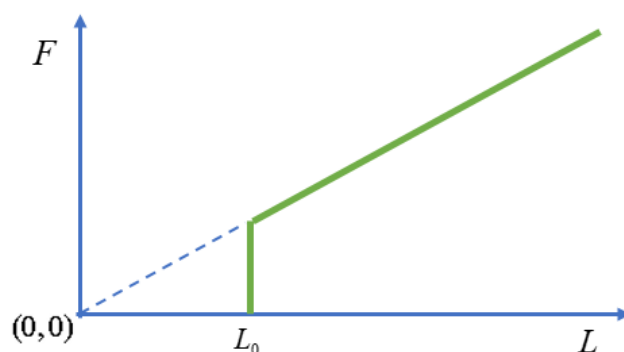


Figure 1: the relation between the force F and the spring length L

A ZLS is useful in seismography and allows very accurate measurement of changes in the gravitational acceleration g . Here, we shall consider a homogenous ZLS, whose weight Mg exceeds kL_0 . We define a corresponding dimensionless ratio, $\alpha = kL_0/Mg < 1$ to characterize the relative softness of the spring. The toy known as "slinky" may be (but not necessarily) such a ZLS.

Part A: Statics (3.0 points)

A.1 Consider a segment of length $\Delta\ell$ of the unstretched ZLS spring which is then stretched by a force F , under weightless conditions. What is the length Δy of this segment as a function of F , $\Delta\ell$ and the parameters of the spring? 0.5pt

A.2 For a segment of length $\Delta\ell$, calculate the work ΔW required to stretch it from its original length $\Delta\ell$ to a length Δy . 0.5pt

Throughout this question, we will denote a point on the spring by its distance $0 \leq \ell \leq L_0$ from the bottom of the spring when it is unstretched. In particular, for every point on the spring, ℓ remains unchanged as the spring stretches.

A.3 Suppose that we hang the spring by its top end, so that it stretches under its own weight. What is the total length H of the suspended spring in equilibrium? Express your answers in terms of L_0 and α . 2.0pt

Part B: Dynamics (5.5 points)

Experiments show that when the spring is hung at rest and then released, it gradually contracts from the top, while the lower part remains stationary (see Figure 2). As time advances, the contracting part moves as a solid chunk and accumulates additional turns of the spring, while the stationary part becomes shorter. Every point on the spring begins to move only when the moving part reaches it. The bottom end

of the spring starts moving only when the spring is fully collapsed and reaches its unstretched length L_0 . After that, the contracted spring continues falling straight downwards, without tumbling, as a rigid body under the influence of gravity.

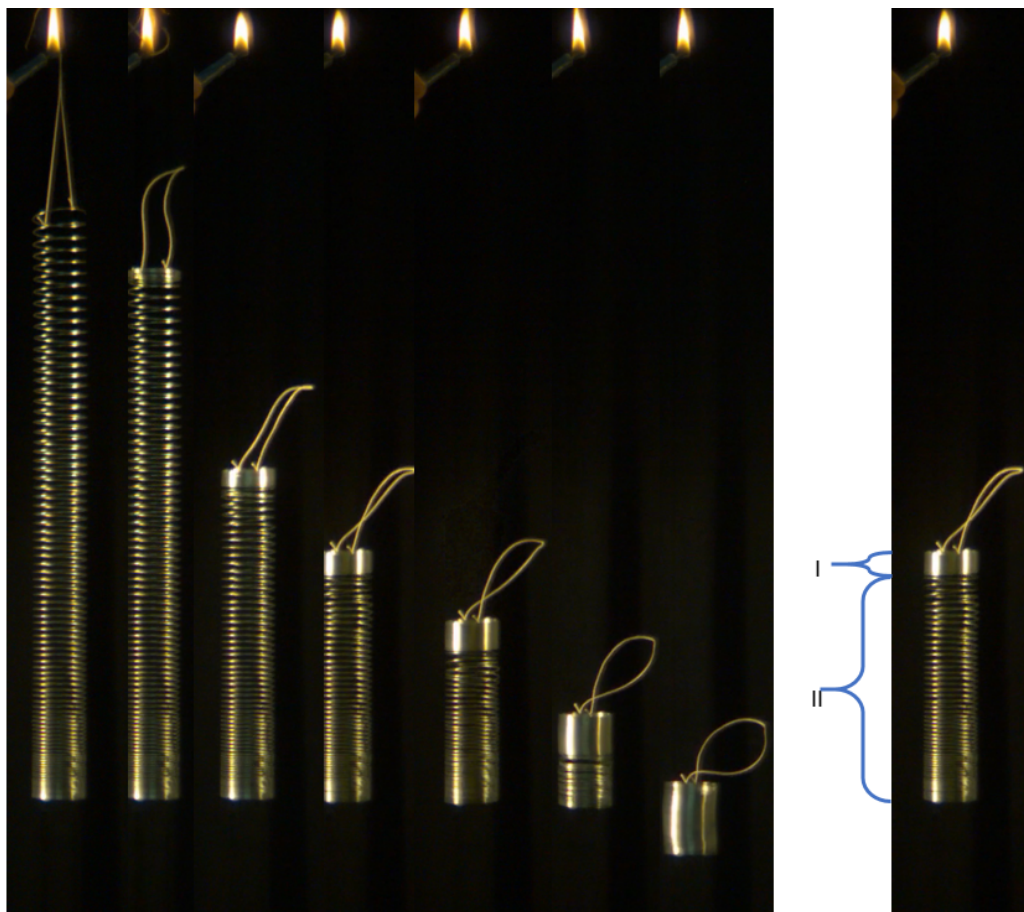
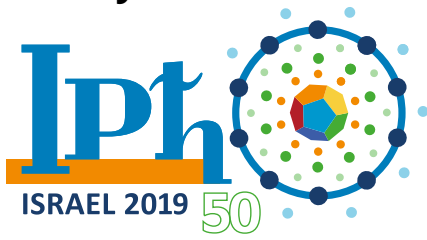


Figure 2: Left: a sequence of pictures taken during the free fall of slinky. Right: the moving part I and the stationary part II during the free fall of the spring.

In the remaining parts of the question, you are asked to base your solution on this described model. You may neglect air resistance, but you are not allowed to neglect L_0 .

- B.1** Calculate the time t_c it takes from the moment the spring is released, until it fully collapses back to its minimal length L_0 . Express your answer in terms of L_0 , g and α . 2.5pt
 Compute the numerical value of t_c for a spring with $k = 1.02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0.055 \text{ m}$ and $M = 0.201 \text{ kg}$, while taking g to be 9.80 m/s^2 .



- B.2** In this task ℓ is used to denote the coordinate of the boundary between parts I (in figure 2, the moving part) and II (the stationary part). At a certain moment, while a stationary part still exists its mass is $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$, and the moving part moves with uniform instantaneous velocity $v_I(\ell)$. Show that at this moment (while there exists a stationary part) the velocity of the moving part is $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. Express the constants A and B in terms of L_0 , g and α . 2.5pt

- B.3** Based on B.2, find the minimum speed $v_{\min}$ of the moving part of the spring in the course of its motion, after its release and before it hits the ground. Express your answer in terms of L_0 , α , A and B . 0.5pt

Part C: Energetics (1.5 points)

- C.1** Calculate the amount of mechanical energy Q that was lost by generating heat, from the moment the spring is released until just before the spring hits the ground. Express your answer in terms of L_0 , M , g and α . 1.5pt

The Physics of a Microwave Oven

This question discusses the generation of microwave radiation in a magnetron, and its use to heat up food. The microwave radiation is generated in a device called “magnetron”. Part A concerns the operation of the magnetron, while part B deals with the absorption of microwave radiation in food.

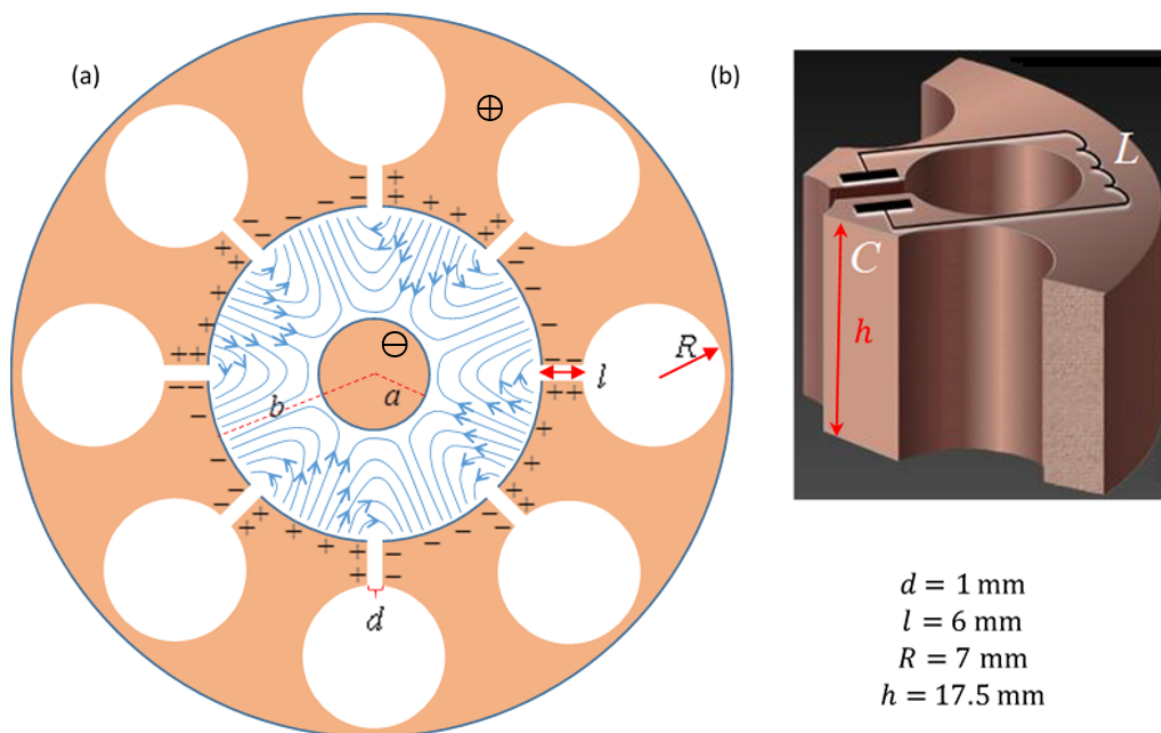


Figure 1

Part A: The structure and operation of a magnetron (6.6 points)

A magnetron is a device for the generation of microwave radiation, either in pulses (for radar applications), or continuously (e.g., in a microwave oven). The magnetron has a mode of self-amplifying oscillations. Supplying the magnetron with static (non-alternating) voltage quickly excites this mode. The microwave radiation thus created is transmitted out of the magnetron.

A typical microwave oven magnetron consists of a solid copper cylindrical cathode (with radius a) and a surrounding anode (with radius b). The latter has the shape of a thick cylindrical shell into which cylindrical cavities are drilled. These cavities are known as “resonators”. One of the resonators is coupled to an antenna which will transmit the microwave energy out; we will ignore the antenna in the following. All internal spaces are in vacuum. We will consider a typical magnetron with eight resonators, as depicted in Figure 1(a). The three-dimensional structure of a single resonator is shown in Figure 1(b). As indicated there, each of the eight cavities behaves as an inductor-capacitor (LC) resonator, with operating frequency $f = 2.45 \text{ GHz}$.

A static uniform magnetic field is applied along the magnetron's longitudinal axis, pointing out of the page in Figure 1(a). In addition, a constant voltage is applied between the anode (positive potential) and the cathode (negative potential). Electrons emitted from the cathode reach the anode and charge it, such that they excite an oscillation mode in which the sign of the charge is opposite between every two



adjacent resonators. The oscillation of the cavities amplify these oscillations.

The process described above creates an alternating electric field with the aforementioned frequency $f = 2.45$ GHz (blue lines in Figure 1(a); the static field is not plotted) in the space between the cathode and the anode, in addition to the static field caused by the applied constant voltage. In the steady state, the typical amplitude of the alternating electric field between the anode and the cathode is approximately $\frac{1}{3}$ of the static electric field there. The electron motion in the space between the cathode and the anode is affected by both the static and the alternating parts of the field. This causes electrons that reach the anode to transfer about 80% of the energy they acquire from the static field into the alternating field. A minority of the ejected electrons returns to the cathode and releases additional electrons, further amplifying the alternating field.

Each resonator can be thought of as a capacitor and an inductor, see Figure 1(b). The capacitance mainly arises from the planar parts of the resonator surface, while the inductance stems from the cylindrical part. Assume that the current in the resonator flows uniformly very close to the surface of its cylindrical cavity, and that the strength of the magnetic field generated by this current is 0.6 times that of an ideal infinite solenoid. The various lengths defining the resonator geometry are given in Figure 1(b). The vacuum permittivity and permeability are $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ and $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$, respectively.

- A.1** Use the above data to estimate the frequency f_{est} of a single resonator. (Your result may differ from the actual value, $f = 2.45$ GHz. Use the **actual** value in the remainder of the question.) 0.4pt

Task A.2 below does not deal with the magnetron itself, but helps to introduce some of the relevant physics. Consider an electron moving in free space under the influence of a uniform electric field directed along the negative y axis, $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$, and a uniform magnetic field directed along the positive z axis, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ (E_0 and B_0 are positive; $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ are unit vectors oriented in the conventional manner). Let us denote the electron velocity at time t by $\vec{u}(t)$. The drift velocity $\vec{u}_D$ of the electron is defined as its average velocity. We denote by m and $-e$ the mass and charge of the electron, respectively.

- A.2** In each of the following two cases, find $\vec{u}_D$. In addition, draw in the Answer Sheet the electron's trajectory (in the lab frame) during the time interval $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ if:
1. at $t = 0$ the electron velocity is $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
 2. at $t = 0$ the electron velocity is $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$.
- 1.5pt

We now resume our discussion of the magnetron. The distance between the cathode and the anode is 15 mm. Assume that, due to the aforementioned energy loss to the alternating fields, the maximal kinetic energy of each electron does not exceed $K_{\text{max}} = 800$ eV. The static magnetic field strength is $B_0 = 0.3$ T. The electron mass and charge are $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg and $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, respectively.

- A.3** Numerically estimate the maximal radius r of the electron motion trajectory in the reference frame in which this motion is approximately circular, considering this reference frame as approximately inertial. 0.4pt

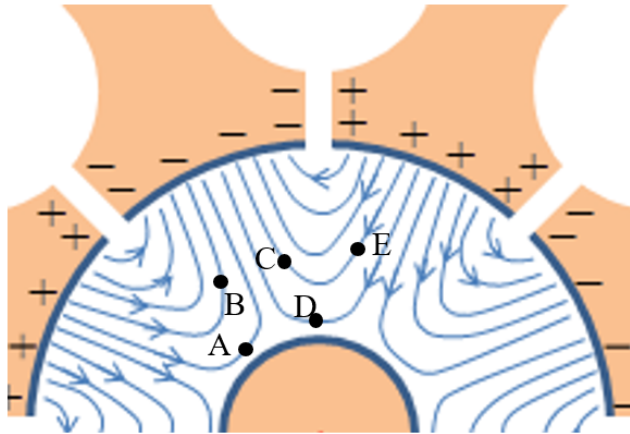


Figure 2

- A.4** Figure 2 depicts the alternating electric field lines between the anode and the cathode at a given moment in time (the static field is not plotted). Indicate in the Answer Sheet which of the electrons positioned at A,B,C,D and E will drift towards the anode, which will drift towards the cathode and which will drift at a direction perpendicular to the radius at that moment. 1.2pt

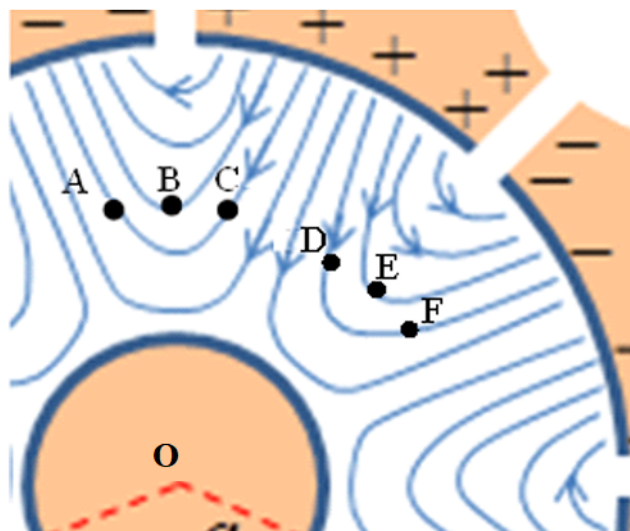


Figure 3

Figure 3 depicts the alternating electric field lines between the anode and the cathode (the static field is not plotted) at a given moment in time. The positions of six electrons at that moment are denoted by A, B, C, D, E and F. All electrons are at the same distance from the cathode.

- A.5** Consider the situation shown in Figure 3. For each of the six electron pairs AB, AC, BC, DE, DF, EF, indicate in the Answer Sheet whether their drift will cause the angle between their position vectors (measured from the cathode's center O) to increase or decrease at that moment. 1.2pt

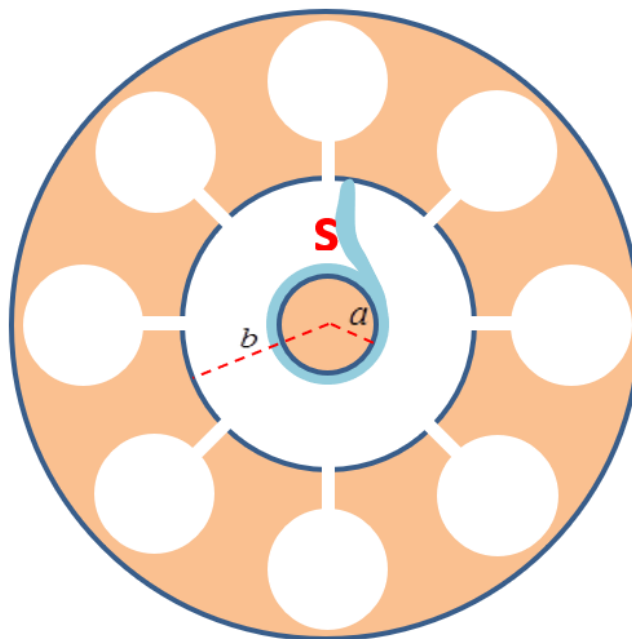


Figure 4

The pattern you have discovered in Task A.5 acts as a focusing mechanism, concentrating the electrons in the space between the cathode and anode into spokes. Figure 4 depicts one such spoke, denoted by S.

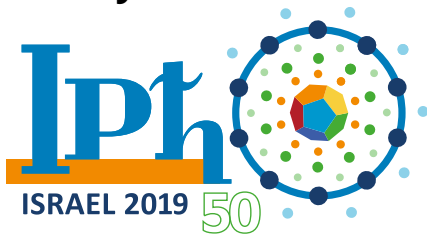
- A.6** Depict in the Answer Sheet the other spokes at that moment. Indicate by arrows their direction of rotation, and calculate their average angular velocity ω_s . 0.8pt

Make the approximation that the total electric field half-way between the cathode and the anode is equal to its average static value along a radial line from the cathode to the anode, and that the spokes are approximately radial in that region. The cathode and anode radii (a and b , respectively) are defined in Figure 4.

- A.7** Find an approximate expression for the static voltage V_0 required for operating the magnetron in the manner described. (The expression you will find gives an approximation for the minimal value required for the magnetron operation; the optimal voltage is somewhat higher.) 1.1pt

Part B: The interaction of microwave radiation with water molecules (3.4 points)

This part deals with the usage of microwave radiation (radiated by the magnetron antenna into the food chamber) for cooking, that is, heating up a lossy dielectric material such as water, either pure or salty



(which is our model for, say, soup).

An electric dipole is a configuration of two equal and opposite electric charges q and $-q$ a small distance d apart. The electric dipole vector points from the negative to the positive charge, and its magnitude is $p = qd$.

A time-dependent electric field $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ is applied on a single dipole of moment $\vec{p}(t)$ with constant magnitude $p_0 = |\vec{p}(t)|$. The angle between the dipole and the electric field is $\theta(t)$.

- B.1** Write expressions for both the magnitude of the torque $\tau(t)$ applied by the electric field on the dipole and the power $H_i(t)$ delivered by the field to the dipole, in terms of p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ and their derivatives. 0.5pt

Water molecules are polar, hence can be treated as electric dipoles. Due to the strong hydrogen bonds between water molecules in liquid water, one cannot treat them as independent dipoles. Rather, one should refer to the polarization vector $\vec{P}(t)$, which is the dipole moment density (average dipole moment per unit volume of an ensemble of water molecules). The polarization $\vec{P}(t)$ is parallel to the local applied alternating electric field (of the microwave radiation), $\vec{E}(t)$, and oscillates in time with an amplitude that is proportional to the amplitude of the local alternating electric field, but with a phase lag δ .

The local alternating electric field at a given location inside the water is $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$, where $\omega = 2\pi f$, giving rise to polarization $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$, where the dimensionless constant β is a property of water.

- B.2** Find an expression for the time-averaged power $\langle H(t) \rangle$ per unit volume absorbed by the water. 0.5pt
The time-average for a time dependent periodic variable $f(t)$ over its period T is defined as:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Let us now consider the propagation of the radiation through the water. The relative dielectric constant of water (at the electromagnetic field frequency) is ϵ_r , and the corresponding index of refraction of water is $n = \sqrt{\epsilon_r}$. The momentary energy density of the electric field is given by $\frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0 E^2$. The time-averaged energy density of the electric and magnetic fields are equal.

- B.3** Let us denote the time-averaged radiation energy flux density by $I(z)$ (average radiation power flow per unit area). Here z is the depth of penetration into the water, and the radiation propagates in the z direction. Find an expression for the dependence of the flux density $I(z)$ on z . The flux density at the water surface, $I(0)$, may appear in your result. 1.1pt

The phase lag δ is the result of the interaction between the water molecules. It depends on the dimensionless dielectric loss coefficient ϵ_ℓ and the relative dielectric constant ϵ_r (both of which depend on the radiation angular frequency ω and the temperature) via the relation $\tan \delta = \epsilon_\ell / \epsilon_r$. When δ is small enough, the electric field at penetration depth z into the water is given by:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

where $k_0 = \omega/c$ and $c = 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ is the speed of light in vacuum.

- B.4** Employ the approximation $\tan \delta \approx \sin \delta$ and find an expression for the coefficient β defined in Task B.2 in terms of the other parameters. 0.6pt

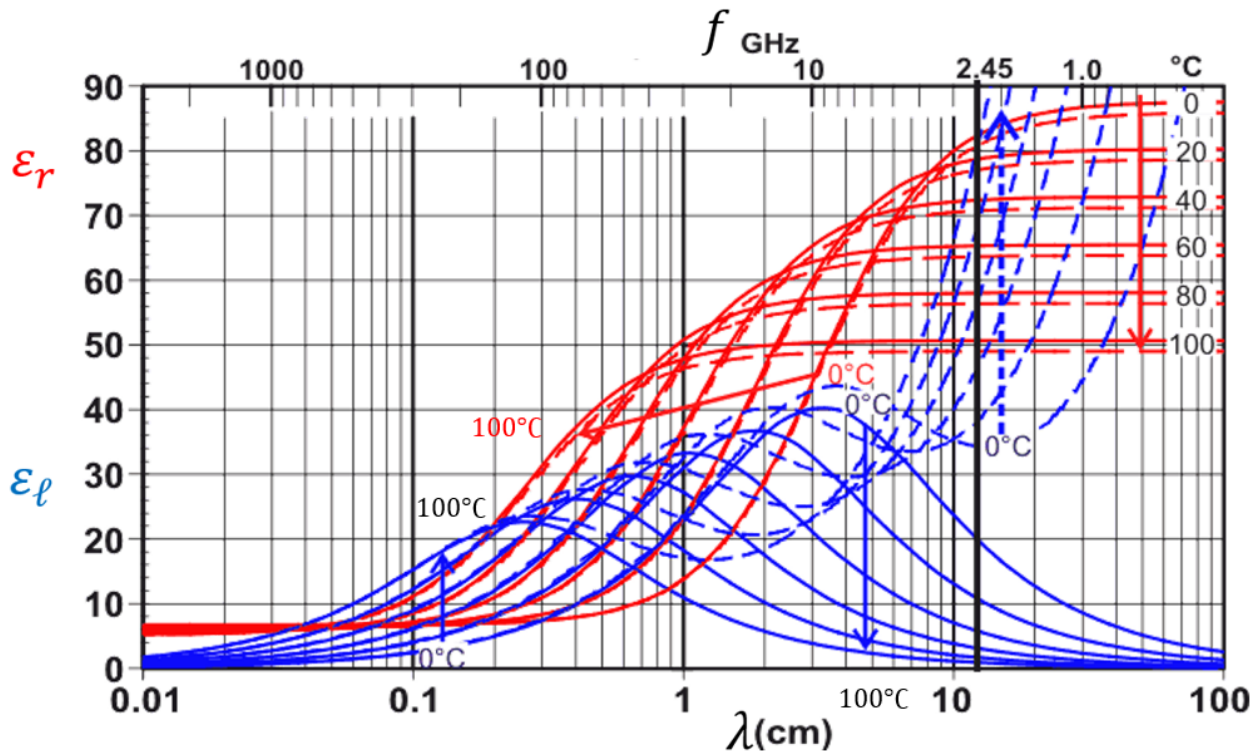


Figure 5. The arrows indicate the variation with temperature across the curves from 0°C to 100°C.

Figure 5 depicts ϵ_l (blue) and ϵ_r (red) for both pure water (solid lines) and a dilute solution of salt in water (dashed lines) as functions of wavelength or frequency, at several different temperatures. The angular frequency $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ is indicated by a bold vertical line. Below we will consider microwave radiation at this frequency only.

- B.5** Use Figure 5 to address the following questions: 0.7pt
1. For water at 20°C, find the penetration depth $z_{1/2}$ at which the power per unit volume is reduced to half of its value at $z = 0$.
 2. Indicate in the Answer Sheet whether the penetration depth of the microwave radiation into water increases, decreases or remains the same with temperature.
 3. Indicate in the Answer Sheet whether the penetration depth of the microwave radiation into soup (dilute salt solution) increases, decreases or remains the same with temperature.

Thermoacoustic Engine

A thermoacoustic engine is a device that converts heat into acoustic power, or sound waves - a form of mechanical work. Like many other heat machines, it can be operated in reverse to become a refrigerator, using sound to pump heat from a cold to a hot reservoir. The high operating frequencies reduce heat conduction and eliminate the need for any working chamber confinement. Unlike many other engine types, the thermoacoustic engine has no moving parts except the working fluid itself.

The efficiencies of thermoacoustic machines are typically lower than other engine types, but they have advantages in set up and maintenance costs. This creates opportunities for renewable energy applications, such as solar-thermal power plants and utilization of waste heat. Our analysis will focus on the creation of acoustic energy within the system, ignoring the extraction or conversion for powering external devices.

Part A: Sound wave in a closed tube (3.7 points)

Consider a thermally insulating tube of length L and cross-sectional area S , whose axis lies along the x direction. The two ends of the tube are located at $x = 0$ and $x = L$. The tube is filled with an ideal gas and is sealed on both ends. At equilibrium, the gas has temperature T_0 , pressure p_0 and mass density ρ_0 . Assume that viscosity can be ignored and that the gas motion is only in the x direction. The gas properties are uniform in the perpendicular y and z directions.

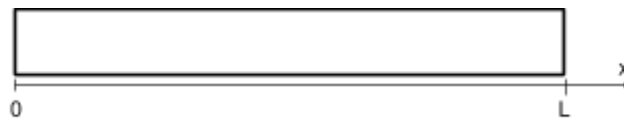


Figure 1

- A.1** When a standing sound wave forms, the gas elements oscillate in the x direction with angular frequency ω . The amplitude of the oscillations depends on each element's equilibrium position x along the tube. The longitudinal displacement of each gas element from its equilibrium position x is given by 0.3pt

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(please note the u here describes the displacement of a gas element)

where $a \ll L$ is a positive constant, $k = 2\pi/\lambda$ is the wavenumber and λ is the wavelength. What is the maximum possible wavelength $\lambda_{\max}$ in this system?

We will assume throughout the question an oscillation mode of $\lambda = \lambda_{\max}$.

Now, consider a narrow parcel of gas, located at rest between x and $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). As a result of the displacement wave of Task A.1, the parcel oscillates along the x axis and undergoes a change in volume and other thermodynamic properties.

Throughout the following tasks assume all these changes to the thermodynamic properties to be small compared to the unperturbed values.

- A.2** The parcel volume $V(x, t)$ oscillates around the equilibrium value of $V_0 = S\Delta x$ and has the form 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Obtain an expression for $V_1(x)$ in terms of V_0 , a , k and x .

- A.3** Assume that the total pressure of the gas, as a result of the sound wave, takes the approximate form 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

Considering the forces acting on the parcel of gas, compute the amplitude $p_1(x)$ of the pressure oscillation to leading order, in terms of the position x , the equilibrium density ρ_0 , the displacement amplitude a and the wave parameters k and ω .

At acoustic frequencies, the thermal conductivity of the gas can be neglected. We will treat the expansion and contraction of gas parcels as purely adiabatic, satisfying the relation $pV^\gamma = \text{const}$, where γ is the adiabatic constant.

- A.4** Use the relation above and the results of the previous tasks to obtain an expression for the speed of sound waves $c = \omega/k$ in the tube, to first order. Express your answer in terms of p_0 , ρ_0 and the adiabatic constant γ . 0.3pt

- A.5** The change in the gas temperature due to the adiabatic expansion and contraction, as a result of the sound wave, takes the form: 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Compute the amplitude $T_1(x)$ of the temperature oscillations in terms of T_0 , γ , a , k and x .

- A.6** For the purpose of this task only, we assume a weak thermal interaction between the tube and the gas. As a result, the standing sound wave remains almost unchanged, but the gas can exchange a small amount of heat with the tube. The heating due to viscosity can be neglected. For each of the points in Figure 2 (A, C at the edges of the tube, B at the center) state whether the temperature of the tube at that point will increase, decrease or remain the same over a long time. 1.2pt

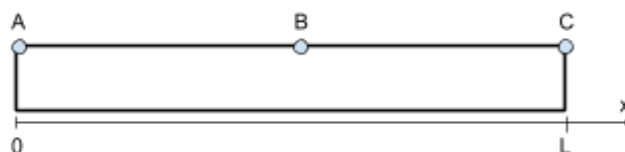


Figure 2

Part B: Sound wave amplification induced by external thermal contact (6.3 points)

A stack of thin well-spaced solid plates is placed inside the tube. The plates of the stack are aligned in parallel to the tube axis, so as not to obstruct the flow of gas along the tube. The center of the stack is positioned at $x_0 = L/4$, and spans a width of $\ell \ll L$ along the tube axis, filling its entire cross section. The right and left edges of the stack are held at temperature difference τ . The left edge of the stack, at $x_H = x_0 - \ell/2$, is held by an external thermal reservoir at temperature $T_H = T_0 + \tau/2$, and at the same time, its right edge, at $x_C = x_0 + \ell/2$, is held at a temperature $T_C = T_0 - \tau/2$.

The plate stack allows a slight longitudinal heat flow to maintain a constant temperature gradient between its edges, such that $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell} \tau$.

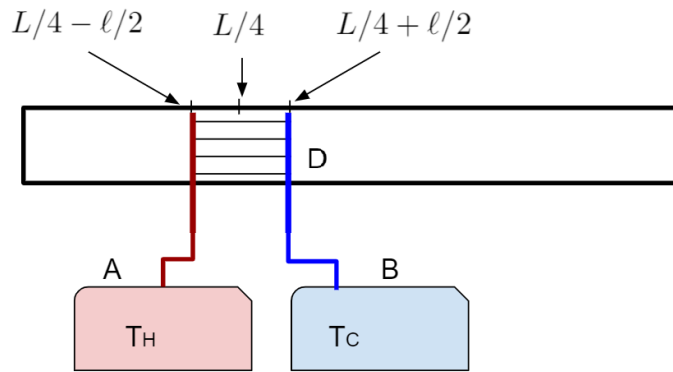
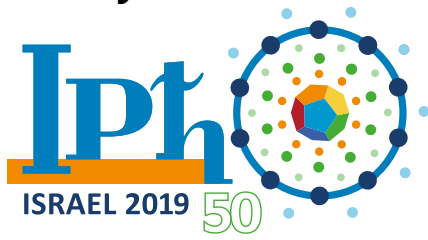


Figure 3. A sketch of the system. (A) and (B) denote the hot and cold heat reservoirs respectively. (D) denotes the stack.

To analyze the effect of the thermal contact between the plate stack and the gas on the sound waves in the tube, make the following assumptions:

- As in the previous part, all changes to the thermodynamic properties are small compared to the unperturbed values.
- The system operates in the fundamental standing-wave mode of the longest possible wavelength. It is only slightly modified by the presence of the plate stack.
- The stack is much shorter than the wavelength $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$, and can be positioned far enough from both displacement and pressure nodes, so that the displacement $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ and the pressure $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ may be considered uniform over the entire length of the stack.
- We may neglect any edge effects, caused by the parcels moving in and out of the stack.
- The temperature difference between the ends of the plate stack, i.e. between the hot and the cold reservoirs, is small compared to the absolute temperature: $\tau \ll T_0$.
- Heat conduction through the stack, through the gas, and along the tube are all negligible. The only significant sources of heat transfer are convection due to the motion of the gas and conduction between the gas and the stack.



- B.1** Consider a specific parcel of gas in the region of the stack, originally at $x_0 = L/4$. As the parcel moves within the stack, the local temperature of the nearby part of the stack changes as follows: 0.4pt

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Express T_{st} in terms of a , τ and ℓ .

- B.2** Above which critical temperature difference τ_{cr} will the gas be conveying heat from the hot reservoir to the cold one? Express τ_{cr} in terms of T_0 , γ , k and ℓ . 1.0pt

- B.3** Obtain the general approximate expression for the heat flow $\frac{dQ}{dt}$ into a small parcel of gas as a linear function of its volume and pressure change rates. Express your answer in terms of the rate of volume change $\frac{dV}{dt}$, the rate of pressure change $\frac{dp}{dt}$, the unperturbed equilibrium values of parcel pressure and volume p_0 , V_0 and the adiabatic index γ . (You may use the expression for the molar heat capacity at constant volume $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$, where R is the gas constant.) 0.8pt

The limited heat flow rate between the parcel and the stack causes a phase difference between the pressure and volume oscillations of the parcel. We will see how this generates work.

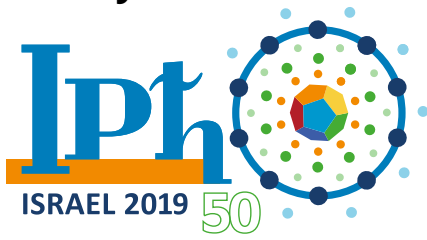
Let the heat flux into the parcel from the stack be proportional to the temperature difference between the parcel and the neighboring element of the stack, given approximately by $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$. Here T_1 and T_{st} are the temperature oscillation amplitudes of the gas parcel and the neighbouring stack from Tasks A.5 and B.1, respectively, and $\beta > 0$ is a constant. Assume that at the machine's operating frequencies, the change in gas temperature as a result of this heat flow is insignificant compared to both T_1 and T_{st} .

- B.4** In order to calculate work, we will consider a change to the volume of the moving parcel as a result of the thermal contact with the stack. Let us write the pressure and the volume of the parcel under the stack's influence in the form: 1.9pt

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Given p_a and p_b , find the coefficients V_a and V_b . Express your answer in terms of p_a , p_b , p_0 , V_0 , γ , τ , τ_{cr} , β , ω , a and ℓ .

- B.5** Obtain an approximate expression for the acoustic work per unit volume w produced by the gas parcel over one cycle. Integrate over the volume of the stack to obtain the total work W_{tot} generated by the gas over one cycle. Express W_{tot} in terms of γ , τ , τ_{cr} , β , ω , a , k and S . 0.8pt



B.6 Obtain an approximate expression for the heat Q_{tot} transported from the left side of the plane $x = x_0$ to the right, over a cycle. Express your answer in terms of τ , τ_{cr} , β , ω , a , S , ℓ . (Hint: you may use the formula $j = Q \frac{du}{dt}$ for the heat current due convection.) 0.8pt

B.7 Find the efficiency η of the thermoacoustic engine. The efficiency is defined as the ratio of the generated acoustic work to the heat drawn from the hot reservoir. Express your answer in terms of the temperature difference τ between the hot and the cold reservoir, the critical temperature difference τ_{cr} and the Carnot efficiency $\eta_c = 1 - T_C/T_H$. 0.6pt



일반 지시사항: 이론 시험

이론시험은 5 시간동안 진행되며, 총 30 점입니다.

시험의 시작과 끝은 벨 소리로 안내됩니다. 시험 시작을 알리는 신호 벨이 울리기 전에 문제가 들어 있는 봉투를 열어서는 안 됩니다. 매 시간마다 경과된 시간이 안내될 것이며, 시험의 종료를 알리는 벨소리가 울리기 15 분 전에도 안내될 것입니다.

시험 응시 중

- 제공된 펜만을 사용하십시오.
- 각 문제 번호와 일치하는 답안지에 (A 로 표시됨) 마지막 답을 적으십시오. 각각의 문제에 여분의 빈 계산용지 (W 로 표시됨) 에 자세한 풀이를 적으십시오. **현재 풀고 있는 문제번호와 풀이과정을 작성 하는 계산용지가 맞는지 확인하십시오.(상단의 문제 번호를 확인하십시오.)** 어느 계산용지이든 쓴 것 중 채점이 되지 않기를 원하는 것은 X 표시를 하십시오. 각 계산용지의 앞면만 활용하십시오.
- 풀이과정을 작성할 때 최대한 간결하게 작성하십시오: 방정식을 사용하거나, 논리 연산자를 사용하고, 생각하는 내용을 간단하게 작성하십시오. 긴 문장을 쓰는 것을 피하십시오.
- 전 단계의 문제를 풀지 않았다하더라도, 다음 단계의 문제를 풀 수도 있습니다.
- 허가 없이 시험 장소를 떠날 수 없습니다. 화장실에 가려고 하면 "WC", 물이 마시고 싶다면 "H2O", 종이가 더 필요하거나 다른 도움이 필요하다면, "Help!" 깃발을 들어 감독관에게 알려 주시기 바랍니다.

시험 종료 후

- 시험이 끝나는 즉시 답안 작성을 중지해야 합니다.
- 각 문제에 대해 작성한 용지를 다음 순서대로 정렬합니다: 겉장 (cover sheet, C), 문제지 (questions, Q), 답안지 (answer sheets, A), 계산용지 (work sheet, W), 추가용지 (extra sheet, Z)
- 한 문제에 해당되는 모든 계산용지들은 해당 문제의 봉투에 함께 넣으세요. 또한 빈 종이도 함께 제출하세요. 수험 번호가 각 봉투의 투명한 창을 통해 보일 수 있게 넣으십시오. 일반 지시사항 페이지는 큰 봉투 안에 넣으십시오. 어떠한 종이도 시험장 밖으로 가지고 나갈 수 없습니다.
- 사용한 필기구를 책상위에 그대로 두고 나가세요.
- 봉투가 수거될 때 까지 책상에서 대기하십시오. 봉투가 수거되면 감독관이 시험장 밖으로 안내해줄 것입니다.

유효 길이가 0 인 스프링과 슬링키

$L > L_0$ 일때 $F = kL$ 를 만족하는 유효 길이가 0 인 스프링 (zero effective length spring; ZLS) 이 있다. 여기서 L_0 는 늘어나지 않았을 때 스프링의 최소길이를 의미한다. 그림 1 은 유효 길이가 0 인 스프링 (ZLS) 에 대한 힘 F 와 스프링의 길이 L 의 관계를 나타낸다. 직선의 기울기는 용수철 상수 k 이다.

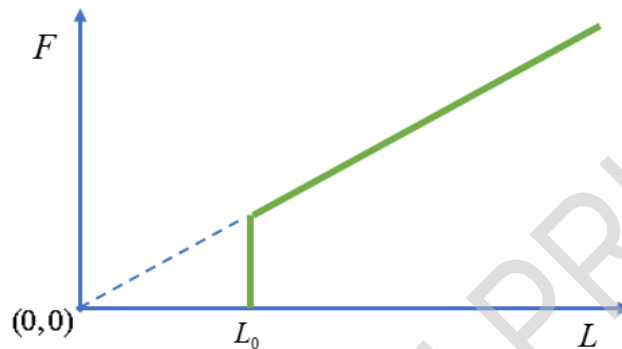


그림 1 : 힘 F 와 스프링의 길이 L 사이의 관계

ZLS 는 지진계를 만드는데 유용하게 사용되며, 이것으로 또한 중력가속도 g 의 변화를 매우 정확하게 측정할 수 있다. 본 문제에서는 스프링의 무게 Mg 가 kL_0 보다 크며 균일한 (homogenous) ZLS 를 고려한다. 스프링의 상대적 부드러움 (softness) 를 나타내기 위해 차원이 없는 비율 $\alpha = kL_0/Mg < 1$ 를 정의한다. (반드시 그렇지는 않지만) 슬링키 (slinky) 는 ZLS 의 한 예라 할 수 있다.

파트 A : 정지 상태 (Statics) (3.0 점)

A.1 늘어나지 않은 상태의 ZLS 스프링에서 길이가 $\Delta\ell$ 인 일부분을 생각하자. 힘 F 를 작용했을 때 이 부분의 길이 Δy 를 F , $\Delta\ell$ 과 용수철 상수로만 나타내시오. (단, 중력은 작용하지 않는다.) 0.5pt

A.2 위와 같이 중력을 무시할 때, 길이가 $\Delta\ell$ 인 ZLS 의 일부분에 대해 원래의 길이 $\Delta\ell$ 로부터 길이가 Δy 가 될 때까지 힘이 한 일 ΔW 을 계산하시오. 0.5pt

이후로 본 문제 전체에서 스프링의 각 지점을 특정하기 위한 변수로서 스프링이 늘어나지 않은 상태에서 바닥으로부터의 위치 ℓ ($0 \leq \ell \leq L_0$) 을 사용한다. 따라서 스프링이 늘어난다 하더라도 스프링 각 지점을 나타내는 변수인 ℓ 은 바뀌지 않는 값이다.

A.3 스프링의 위 끝을 매달고 스프링이 자체 무게에 의해 늘어나도록 하였다. 매달린 스프링이 평형상태에 있을 때, 전체 길이 H 는 얼마인가? L_0 와 α 를 이용하여 표현하시오. 2.0pt

파트 B : 움직이는 상태 (Dynamics) (5.5 점)

그림은 매달린 상태로 정지한 스프링을 자유롭게 놓았을 때 움직임을 보여준다. 스프링의 위쪽 부분은 점차 수축하지만 아래쪽 부분은 정지 상태를 유지한다 (그림 2 참조). 수축된 부분은 한 덩어리처럼 움직이며, 시간이 지남에 따라 스프링의 코일이 하나하나 더해지면서 수축 부분이 커진다. 스프링 코일의 모든 점은 위쪽에서 수축된 부분이 도달한 후에야 움직이기 시작한다. 반면, 정지 상태에 머물러 있는 부분은 점점 짧아진다. 스프링 바닥 (bottom end) 은 전체 스프링이 수축되어 늘어나지 않은 최초 길이 L_0 가 되었을 때 움직이기 시작한다. 그 후에, 중력의 영향으로 수축된 스프링은 회전하지 않으며 강체처럼 똑바로 떨어진다.

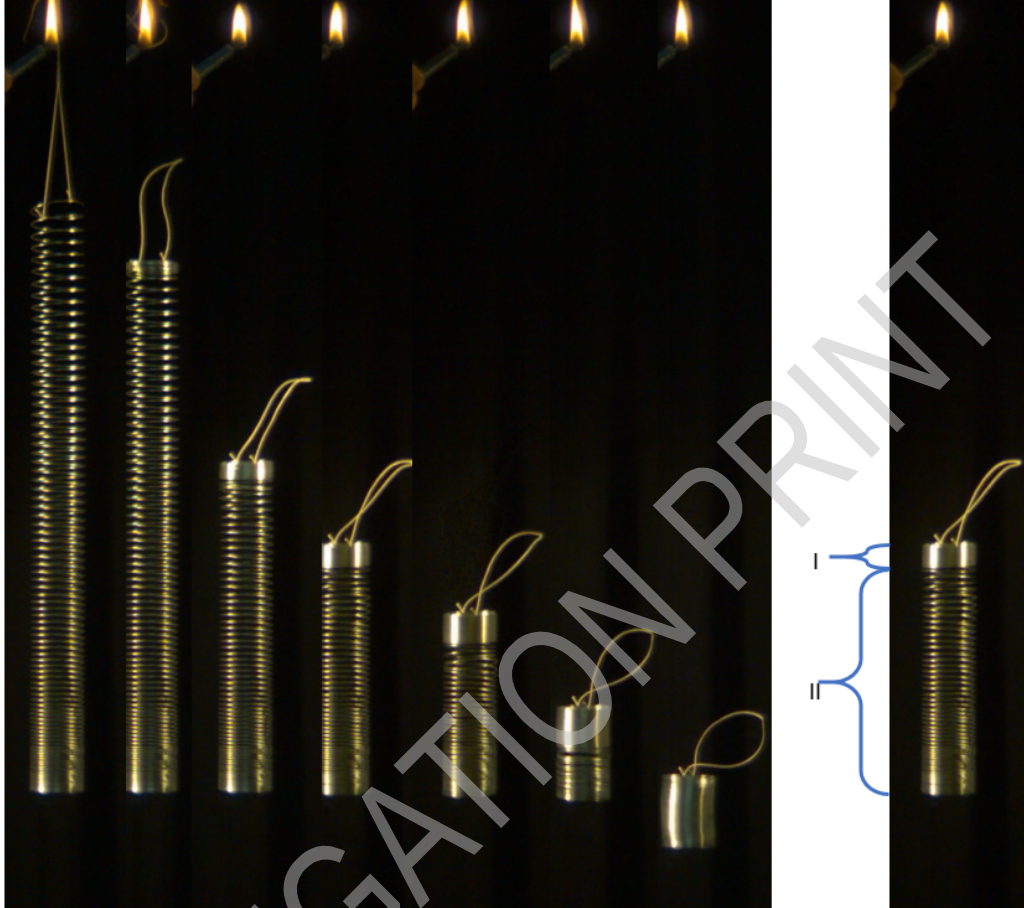


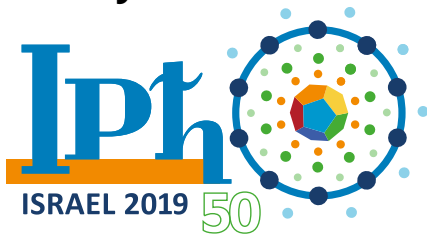
그림 2 왼쪽 그림: 자유낙하하는 스프링을 찍은 사진을 시간순으로 배열한 그림. 오른쪽 그림: 스프링이 자유 낙하하는 동안 움직이는 부분 I과 고정된 부분 II.

아래 문제에서는 위에서 설명한 모델을 바탕으로 답을 구해야한다. 공기 저항은 무시할 수 있지만, L_0 는 무시하면 안된다.

- B.1** 매달려있던 스프링이 떨어지기 시작하여 최소의 길이 L_0 로 수축될 때까지 걸리는 시간 t_c 를 L_0, g 와 α 를 이용하여 표현하시오. 이를 이용해서 스프링의 $k = 1.02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0.055 \text{ m}$, $M = 0.201 \text{ kg}$ 이고 g 가 9.80 m/s^2 일 때, t_c 의 값을 계산하시오. 2.5pt

- B.2** 이 문제에서 ℓ 은 부분 I(그림 2 에서 움직이는 부분 (moving part)) 과 부분 II(그림 2 에서 정지 상태인 부분 (stationary part)) 가 만나는 경계선의 좌표로, 앞에서 정의한 바와 같이 늘어나지 않은 상태를 기준으로 정한 위치이다. 특정 순간에, 정지 상태인 부분이 여전히 존재하며 그 질량은 $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$ 이고, 움직이는 부분은 균일한 순간 속도 $v_I(\ell)$ 로 움직인다. 이 때 (여전히 정지 상태에 있는 부분이 남아 있을 때) 움직이는 부분의 속도가 $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$ 임을 보이시오. 상수 A 와 B 는 L_0, g, α 를 이용하여 나타내시오. 2.5pt

- B.3** 스프링을 놓았을 때부터 스프링이 땅에 닿을 때까지의 움직이는 부분 (moving part) 의 속도는 변한다. B.2 의 결과를 이용하여 최소 속도 $v_{\min}$ 를 구하시오. 답을 L_0, α, A, B 를 이용하여 표현하시오. 0.5pt



파트 C: 에너지 구하기 (Energetics) (1.5 points)

- C.1** 스프링을 놓았을 때부터 스프링이 땅에 닿기 직전까지 열 에너지로 변환되어 손실되는 역학적 에너지 Q 의 양을 계산하시오. 답을 L_0, M, g, α 를 이용하여 표현하시오. 1.5pt

DELEGATION PRINT

전자레인지의 물리학

이 문제에서는 전자레인지에서 마이크로파 복사 (microwave radiation) 의 발생과, 음식을 가열하는데 이를 이용하는 것에 대해 논의한다. 마이크로파 복사는 ”마그네트론 (magnetron)” 이라 불리는 장치에서 발생된다. 파트 A 는 마그네트론의 작동과 관련되며, 파트 B 는 음식에서 마이크로파의 흡수를 다룬다.

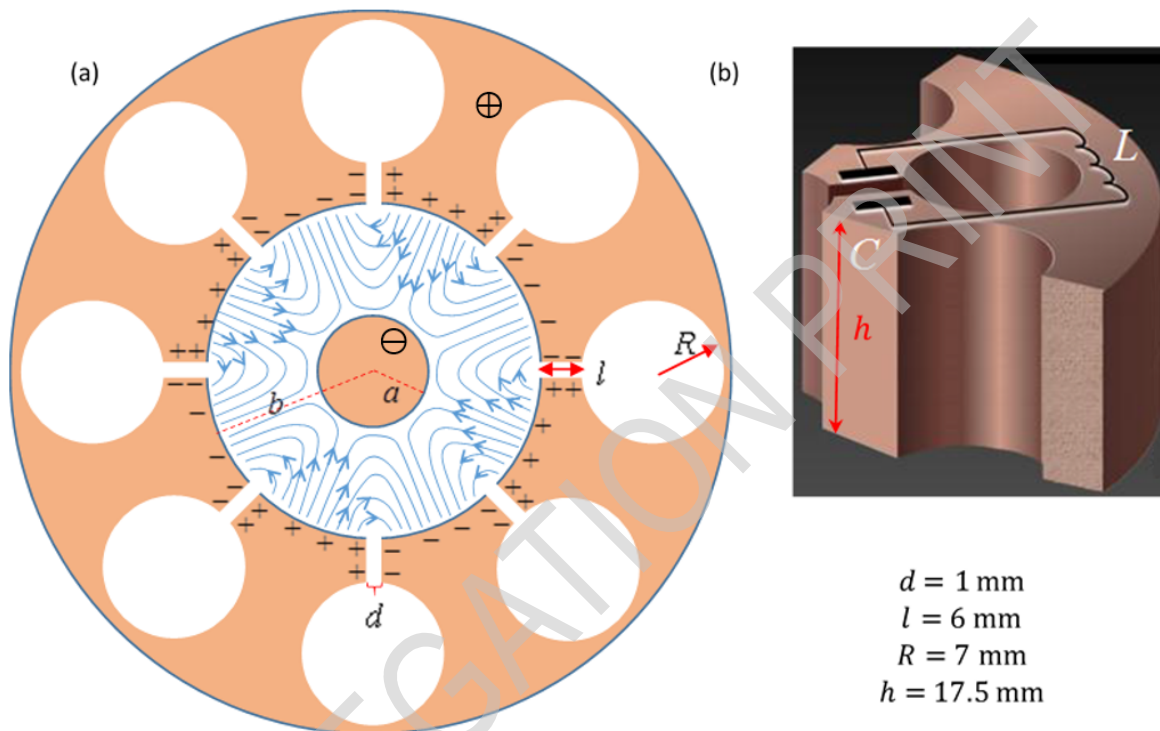


그림 1

파트 A : 마그네트론의 구조와 작동 (6.6 점)

마그네트론은 펄스 형태 (예, 레이더에 응용) 또는 연속적 (예, 전자레인지에 응용) 으로 마이크로파를 만들어내는 장치이다. 마그네트론은 자가증폭 진동 (self-amplifying oscillation) 모드를 가지고 있다. 마그네트론에 정적인 (직류) 전압을 걸면, 금방 이러한 자가증폭 진동 모드가 여기 (excited) 되어 특정한 진동수의 마이크로파가 발생된다. 이렇게 생성된 마이크로파 복사는 마그네트론 밖으로 전달 (transmitted) 된다.

전형적인 전자레인지의 마그네트론은 구리로 된 원통형 음극 (반지름 a) 과 이를 둘러싸는 양극 (반지름 b) 으로 구성된다. 양극은 두꺼운 원통 껍질 형태로, 드릴로 뚫은 원통 모양의 여덟 개의 공동 (cavity) 을 가지고 있다. 이러한 공동은 마이크로파 ”공진기 (resonator)” 역할을 한다. 공진기들 중 하나는 마이크로파 에너지를 밖으로 전달하는 안테나에 연결되는데 문제에서는 안테나를 무시한다. 그림 1 (a) 과 같이 8 개의 공진기가 있는 일반적인 마그네트론을 고려하자. 공진기 1 개의 3 차원 구조는 그림 1 (b) 과 같다. 여기서 모든 내부 공간은 진공 상태이다. 그림에 표시된 것과 같이, 8 개의 공동은 각각 공명 진동수 $f = 2.45 \text{ GHz}$ 인 인덕터-축전기 (LC) 공진기로 작동한다.

마그네트론의 길이 방향 축을 따라 일정하고 균일한 자기장이 가해지며, 그림 1(a) 에서 자기장의 방향은 종이면에서 나오는 방향이다. 또한, 양극 (양전위) 과 음극 (음전위) 사이에 일정한 전압이 가해진다. 음극에서 방출된 전자는 양극에 도달하는데, 두 인접한 공진기마다 전하의 부호가 반대가 되도록 양극을 대전 (charge) 시키고 시간에 따라 전극의 부호가 번갈아 가며 바뀌는 진동 모드를 여기한다. 공진기의 발진 혹은 공명은 이러한 진동을 증폭시킨다.

양극과 음극 사이에 가해진 직류 전압에 의해 생기는 직류 (static) 전기장에 더해, 진동수 $f = 2.45 \text{ GHz}$ 인 교류 (alternating) 전기장 (그림 1 (a) 의 파란색 선; 직류 전기장은 그리지 않음) 이 만들어 진다. 정상 상태 (steady state) 에

서, 이러한 교류 전기장의 진폭은 직류 전기장의 약 $\frac{1}{3}$ 이다. 음극과 양극 사이 공간에서 전자는 직류 전기장과 교류 전기장의 영향을 동시에 받아 운동한다. 이 과정에서 결과적으로 음극으로부터 양극에 도달하는 전자가 직류 전기장에 의해 얻는 에너지의 약 80% 가 교류 전기장으로 전이 (transfer) 된다. 음극에서 방출된 전자 중 적은 수는 다시 음극으로 되돌아 오기도 하는데 이는 추가로 전자를 방출시킴으로써 교류 전기장을 더욱 증폭시킨다.

각 공진기는 축전기와 인덕터가 연결된 회로로 생각할 수 있다 (그림 1 (b) 참조). 전기용량 (capacitance) 은 주로 공진기 표면의 평평한 (planar) 부분에서 생기고, 인덕턴스 (inductance) 는 주로 원통 부분에서 생긴다. 공진기에서 전류가 원통형 공동 표면을 따라 균일하게 흐르고, 이 전류에 의해 생성되는 자기장의 세기는 무한한 길이의 이상적인 솔레노이드에서의 자기장 세기의 0.6 배라고 가정하라. 공진기의 모양과 길이는 그림 1 (b) 에 주어져 있다. 진공의 유전율은 $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ 이고, 투자율은 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$ 이다.

- A.1** 위의 데이터를 이용하여 개별 공진기의 진동수 f_{est} 를 추정하시오. (계산 결과는 실제 값인 0.4pt $f = 2.45 \text{ GHz}$ 와 다를 수 있다. 뒷 부분의 문제에서는 **실제** 값을 사용하시오.)

아래의 A.2 에서는 마그네트론 자체에 대해서 다루지는 않지만, 이에 관련된 물리를 이해하는데 도움이 된다. y 축 음의 방향으로 균일한 전기장 $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$ 과 z 축 양의 방향으로 균일한 자기장 $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ 이 걸려있는 자유공간에서 운동하는 전자를 고려하자 (E_0 과 B_0 는 양수이고 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 는 통상적인 단위벡터이다). 시간 t 에서 전자의 속도를 $\vec{u}(t)$ 라 하자. 일정한 속도로 흘러갈 때를 지칭하는 전자의 표류 속도 (drift velocity) $\vec{u}_D$ 는 평균 속도로 정의되며 m 과 $-e$ 는 각각 전자의 질량과 전하량이다.

- A.2** 아래의 두 경우에 대해 $\vec{u}_D$ 를 각각 구하시오. 또한 답지에 시간 간격 $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ 동안 (실험 1.5pt 실 좌표계에서) 전자의 궤적을 평면 상에 수치를 표시하여 정확히 그리시오.
1. $t = 0$ 일 때 전자의 속도가 $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$ 인 경우
 2. $t = 0$ 일 때 전자의 속도가 $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$ 인 경우

이제 마그네트론에 대한 논의를 계속해보자. 음극과 양극 사이의 거리는 15 mm 이다. 앞에서 언급한 교류 전기장으로 인한 에너지 손실 때문에 각 전자의 최대 운동에너지가 $K_{\text{max}} = 800 \text{ eV}$ 를 초과하지 않는다고 가정하자. 직류 (static) 자기장의 세기는 $B_0 = 0.3 \text{ T}$ 이다. 전자의 질량은 $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ 이고, 전하량은 $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ 이다.

- A.3** 전자의 운동이 근사적으로 원운동으로 보이는 기준 좌표계를 생각하고 이 기준 좌표계가 근사적으로 관성 좌표계라고 가정하시오. 근사적으로 전자의 표류 속도만 고려하면 된다는 것을 확인해 보기 위해, 이 기준 좌표계에서 전자 운동 경로의 최대 반지름 r 의 값을 계산하시오. 0.4pt

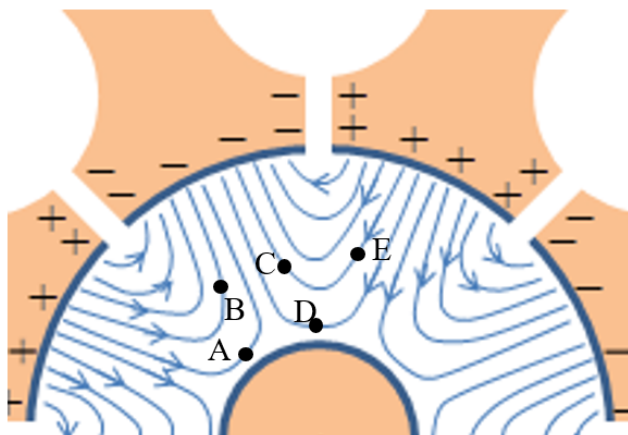


그림 2

- A.4** 그림 2 는 어떤 순간에 양극과 음극 사이의 교류 전기장의 전기력선을 보여준다. (직류 전기장은 나타나지 않음). 위에서 논의한 전자의 표류 속도를 고려할 때 각각 A, B, C, D, E 지점에 위치한 전자가 양극을 향해 흘러갈 지, 음극을 향해 흘러갈지, 아니면 반지름에 수직한 방향으로 흘러갈 지 답안지에 표시하시오. 1.2pt

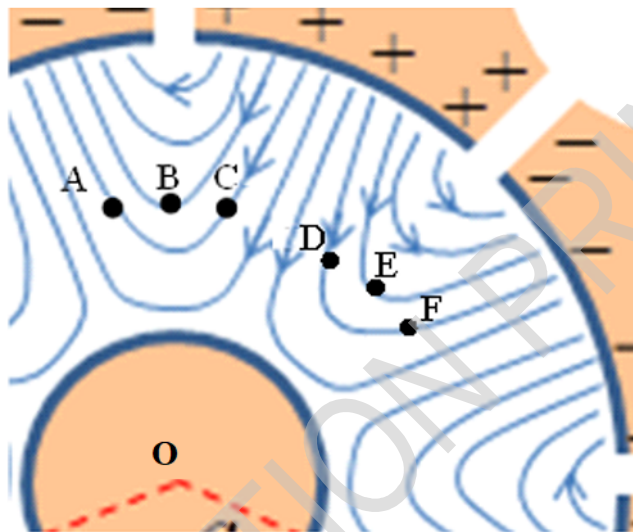


그림 3

그림 3 은 어떤 순간에 양극과 음극 사이의 교류 전기장의 전기력선을 보여준다. (직류 전기장은 나타나지 않음). 그 순간에 6 개의 전자의 위치는 A, B, C, D, E, F 로 표시하였다. 모든 전자는 음극으로부터 동일한 거리에 있다.

- A.5** 그림 3 과 같은 상황을 고려하자. 각 전자쌍 조합 AB, AC, BC, DE, DF, EF 에 대해 전자가 흘러감에 따라 두 위치 벡터 사이의 (음극의 중심 O 으로부터 측정한) 각도가 증가하는지 감소하는지를 답안지에 표시하시오. 1.2pt

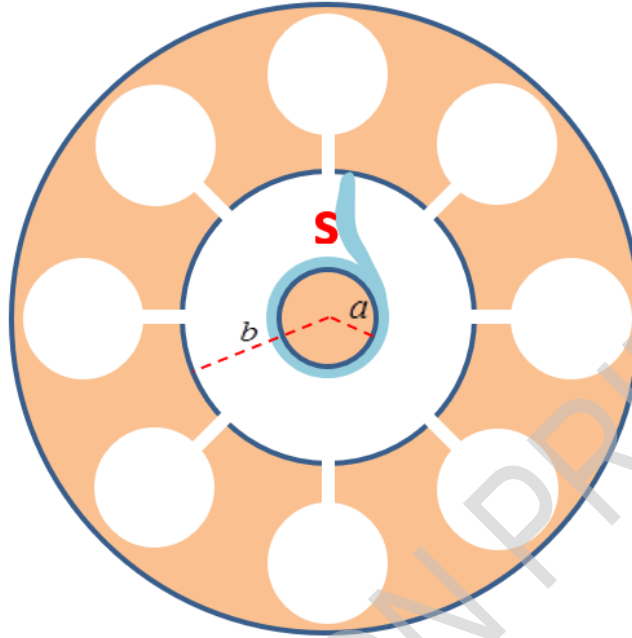


그림 4

A.5 에서 알아낸 규칙 (패턴) 은 포커싱 (focusing) 메카니즘으로 작용하여 음극과 양극 사이 공간에서 전자가 바퀴살 (spoke) 모양으로 모이도록 한다. 그림 4 에서 S 로 표시된 것은 이렇게 형성된 몇 개의 바퀴살 중 하나를 나타낸다.

- A.6** 모두 몇 개의 바퀴살이 형성될지 생각해보고 답안지에 모든 바퀴살을 그리시오. 바퀴의 회전 방향을 화살표로 나타내고 평균 각속도 ω_s 를 계산하시오. 0.8pt

음극과 양극 사이의 중간 (half-way) 에서 교류 전기장과 직류 전기장을 합한 총 전기장의 크기가 음극에서 양극까지 반지름을 따라 직류 전기장을 평균한 값과 같다고 가정하자. 바퀴살은 근사적으로 반지름 방향이라 가정한다. 음극과 양극의 반지름 (각각 a 와 b) 은 그림 4 에 정의된 것과 같다.

- A.7** 앞에 설명한 방식과 같이 마그네트론을 작동시키는데 필요한 직류 전압 V_0 에 대한 근사적인 식을 구하시오. (구한 식은 마그네트론 작동에 필요한 최소값에 대한 근사이며 실제 최적의 전압은 이보다 다소 높다.) 1.1pt

파트 B : 마이크로파 복사와 물 분자 사이의 상호 작용 (3.4 점)

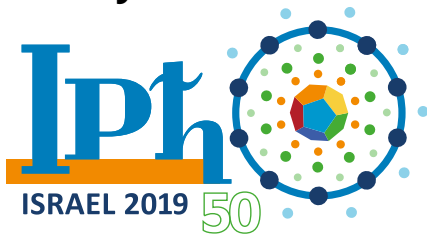
이 파트에서는 음식 조리를 위한 마이크로파 복사 (마그네트론 안테나에 의해 음식이 있는 곳으로 방사됨) 의 사용, 다시 말하면 순수한 물이나 소금물 (국물, 수프 등) 과 같이 에너지 손실이 있는 (lossy) 유전체 물질의 가열에 대해 다룬다.

전기 쌍극자 (electric dipole) 는 두 개의 반대 전하 q 와 $-q$ 가 작은 거리 d 만큼 떨어져 있는 것이다. 전기 쌍극자 벡터는 음 (-) 전하에서 양 (+) 전하 방향이며, 크기는 $p = qd$ 이다.

크기가 $p_0 = |\vec{p}(t)|$ 로 일정한 단일 쌍극자 모멘트 $\vec{p}(t)$ 에 시간에 의존하는 전기장 $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ 이 가해진다. 쌍극자와 전기장 사이의 각도는 $\theta(t)$ 이다.

- B.1** 전기장에 의해 쌍극자에 가해지는 돌림힘 $\tau(t)$ 의 크기와 전기장에 의해 쌍극자에 전달되는 일률 $H_i(t)$ 를 각각 p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ 와 이들의 미분으로 표현하는 식을 쓰시오. 0.5pt

물 분자는 극성이 있어 전기 쌍극자로 다룰 수 있다. 액체 상태의 물에서는 분자 사이의 강력한 수소 결합으로 인해, 이들



을 독립적인 쌍극자로 취급할 수 없고 쌍극자 모멘트 밀도 (dipole moment density; 물 분자 모임의 단위 부피 당 평균 쌍극자 모멘트) 인 편극 벡터 (polarization vector) $\vec{P}(t)$ 를 생각하여야 한다. 편극 $\vec{P}(t)$ 의 방향은 (마이크로 복사에 의한) 국소적 교류 전기장 $\vec{E}(t)$ 와 평행하고, 교류 전기장의 진폭에 비례하는 진폭을 갖고 진동하지만, 전기장과 편극 사이에는 위상 지연 (phase lag) δ 가 있다.

물 내부의 어떤 위치에서 국소적 교류 전기장은 $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t) \hat{x}$ 로 주어지고, 여기서 $\omega = 2\pi f$ 이다. 이로 인한 편극은 $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta) \hat{x}$ 이고, 여기서 β 는 물의 특성으로 차원이 없는 상수이다.

- B.2** 단위 부피당 물에 의해 흡수되는 시간 평균 일률 $\langle H(t) \rangle$ 를 구하시오. 0.5pt
주기 함수 $f(t)$ 의 한 주기 T 동안의 시간 평균은 다음과 같이 정의된다:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

이제 물에서 마이크로파 복사의 진행을 생각해 보자. 물의 상대 유전율이 (해당 전자기파 진동수에서) ϵ_r 일 때, 물의 굴절률은 $n = \sqrt{\epsilon_r}$ 이다. 전기장에 의한 순간 에너지 밀도는 $\frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$ 이다. 전자기파에서 전기장에 의한 시간 평균 에너지 밀도와 자기장에 의한 시간 평균 에너지 밀도는 서로 같다.

- B.3** 시간 평균 복사 에너지 선속 밀도 (time-averaged radiation energy flux density) 를 1.1pt
 $I(z)$ (단위 면적당 평균 복사 일률) 으로 나타내자. 여기서 z 는 물 속으로 침투하는 깊이이며, 복사는 z 방향으로 전파된다. 선속 밀도 $I(z)$ 를 z 에 따라 나타내는 식을 구하시오. 수면에 서의 선속 밀도 $I(0)$ 를 써서 나타내어도 된다.

물 분자 사이의 상호 작용의 결과 위상 지연 δ 이 발생한다. 위상 지연은 차원이 없는 유전 손실 계수 ϵ_ℓ 와 상대 유전율 ϵ_r (둘 다 복사의 각진동수 ω 와 온도에 의존) 에 의존하며 $\tan \delta = \epsilon_\ell / \epsilon_r$ 의 관계가 있다. 위상 지연 δ 가 충분히 작을 때, 침투 깊이 z 에서 전기장은 다음과 같이 주어진다:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

여기서 $k_0 = \omega/c$ 이고, 진공에서 빛의 속력은 $c = 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ 이다.

- B.4** $\tan \delta \approx \sin \delta$ 의 근사를 이용하여 B.2 에서 정의된 차원없는 계수 β 를 문제에 제시된 다른 0.6pt
물성 변수로 표현해 보시오.

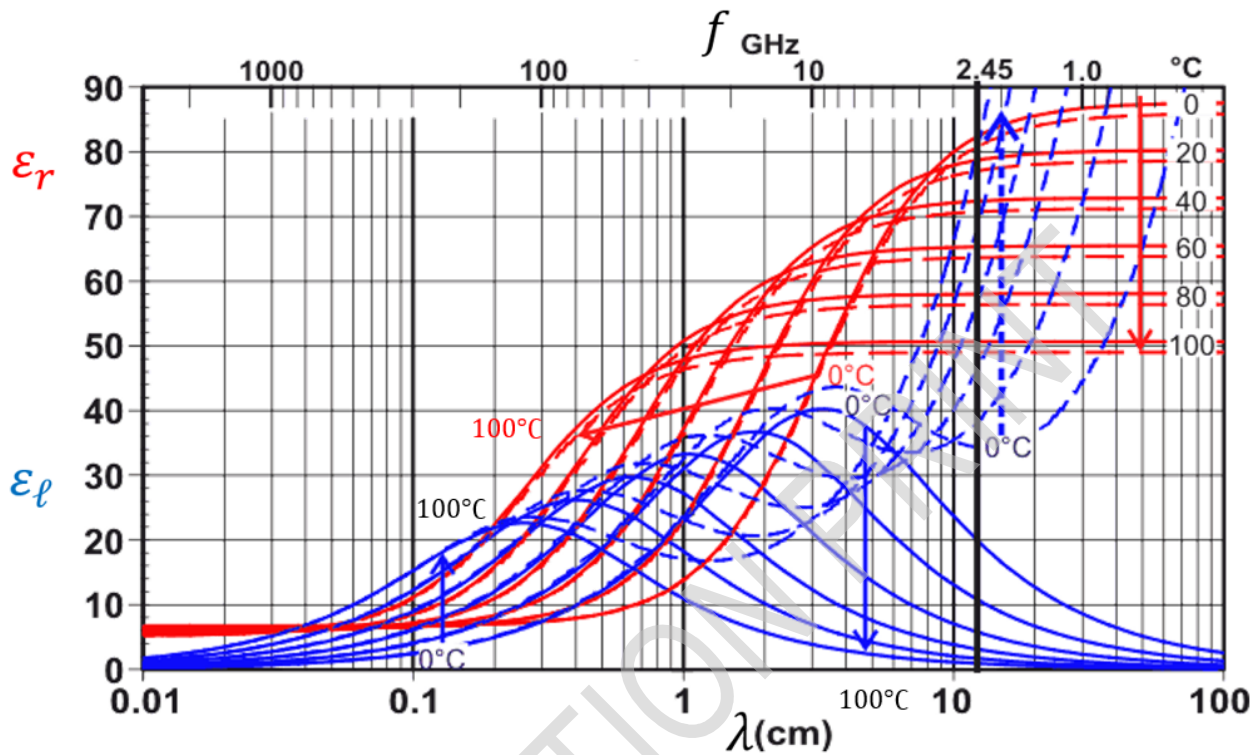


그림 5. 화살표는 0°C 부터 100°C 까지의 온도 변화에 따른 곡선의 이동 방향을 나타낸다.

그림 5 는 여러 온도에서 순수한 물 (실선) 과 묽은 소금 용액 (점선) 에 대해 ϵ_l (파란색) 과 ϵ_r (적색) 을 파장 또는 진동수의 함수로 나타낸 것이다. 각진동수 $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ 는 붉은 수직선으로 표시하였다. 아래에서는 이 진동수의 마이크로파 복사만 고려한다.

B.5 그림 5 를 이용하여 다음 질문을 해결하시오:

0.7pt

- 20°C 의 물에 대해 단위 부피당 일률이 $z = 0$ 에서의 값에 비해 절반으로 줄어드는 침투깊이 $z_{1/2}$ 를 구하시오.
- 순수한 물에 입사할 때, 마이크로파 복사의 침투 깊이가 온도에 따라 증가하는지, 감소하는지 혹은 동일한지 여부를 답안지에 표시하시오.
- 수프 (묽은 소금 용액) 로 입사할 때, 마이크로파 복사의 침투 깊이가 온도에 따라 증가하는지, 감소하는지 혹은 동일한지 여부를 답안지에 표시하시오.

열-소리 기관 (Thermoacoustic Engine)

열-소리 기관은 열을 기계적 일인 소리 에너지 또는 음파로 변환하는 장치이다. 다른 많은 열기관과 마찬가지로, 열-소리 기관은 역으로 작동하면 냉장기가 될 수 있고, 소리를 사용하여 저온 열 저장소 (reservoir) 에서 고온 열 저장소로 열을 방출할 수도 있다. 열-소리 기관의 높은 작동 주파수는 열전도를 감소시켜 작업 챔버를 외부와 차단 (단열) 할 필요를 줄인다. 다른 많은 엔진과 달리 열-소리 기관은 내부의 유체를 제외하고는 움직이는 부분이 없다.

열-소리 기계의 효율은 일반적으로 다른 종류의 열기관보다 낮지만, 설치 및 유지 보수 비용이 낮다는 장점이 있다. 이것은 태양열 발전소 및 폐열 (waste heat) 활용 등의 재생 에너지 응용에 이용될 수 있다. 이 문제에서는 외부 기관을 구동하기 위한 전력 추출이나 변환은 무시하고 시스템 안의 소리 에너지 생성에만 초점을 맞춘다.

파트 A. 닫힌 관의 음파 (3.7 점)

x 방향을 따라 놓인 길이 L 과 단면적 S 의 열적으로 절연된 관을 생각하자. 관의 두 끝은 $x = 0$ 및 $x = L$ 에 있다. 관은 이상 기체로 채워져 있고 양쪽 끝이 막혀 있다. 평형 상태에서 기체의 온도는 T_0 , 압력 p_0 , 질량 밀도 ρ_0 이다. 기체의 점성은 무시할 수 있고, 기체의 운동은 x 방향으로만 일어나고, 기체의 성질은 수직인 y 와 z 방향으로서는 균일하다고 가정한다.



그림 1

- A.1** 정상파가 형성되면, 기체 요소는 각 진동수 ω 로 x 방향으로 진동한다. 진동의 진폭은 관을 따라 각 요소의 평형 위치 x 에 따라 달라진다. 각 기체 요소 (gas element) 의 평형 위치 x 를 기준으로 할 때 길이 방향의 변위 (displacement) 는 다음과 같다. 0.3pt

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(u 는 기체 요소의 변위이다)

$a \ll L$ 는 양의 상수, $k = 2\pi/\lambda$ 는 파수 (wavenumber), λ 는 파장이다. 이 시스템에서 가능한 최대 파장 $\lambda_{\max}$ 은 얼마인가?

아래의 모든 문제에서 $\lambda = \lambda_{\max}$ 으로 진동한다고 가정한다.

이제 x 와 $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$) 사이의 좁은 범위에 놓인 기체 덩어리 (parcel) 를 생각해 보자. 문제 A.1 의 수식 (1) 에 주어진 변위 파동에 따라, 이 기체 덩어리 (parcel) 는 x 축을 따라 진동하면서 부피를 비롯한 다른 열역학 특성들이 변화한다.

다음의 문제들에서 기체 덩어리의 열역학적 특성 변화는 외부의 작용이 없어서 교란되지 않았을 때의 (unperturbed) 값과 비교하여 작다고 가정한다.

- A.2** 기체 덩어리 (parcel) 의 부피 $V(x, t)$ 는 $V_0 = S\Delta x$ 의 평형값을 중심으로 진동하는데, 다음 수식으로 주어진다: 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

$V_1(x)$ 를 V_0 , a , k 및 x 로 표현하시오.

- A.3** 기체 덩어리의 진동으로 발생한 음파에 의해, 기체의 총 압력이 다음과 같은 근사적 형태를 취한다고 가정하자. 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

기체 덩어리 (parcel) 에 작용하는 힘을 고려하여, 위치 x , 평형 밀도 ρ_0 , 변위 진폭 a , 파동 파라미터 k 및 ω 를 이용하여 압력 진동의 진폭 $p_1(x)$ 을 가장 중요한 차수 (첫번째항) 까지 (to leading order) 계산하시오.

음파의 진동수에서는 기체의 열전도도를 무시할 수 있다. 그러므로 기체 덩어리 (parcel) 의 팽창과 수축을 관계식 $pV^\gamma = \text{const}$ 를 만족하는 단열과정으로 취급하자. γ 는 단열 상수이다.

- A.4** 위의 관계식과 이전 문제들의 결과를 이용하여, 관에서 음파의 속력 $c = \omega/k$ 에 대한 표현식을 1 차항까지 (to first order) 구하시오. p_0, ρ_0 과 단열 상수 γ 를 사용하여 답을 표현하시오. 0.3pt

- A.5** 단열 팽창 및 수축으로 인한 기체 온도의 변화는 음파의 작용에 의해 다음 형태를 가진다: 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

온도 변동 (oscillation) 의 진폭 $T_1(x)$ 를 T_0, γ, a, k 및 x 를 사용하여 표현하시오.

- A.6** 이 문제 A.6 에서만 관과 기체 사이에 약한 열 상호 작용이 있다고 가정하라. 약한 열 상호 작용이 있어도 정상파는 거의 변하지 않지만, 기체는 관과 소량의 열을 교환 할 수 있다. 기체의 점성 때문에 발생하는 열은 무시한다. 그림 2 의 각 지점 (관 가장자리의 A 와 C, 중앙의 B) 에 대해, 그 지점에서 관의 온도가 오랜 시간이 흐르는 동안 증가하는지, 감소하는지 또는 동일하게 유지되는지를 설명과 함께 답하시오. 1.2pt

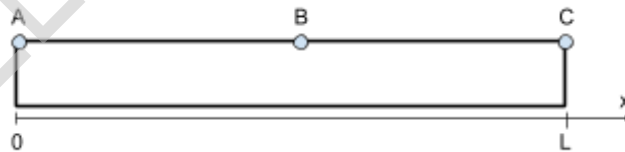


그림 2

파트 B: 외부 열 접촉이 유도하는 음파 증폭 (6.3 점)

적당히 간격을 두고 쌓은 얇고 단단한 판들의 더미 (stack of solid plates) 가 관 내부에 놓여 있다. 판들의 더미 (stack) 는 관의 축 방향을 따라 흐르는 기체의 흐름을 방해하지 않도록 관의 축과 평행하게 정렬한다. 판 더미 (stack) 의 중심은 $x_0 = L/4$ 에 위치하며 관 축을 따라 가로길이 $\ell \ll L$ 의 길이에 걸쳐 있고, 관 전체를 채운다. 판 더미 (stack) 의 오른쪽 및 왼쪽 모서리는 온도차 τ 로 유지된다. $x_H = x_0 - \ell/2$ 에서 판들의 왼쪽 모서리는 외부 열 저장소 (reservoir) 에 의해 온도 $T_H = T_0 + \tau/2$ 으로 유지된다. 동시에, $x_C = x_0 + \ell/2$ 에 있는 오른쪽 가장자리는 온도 $T_C = T_0 - \tau/2$ 로 유지된다.

관 축의 길이 ℓ 방향으로 판을 따라 약간의 열 흐름이 있으며, 각 부분의 온도가 $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$ 으로, 온도 기울기가 일정하게 유지된다.

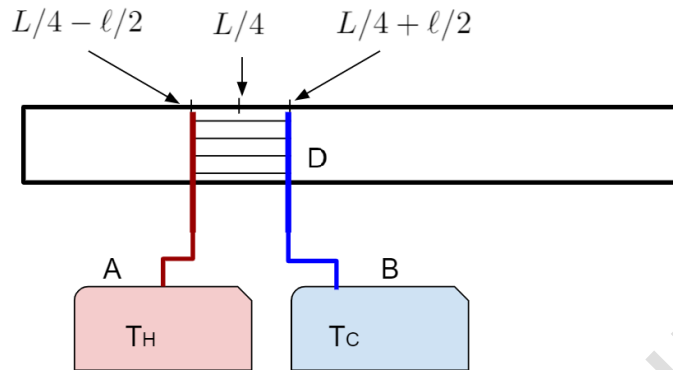


그림 3. 시스템 스케치. (A) 와 (B) 는 각각 고온 열 저장소 (reservoir) 와 저온 열 저장소를 나타낸다. (D) 는 판들의 더미 (stack) 를 나타낸다.

판 더미 (stack) 와 기체 사이의 열 접촉이 관의 음파에 미치는 영향을 분석하기 위해 다음을 가정하시오.

- 이전 문제들에서와 마찬가지로 열역학적 모든 특성의 변동은 외부에 의해 교란되지 않은 값에 비해 작다.
- 이 시스템은 가능한 가장 긴 파장의 기본 정상파 모드에서 작동한다. 그렇지만 판 더미 (stack) 가 있으면 약간 달라진다.
- 판들은 길이가 파장보다 훨씬 짧으며 ($\ell \ll \lambda_{\max}$), 변위와 압력의 마디 (node) 로부터 충분히 멀리 위치하고, 변위 $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ 와 압력 $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ 는 판들의 전체 길이에 걸쳐 균일하다고 볼 수 있다.
- 기체 덩어리 (parcel) 가 판 더미 (stack) 안팎으로 움직여서 발생하는 가장자리 효과를 무시할 수 있다.
- 판들의 양끝점, 즉 고온 열저장소 (reservoir) 와 저온 열저장소 사이의 온도 차이는 외부에서 교란되지 않았을 때의 절대 온도와 비교하여 매우 작다: $\tau \ll T_0$
- 판더미 (stack) 나 기체를 통해 또는 관을 따라 일어나는 열 전도는 거의 무시할 수 있다. 열 전달의 유일하게 중요한 원천은 기체의 운동으로 인한 대류 (convection) 와 기체와 판더미 (stack) 사이의 열 전도이다

- B.1** 판 더미 (stack) 영역에서 본래 $x_0 = L/4$ 에 있던 기체 덩어리 (parcel) 를 고려 해보자. 기체 덩어리 (parcel) 가 판 더미 (stack) 내에서 움직일 때, 가까이 있는 판 더미 (stack) 의 국소적 온도는 다음과 같이 변한다: 0.4pt

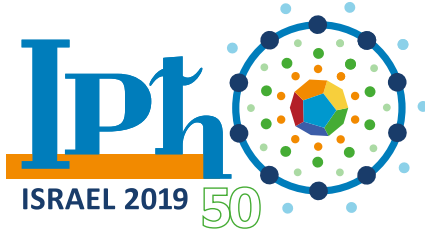
$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

T_{st} 를 a, τ, ℓ 로 표현하시오.

- B.2** 어떤 임계 온도차 τ_{cr} 이상이 되어야, 기체가 고온 열저장소 (reservoir) 에서 저온 열저장소로 열을 운반할 수 있을까? τ_{cr} 을 T_0, γ, k, ℓ 로 표현하시오. 1.0pt

- B.3** 기체의 작은 덩어리 (parcel) 로 들어가는 열흐름 $\frac{dQ}{dt}$ 의 일반적인 근사식을 부피와 압력 변화율들의 1 차함수로 구하시오. 부피 변화율 $\frac{dV}{dt}$, 압력 변화율 $\frac{dp}{dt}$, 기체 덩어리 (parcel) 의 압력과 부피에 대한 평형값 p_0, V_0 및 단열 상수 γ 로 답을 표현하시오. (일정한 부피의 몰 열용량을 $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ 으로 정할 수 있다. 여기서 R 은 기체 상수이다.) 0.8pt

기체 덩어리 (parcel) 와 판 더미 (stack) 사이의 열 흐름 때문에 기체 덩어리 (parcel) 의 압력과 부피 진동 사이에 위상 차이가 발생한다. 이것이 어떻게 일 (work) 을 생성하는지 보자.



판 더미 (stack) 에서 기체 덩어리 (parcel) 로 들어가는 열 다발 (heat flux) 은, 서로 인접한 기체 덩어리 (parcel) 와 판 더미 (stack) 사이의 온도차에 비례하여 근사적으로

$\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{st} - T_1) \cos(\omega t)$ 으로 주어진다. 여기서 T_1 과 T_{st} 는 각각 문제 A.5 의 기체 덩어리 (parcel) 와 B.1 의 인접한 판 더미의 온도 변동 (oscillation) 의 진폭이고, $\beta > 0$ 는 상수이다. 이 장치로 구동되는 기계 작동의 진동수에서는, 이 열 흐름의 결과로 인한 기체 온도의 변화가 T_1 및 T_{st} 에 비해서 매우 작다고 가정한다.

- B.4** 일 (work) 을 계산하기 위해 판 더미 (stack) 와의 열 접촉이 만드는, 움직이는 기체 덩어리 (parcel) 의 부피 변화를 생각해 보자. 판 더미 (stack) 의 영향을 받는 기체 덩어리 (parcel) 의 압력과 부피를 다음과 같이 표현하자: 1.9pt

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

p_a 와 p_b 는 주어졌다고 생각하고, 계수 V_a 와 V_b 를 구하시오. 답을 $p_a, p_b, p_0, V_0, \gamma, \tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, \ell$ 으로 표현하시오.

- B.5** 한 주기 동안 기체 덩어리 (parcel) 가 생성한, 단위 부피당 소리가 만드는 일 (acoustic work) w 의 근사적 표현식 (approximate expression) 을 구하시오. 판 더미 (stack) 의 부피에 대해 적분하여 기체가 생성하는 전체 전력 W_{tot} 을 구하시오. W_{tot} 을 $\gamma, \tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, k, S$ 로 표현하시오. 0.8pt

- B.6** 한 주기 동안 $x = x_0$ 평면의 왼쪽편에서 오른쪽편으로 운반된 열 Q_{tot} 에 대한 근사적 표현식 (approximate expression) 을 구하시오. 답을 $\tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, S, \ell$ 로 표현하시오. (힌트: 대류에 의한 열전류 (heat current) 공식 $j = Q \frac{du}{dt}$ 를 사용할 수 있다.) 0.8pt

- B.7** 열-소리 기관의 효율 η 를 구하시오. 효율은 소리로 발생된 일 (acoustic work) 과 고온 열 저장소 (reservoir) 에서 공급된 열량의 비율로 정의된다. 고온 열저장소 (reservoir) 와 저온 열저장소 사이의 온도차 τ , 임계 온도차 τ_{cr} 및 카르노 효율 $\eta_c = 1 - T_C/T_H$ 로 답을 표현하시오. 0.6pt