

행성 물리학 (10 points)

이 문제는 행성 내부 구조와 관련된 두 개의 독립적인 소문제로 구성되어 있습니다. 행성 표면의 곡률 효과는 무시할 수 있다고 가정합니다. 다음 근사식을 사용할 수 있습니다:

$$(1+x)^{\epsilon} \approx 1 + \epsilon x, \text{ when } |x| \ll 1.$$

Part A. 중앙 해령 (Mid-ocean ridge) (5.0 points)

균일한 중력장 내에 놓인 물로 가득 찬 큰 용기를 생각해 봅시다. 중력 가속도는 g 입니다. 두 개의 수직 직사각형 판이 서로 평행하게 용기 내부에 삽입되어 있으며, 각 판의 수직 모서리는 용기의 수직 벽면과 틈 없이 접촉하고 있습니다. 각 판은 높이 h 만큼 물에 잠겨 있으며(그림 1), 판의 y -방향 너비는 w , 물의 밀도는 ρ_0

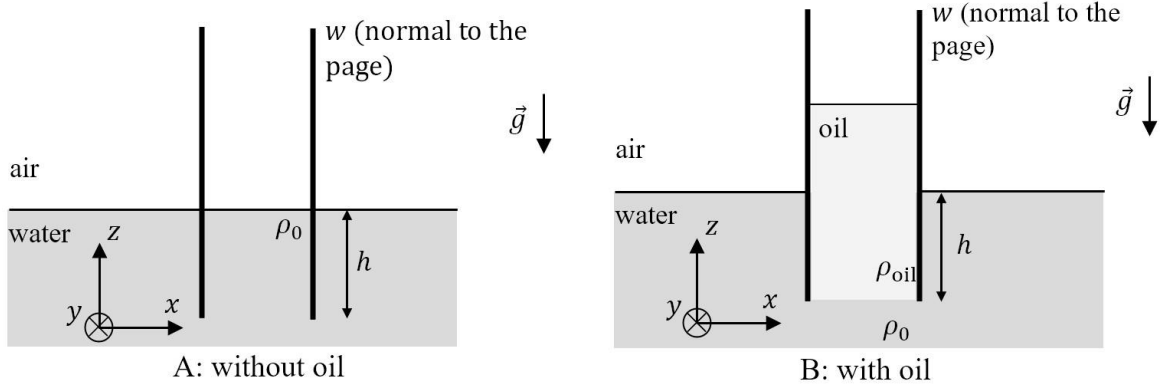


Figure 1. Parallel plates in water.

밀도 ρ_{oil} ($\rho_{oil} < \rho_0$) 인 기름이 두 판 사이의 공간에 붓기 시작합니다. 기름은 판의 아래 모서리까지 채워질 때까지 붓습니다. 기름이 넘치지 않을 만큼 판과 용기의 높이는 충분하다고 가정합니다. 표면 장력과 유체의 혼합은 무시할 수 있습니다.

A.1 오른쪽 판에 작용하는 순 수평 힘의 x -성분 F_x 의 크기와 방향은 얼마인가요?

0.8pt

그림 2는 해양 중앙 해령(mid-ocean ridge)의 단면을 보여줍니다. 이 구조는 맨틀, 지각, 해수의 층이 차례로 겹쳐 있는 형태로 이루어져 있습니다. 맨틀은 암석으로 구성되어 있지만, 지질학적 시간 척도에서는 흐를 수 있다고 가정할 수 있으므로, 이 문제에서는 맨틀을 유체로 취급합니다. 지각의 두께는 x 방향의 대표적인 길이 척도에 비해 훨씬 얇기 때문에, 지각은 자유롭게 휘어지는 판처럼 거동한다고 볼 수 있습니다. 이러한 해령은 변수들이 y -축 방향(그림의 평면에 수직인 방향)으로는 변화하지 않는다고 가정할 수 있어, 2차원적인 시스템으로 매우 정확하게 모델링할 수 있습니다. 또한, 해령의 y -축 방향 길이 L 은 문제에 등장하는 다른 어떤 길이보다도 훨씬 크다고 간주합니다.

해령 중심에서는 지각의 두께가 0인 것으로 가정하며, 중심으로부터 수평 거리 x 가 멀어질수록 지각은 점차 두꺼워지고, 결국 $x \rightarrow \infty$ 일 때에는 일정한 두께 D 에 도달하게 됩니다. 이에 따라 해저는 해령의 정상점인 O 점을 기준으로 아래쪽으로 h 만큼 내려간 위치에 놓이게 됩니다. 해수의 밀도 ρ_0 와 온도 T_0 , 그리고 맨틀의 밀도 ρ_1 과 온도 T_1 은 모두 공간적으로나 시간적으로 일정하다고 가정할 수 있습니다. 반면, 지각의 온도는 시간적으로는 일정하지만 위치에 따라 달라질 수 있습니다. 지각 물질은 온도 T 에 따라 선형적으로 팽창하는 것으로 알려져 있으며, 물과 맨틀의

온도가 일정하기 때문에 열팽창 계수를 정규화하여 사용하는 것이 편리합니다. 이 경우 지각 물질의 길이 $l(T)$ 는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있습니다:

$$l(T) = l_1 \left[1 - \frac{k_l(T_1 - T)}{T_1 - T_0} \right]$$

여기서 l_1 은 온도 T_1 일 때의 기준 길이이고, k_l 은 정규화된 열팽창 계수로 상수로 간주됩니다.

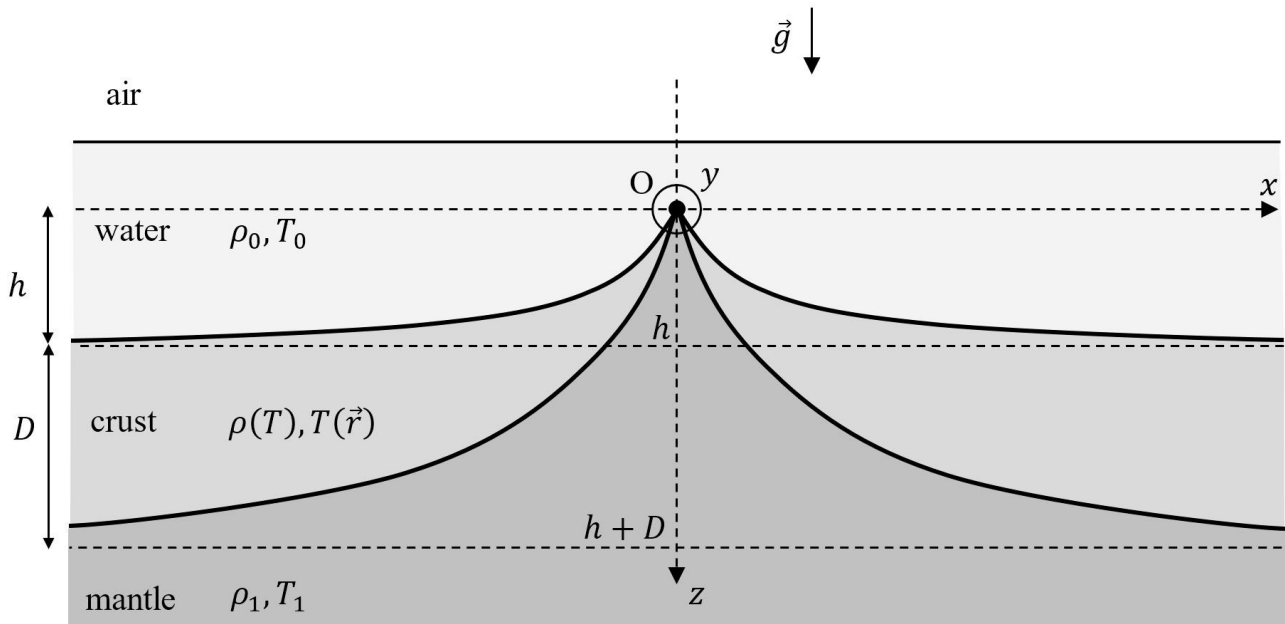


Figure 2. Mid-ocean ridge. Note that the z -axis is pointing downwards.

- A.2** 지각이 등방성(isotropic)이라고 가정할 때, 지각의 밀도 ρ 가 온도 T 에 따라 어떻게 변하는지를 구하시오. 단, $|k_l| \ll 1$ 이라 가정하고, 다음과 같은 근사 형태로 답을 쓰시오: 0.6pt

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right],$$

이때, k 는 상수이며, k_l^2 이상의 항은 무시한다.

또한, $k > 0$ 임이 알려져 있으며, 지각의 열전도도 κ 는 일정하다고 가정할 수 있다. 그 결과, 해령 중심에서 멀리 떨어진 곳에서는 지각의 온도가 깊이에 대해 **선형적으로 변화**한다.

- A.3** 맨틀과 바닷물이 각각 **비압축성 유체**로서 정수압 평형 상태에 있다고 가정하자. 이때, 먼 거리에서의 지각 두께 D 를 h , ρ_0 , ρ_1 , k 의 함수로 표현하시오. 지질 물질의 움직임은 무시할 수 있다. 1.1pt

- A.4** k 에 대한 선형 차수(leading order)에서, 지각의 오른쪽 절반($x > 0$)에 작용하는 수평 순힘 F 를 ρ_0 , ρ_1 , h , L , k , g 의 식으로 나타내시오. 1.6pt

지각이 지구의 다른 부분과 **열적으로 고립**되어 있다고 가정하자. 열전도에 따라 지각의 상부와 하부 표면 온도는 점점 가까워지며, 결국 **열평형**에 도달하게 된다. 지각의 비열 c 은 상수라고 가정할 수 있다.

- A.5** 차원 해석(dimensional analysis) 또는 차수 추정(order-of-magnitude analysis)을 이용하여, 해령에서 멀리 떨어진 지각의 상하 온도차가 0 에 가까워지는 데 걸리는 특성 시간 τ 을 추정하시오. 단, τ 는 지각의 초기 상·하 표면 온도에는 의존하지 않는다고 가정하시오. 0.9pt

Part B. 층상 매질 내의 지진파 (5.0 points)

어떤 행성의 표면에서 짧은 지진이 발생한다고 하자. 지진파는 xxx -축과 zzz -축이 각각 수평 및 깊이를 나타내는 평면 내에서, $z=0, x=0$ 에 위치한 선형 진원(source)으로부터 시작된다고 가정한다 (그림 3 참조). 이 선형 진원은 문제에서 다루는 다른 어떤 길이보다도 훨씬 길다고 가정한다.

지진으로 인해, xz -평면의 z -축 양의 방향을 포함하는 모든 방향으로, 종파(Longitudinal P-wave)가 균일하게 방출된다. 고체 내 파동 이론은 일반적으로 복잡하므로, 이 문제에서는 지진으로부터 발생하는 다른 모든 파동은 무시한다. 이 행성의 지각은 층상 구조(stratified)를 가지며, P 파의 속도는 깊이 z 에 따라 다음과 같이 변한다:

$v = v_0(1 + z/z_0)$, 여기서 v_0 는 지표면에서의 P 파 속도, z_0 는 양의 상수이다.

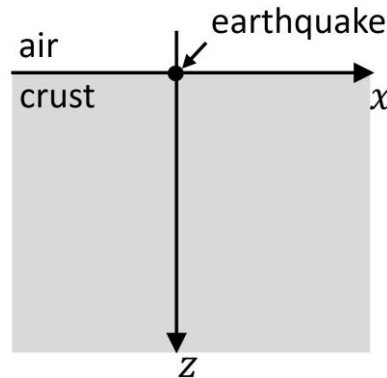


Figure 3. Coordinate system used in part B.

- B.1** 지진에 의해 방출된 단일 지진파(ray)가 $0 < \theta_0 < \pi/2$ 인 각도로 z -축과 이루는 초기 각도를 가지고, x - z 평면 내를 따라 진행한다고 가정하자. 이 지진파가 행성 표면에서 관측될 수 있는 수평 좌표 $x_1(\theta_0) \neq 0$ 를 구하시오. 1.5pt
이 지진파의 경로는 원호(arc of a circle)를 따른다고 알려져 있습니다. 정답은 다음 형태로 표현되어야 합니다: $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$. 여기서 A 와 b 는 구해야 할 상수입니다.

만약 A 와 b 의 값을 구하지 못했다면, 이후 문제들에서는 $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ 라는 결과를 주어진 식으로 사용해도 무방합니다. 지진 발생 시, P 파 형태로 지각 내에 방출된 단위 길이당 총 에너지를 E 라고 가정합니다. 또한, 지진파가 **지면에 도달하면 완전히 흡수**된다고 가정합니다

- B.2** 지표면 상의 거리 x 에 따라, 단위 면적당 흡수된 에너지 밀도 $\epsilon(x)$ 가 어떻게 변하는지를 구하시오. 또한, $\epsilon(x)$ 의 그래프(개형)를 스케치하시오. 1.5pt

이제부터는, 지진파가 지표면에 도달할 때 **완전히 반사**된다고 가정하자. 지금까지 고려했던 지진파의 진원과 같은 형상을 가진 장치가 $x=0, z=0$ 에 위치해 있다고 생각하자. 이 장치는 사용자가 원하는 각 분포(angular distribution)로 P 파를 방출할 수 있으며, 특히 이번에는 매우 **좁은 범위의 방출 각도**를 사용하여 신호를 방출한다고 하자. 특히, 신호가 수직 방향과 이루는 초기 각도는 $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$ 구간에 속한다고 가정합니다. 여기서 $0 < \theta_0 < \pi/2$,

$\delta\theta_0 \ll 1, \delta\theta_0 \ll \theta_0$.

- B.3** 신호가 도달하지 못하는 가장 먼 지표면 거리 x_{max} 는 얼마인가? $\theta_0, \delta\theta_0$, 그리고 위에서 주어진 상수들을 이용하여 답을 구하시오. 2.0pt

정전기 렌즈(10 points)

반지름이 R , 총 전하가 q 인 **균일하게 대전된 금속 고리**를 생각해보자. 이 고리는 두께가 $2a \ll R$ 인 속이 빈 토로이드(toroid)이다. 단, A, B, C, E 파트에서는 이 두께를 무시할 수 있다. 고리는 xy -평면 위에 놓여 있고, z -축은 그에 수직이다 (그림 1 참조). A, B 파트에서는 다음 테일러 전개 식을 사용할 수 있다:

$$(1+x)^\epsilon \approx 1 + \epsilon x + \frac{1}{2}\epsilon(\epsilon-1)x^2, \text{ when } |x| \ll 1.$$

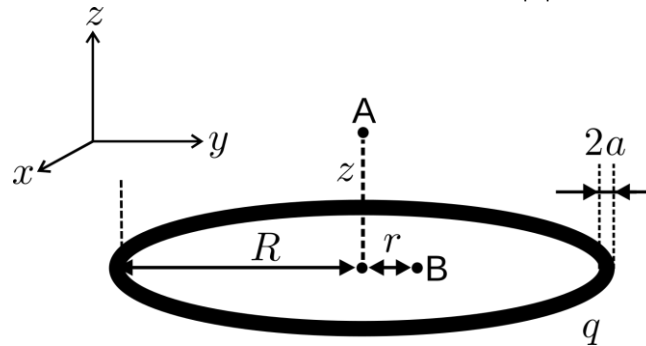


Figure 1. A charged ring of radius R .

Part A. Electrostatic potential on the axis of the ring (1 point)

A.1	그림 1의 점 A로부터 축 방향으로 z 만큼 떨어진 지점에서의 정전기 퍼텐셜 $\Phi(z)$ 을 계산하시오.	0.3pt
A.2	$z \ll R$ 이라 가정하고, $\Phi(z)$ 의 가장 낮은 비영점 차수 항까지 근사하시오.	0.4pt
A.3	질량이 m 이고 전하 $\square e$ 인 전자가 점 A에 놓여 있다고 하자. 이 전자에 작용하는 힘은 얼마인가? 힘의 표현을 보고, 그 운동이 진동 운동 이 되도록 하기 위해 q 의 부호는 어떻게 되어야 하는지 결정하시오. 전자의 움직임은 고리 위의 전하 분포에 영향을 주지 않는다고 가정한다.	0.2pt
A.4	그러한 조화 진동의 각진동수 ω 는 얼마인가?	0.1pt

Part B. 고리 평면 위의 정전기 퍼텐셜 (1.7 points)

이제 $z=0$, 즉 고리 평면 내의 퍼텐셜 $\Phi(r)$ 을 분석한다 (그림 1의 점 B, $r \ll R$). 퍼텐셜은 r 의 가장 낮은 비영점 차수 항까지 다음과 같이 표현된다: $\phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$

B.1	상수 β 를 구하시오. 위의 테일러 전개 공식을 활용하시오.	1.5pt
B.2	전자 하나가 그림 1의 점 B에 놓여 있다고 가정합니다. 여기서 $r \ll R$ 이며, R 은 고리의 반지름입니다. 이 때 전자에 작용하는 힘을 구하시오. 힘의 식을 살펴보았을 때, 운동이 조화 진동(harmonic oscillation)에 해당하려면 전하 q 의 부호는 무엇이여야 하는지 결정하시오. 또한, 전자의 움직임은 고리 위의 전하 분포에 영향을 주지 않는다고 가정합니다.	0.2pt

Part C. 이상적인 정전기 렌즈의 초점 거리 – 순간 충전 가정 (2.3 points)

전자들을 집속시키기 위한 장치를 만들고자 한다. 이를 위해 고리를 이용한 정전기 렌즈를 구성한다. 고리는 그림 2 와 같이 z -축에 수직하게 놓여 있으며, 반지름은 R 이다. 전자 소스는 원하는 시점에 비상대론적인 전자 묶음을 생성하며, 전자들은 정확히 제어된 순간에 방출된다. 이 전자들의 운동 에너지는 $E = mv^2/2$ 이며, v 는 속도이다.

시스템은 대부분의 시간 동안 고리를 전기적으로 중성 상태로 유지하지만, 전자들이 고리 평면으로부터 수직 거리 $d/2$ 이내에 들어오면 고리는 총 전하 q 를 갖게 된다. 이 영역은 "활성 영역(active region)"이라고 하며, 그림 2 에서는 음영으로 표시되어 있다. 이 파트에서는 고리의 충전과 방전이 순간적으로 이루어지며, 전기장도 즉시 공간에 형성된다고 가정한다. 자기장은 무시하며, 전자들은 z -방향으로 일정한 속도로 이동한다고 본다. 또한, 전자의 움직임은 고리의 전하 분포에 영향을 미치지 않는다고 가정한다.

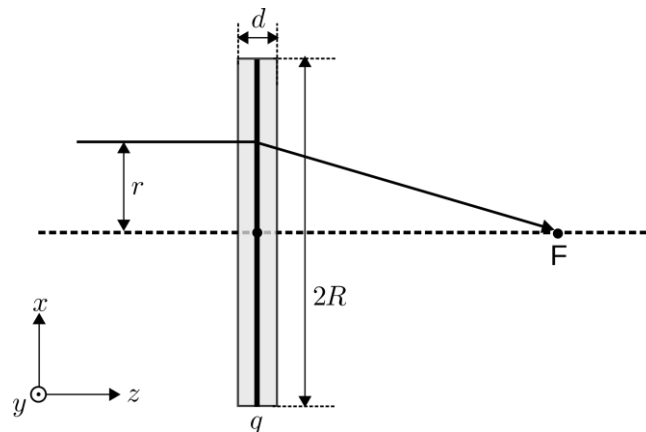


Figure 2. A model of an electrostatic lens.

- | | | |
|------------|--|-------|
| C.1 | 조건 하에서 렌즈의 초점 거리 f 를 구하시오. 단, $f \gg d$ 임을 가정한다. 초점 거리는 B.1 에서 구한 상수 β 와 다른 주어진 물리 상수들을 사용하여 표현하시오. 전자 묶음은 활성 영역에 도달하기 전까지는 z -축에 평행하게 이동하며, $r \ll R$ 이다. 렌즈는 전자들을 집속시키는 방향으로 작용하므로, 전하 q 의 부호는 적절히 정해져 있다고 가정한다. | 1.3pt |
|------------|--|-------|

현실적인 경우를 고려하면, 전자 소스는 고리 중심으로부터 z -축을 따라 거리 b (단, $b > f$) 떨어진 위치에 놓인다. 이때 전자들은 더 이상 z -축과 정확히 평행하게 움직이지 않고, z -축과 작고 다양한 각도 $\gamma \ll 1$ 을 이루며 방출된다. 결과적으로 전자들은 고리 중심에서 거리 c 떨어진 한 지점에 모이게 된다.

- | | | |
|------------|--|-------|
| C.2 | 상수 c 를 구하시오. 당신의 답을 문제 B.1 에 등장한 상수 β 와 기타 주어진 물리량들을 사용하여 표현하시오. | 0.8pt |
|------------|--|-------|

C.3 얇은 광학 렌즈에 대한 식

0.2pt

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$$

이 정전기 렌즈(electrostatic lens)의 경우에도 성립하는가? 이 식이 실제로 성립하는지를 확인하기 위해, $1/b + 1/c$ 를 직접 계산하여 보여주세요.

Part D. The ring as a capacitor (3 points)

앞에서 다룬 모델은 이상화된 것으로, 고리가 전하를 순간적으로 획득할 수 있다고 가정했다. 그러나 실제로는 충전이 유한한 시간에 걸쳐 진행되며, 고리는 유한한 정전용량 CCC 를 가진 커패시터처럼 행동한다. 이 파트에서는 고리를 커패시터로 보고 그 특성을 분석한다. 필요한 경우 다음 적분을 사용할 수 있다:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C$$

D.1 고리의 정전용량 C 를 계산하십시오. 고리는 유한한 두께 $2a$ 를 가지고 있으나, $a \ll R$ 인 조건이 성립한다는 점을 고려하십시오. 2.0pt

전자들이 "활성 영역(active region)"에 도달하면, 그림 3 에서처럼 고리는 전압원 V_0 에 연결됩니다.

전자들이 활성 영역을 통과한 이후에는, 고리가 접지(ground)에 연결됩니다. 접점의 저항은 R_0 이며, 고리 자체의 저항은 무시할 수 있다고 가정합니다.

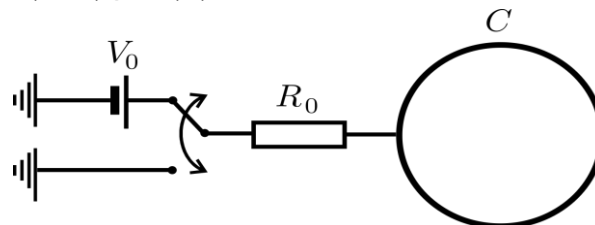


Figure 3. Charging of the electrostatic lens.

D.2 시간 t 에 따른 고리의 전하 $q(t)$ 의 변화를 구하고, 이 변화를 도식적으로 나타내시오. 1.0pt
여기서 $t=0$ 은 전자들이 고리 평면에 도달한 순간을 의미한다. 전하의 절댓값이 최대일 때의 전하 q_0 는 얼마인가? 이때 고리의 정전용량은 앞서 D.1 에서 구한 값 C 이다. 그림 3 에 나타난 전압의 극성은 단지 참조용이며, 실제 부호는 렌즈가 전자들을 집속할 수 있도록 적절히 선택해야 한다.

Part E. 보다 현실적인 렌즈의 초점 거리: 비순간 충전(2 points)

이제 고리의 충전이 순간적으로 이루어지지 않는 보다 현실적인 경우를 고려한다. 이 파트에서는 고리의 두께 $2a$ 는 무시할 수 있고, 전자들은 활성 영역에 도달하기 전까지 z -축과 평행하게 이동한다고 가정한다. 하지만 고리의 전하 변화는 이제 더 이상 즉각적으로 이루어지지 않는다.

E.1	렌즈의 초점 거리 f 를 구하시오. 단, 다음 조건을 가정합니다: $f/v \gg R_0 C$, 그러나 $\frac{d}{v} \sim R_0 C$ 즉, 초점 거리 대비 전자의 통과 시간은 점점의 시정수보다 훨씬 크지만, 활성 영역의 길이 d 를 전자가 통과하는 시간과 점점 시정수 $R_0 C$ 는 같은 차원으로 간주할 수 있습니다. 당신의 답을 B 항의 상수 β 및 기타 주어진 물리량들을 사용하여 표현하시오.	1.7pt
E.2	당신은 곧 알게 되겠지만, 초점 거리 f 에 대한 결과는 C 번 문제에서 구한 식과 유사하며, 여기서 전하 q 는 어떤 유효 전하 q_{eff} 로 대체됩니다. 이제 문제에서 주어진 물리량들을 이용하여, 유효 전하 q_{eff} 를 표현하는 식을 구하시오.	0.3pt

입자와 파동(10 points)

다음은 양자역학의 기본 개념 중 하나인 입자-파동 이중성(particle-wave duality)을 기반으로 한 문제이다. 이 개념에 따르면, 모든 입자는 파동으로 설명될 수 있고, 반대로 모든 파동은 입자로 설명될 수 있다. 이 문제에서는 페르미온(fermion)과 보존(boson)이라는 두 종류의 미시 세계 입자들에 대한 다양한 양자 현상을 간단한 가정만으로 탐구할 것이다.

Part A. 상자 속 양자 입자 Quantum particle in a box (1.4 points)

질량이 m 인 입자가 1 차원 퍼텐셜 우물(potential well)에서 운동하고 있으며, 퍼텐셜 에너지는 다음과 같이 주어진다:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ or } x > L. \end{cases}$$

고전역학에서는 입자가 이 퍼텐셜 안에서 어떤 운동 에너지를 가지며 자유롭게 움직일 수 있지만, 양자역학에서는 특정한 양의 이산적인 에너지 수준만 허용된다. 각 허용된 상태에서, 입자는 양 끝에서 마디(node)를 가지는 정지 드브로이 파동(de Broglie wave)으로 기술된다.

A.1	가장 낮은 에너지 상태 E_{min} 을 구하시오. 정답은 m, L , 플랑크 상수 h 를 사용하여 표현하시오.	0.4pt
------------	--	-------

입자가 가질 수 있는 가장 낮은 에너지 상태를 바닥 상태(ground state)라고 하며, 그 외의 허용된 모든 상태들은 들뜬 상태(excited states)**라고 합니다. 모든 가능한 에너지 값을 오름차순으로 나열하여 이를 E_n 이라 표기하되, 바닥 상태의 에너지를 E_1 로 설정합니다.

A.2	에너지 E_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)에 대한 일반적인 식을 구하시오.	0.6pt
------------	--	-------

A.3	입자는 특정 상태에서 다른 상태로 즉시 전이할 수 있으며, 그때 에너지 차이에 해당하는 광자를 방출하거나 흡수하게 된다. 첫 번째 여기 상태(E_2)에서 바닥 상태(E_1)로 전이할 때 방출되는 광자의 파장 λ_{21} 을 구하시오.	0.4pt
------------	--	-------

Part B. 분자의 광학적 성질 (2.1 points)

이 파트에서는 대표적인 염료 분자인 사이안인 Cy5 분자의 광학적 성질을 연구한다. 이 분자의 광학적 성질은 주로 탄소 원자들이 단일결합과 이중결합을 번갈아 형성한 백본(backbone)에 의해 결정되며, 양 끝의 고리 구조나 라디칼 R의 영향은 작다. 백본 내의 각 탄소(C) 또는 질소(N) 원자는 네 개의 원자가 전자 중 세 개를 공유결합에 사용하고, 나머지 하나의 전자는 전체 백본을 따라 자유롭게 움직인다. 이 전자에 대한 퍼텐셜 에너지는 그림 1c의 가느다란 곡선처럼 진동하며, 각 원자 위치에서 최소값을 갖는다.

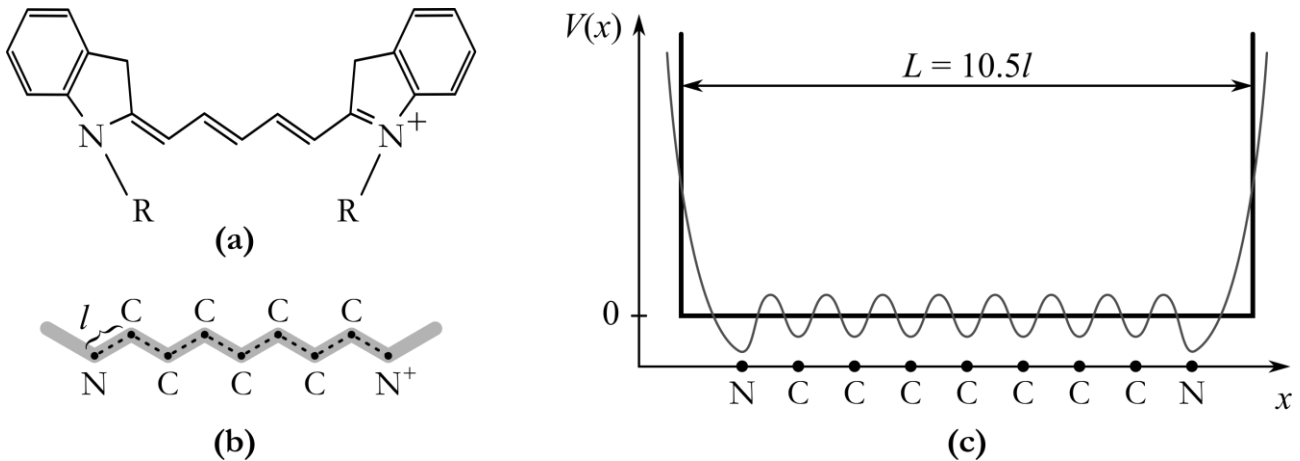


그림 1. (a) 시아닌(Cy5) 분자의 화학 구조. 단순화를 위해 수소 원자는 생략되었으며, R 은 일부 라디칼기를 나타냅니다. (b) 평균 원자 간 거리 l 을 가진 Cy5 분자의 골격(backbone). (c) 골격을 따라 이동하는 전자의 퍼텐셜 에너지(얇은 선)와, 이를 식 (1)에 따라 계단 함수로 근사한 형태(굵은 선).

간단한 분석을 위해, 이 퍼텐셜 에너지를 앞서 Part A 에서 정의한 1 차원 퍼텐셜 우물로 근사한다. 우물의 폭은 $L = 10.5l$ 이며, 여기서 $l = 140 \text{ pm}$ 은 평균 원자 간 거리이다. 이로 인해 우리는 10 개의 전자(7 개의 탄소, 2 개의 질소, 1 개의 양이온 N^+ 에서 유래함)가 1 차원 퍼텐셜 우물 안에서 운동하는 전자 기체(electronic gas)로 모델링할 수 있다. 전자 사이의 상호작용은 무시하고, 전자가 페르미온으로서 파울리 배타 원리를 따른다는 점만 고려한다.

B.1	전자 시스템이 바닥 상태에 있다고 가정할 때, Cy5 분자가 흡수할 수 있는 가장 긴 파장 λ 를 구하시오. 정답은 l , 물리 상수들과 몇 개의 수치 계수를 포함하여 표현하고, 수치값도 계산하시오.	0.8pt
B.2	또 다른 염료 분자인 Cy3 는 유사한 구조를 가지지만, 백본이 탄소 원자 두 개만큼 짧다. 이 분자의 흡수 스펙트럼은 Cy5 에 비해 더 청색으로 이동하는가, 또는 적색으로 이동하는가? 그 파장 이동량 $\Delta\lambda$ 의 수치값을 평가하시오.	0.4pt

분자가 들뜬 상태에 있을 때, 자발적으로 바닥 상태로 전이하면서 광자(photon)를 방출할 수 있습니다. 이러한 과정이 일어나는 평균 비율 K — 즉, 들뜬 상태에 있는 분자의 수 N 가 시간 dt 동안 감소하는 상대적인 속도

$$K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$$

는 방출되는 광자의 파장 λ , 전이 전기 쌍극자 모멘트 d (이는 대략 $d \sim el$ 수준이며, 여기서 e 는 기본 전하),

B.3	차원 해석을 사용하여 K 를 $\epsilon_0, \hbar, \lambda, d$ 의 식으로 유도하시오. 수치 계수는 $16/3 \pi^3$ 이다.	0.7pt
B.4	Cy5 분자의 경우, 전기 쌍극자 모멘트 $d \approx 2.4 e l$ 이다. 이 값을 사용하여 Cy5 분자의 평균 형광 수명 τ_{cy5} 를 계산하시오. 이는 방출 전이 속도의 역수이다.	0.2pt

그리고 진공 유전율 ϵ_0 , 플랑크 상수 h 에 의해 결정됩니다.

Part C. 보스-아인슈타인 응축 (1.5 points)

이 파트는 Part A와 B와 직접적인 관련은 없다. 여기서는 보스 입자의 집단적 행동을 탐구한다. 보스는 파울리 배타 원리를 따르지 않기 때문에, 낮은 온도 또는 높은 밀도에서 보스-아인슈타인 응축(BEC)이라는 극적인 현상을 겪게 된다. 이는 동일한 양자 상태에 많은 입자가 응축되어 하나의 파동처럼 집단적으로 움직이는 흥미로운 양자 상전이다. 이러한 전이는 일반적으로 입자 수가 고정된 상태에서 임계 온도 아래로 냉각함으로써 도달하며, 원칙적으로는 온도를 고정한 상태에서 입자 밀도를 임계값 이상으로 증가시켜서도 유도할 수 있다.

우리는 전이 시 온도와 입자 밀도 사이의 관계를 탐구하는 것부터 시작한다. 실제로, 이들의 임계값은 간단한 관찰로부터 추정할 수 있다: 보스-아인슈타인 응축은 입자의 평균 제곱 속도에 대응하는 드브로이 파장이 기체 내 입자 간의 평균 거리와 같아질 때 일어난다.

C.1 열평형 상태에 있는 비상호작용 ^{87}Rb 원자 기체를 고려하자. 원자의 질량 m , 온도 T 및 물리 상수를 이용하여 전형적인 선운동량 p 와 전형적인 드브로이 파장 λ_{dB} 를 구하시오. 0.4pt

C.2 입자 밀도를 n 이라 할 때, 입자들 사이의 평균 거리 ℓ 을 n 의 함수로 계산하시오. 이를 통해 임계 온도 T_c 를 질량, 밀도 및 물리 상수의 함수로 유도하시오. 0.5pt

실제 실험에서 BEC를 구현하기 위해, 연구자들은 기체를 $T_c = 100 \text{ nK}$ 까지 냉각시켜야 한다.

C.3 만약 이러한 온도에서 전이가 발생한다면, Rb 기체의 입자 밀도 n_c 는 얼마인가? 비교를 위해 표준 온도와 압력(STP), 즉 $T_0 = 300 \text{ K}$ 및 $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ 하에서의 이상기체 입자 밀도 n_0 도 계산하시오. 또한 일반적인 기체(n_0)가 얼마나 더 조밀한지도 구하시오. 원자의 질량은 87 원자 질량 단위(m_{amu})라고 가정해도 좋다. 0.6pt

Part D. 삼광자 간섭 광격자 (5 points)

최초의 보스-아인슈타인 응축은 1995년에 실현되었고, 이후 실험 연구는 다양한 방향으로 발전해 왔다. 이 파트에서는 응축된 입자를 간섭하는 복수의 코히런트 레이저빔으로 생성된 공간적으로 주기적인 퍼텐셜 속에 가두는 매우 유용한 아이디어를 탐구한다. 이와 같은 간섭 무늬의 주기적 특성으로 인해, 해당 퍼텐셜은 '광격자(optical lattice)'라 불린다. 광격자 안에서 운동하는 원자의 퍼텐셜 에너지 $V(\vec{r})$ 는 국소적인 빛의 세기에 비례하며, 다음과 같이 기술할 수 있다:

$$V(\vec{r}) = -\alpha \langle |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \rangle$$

여기서 α 는 양의 상수이며, $\langle \dots \rangle$ 는 시간 평균을 나타내고, 이는 빠르게 진동하는 항을 제거한다. i 번째 레이저가 생성하는 전기장은 다음과 같이 주어진다:

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{e}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)$$

여기서 $E_{0,i}$ 는 진폭, $\vec{e}_i$ 는 단위벡터인 편광 벡터, $\vec{k}_i$ 는 파벡터이다.

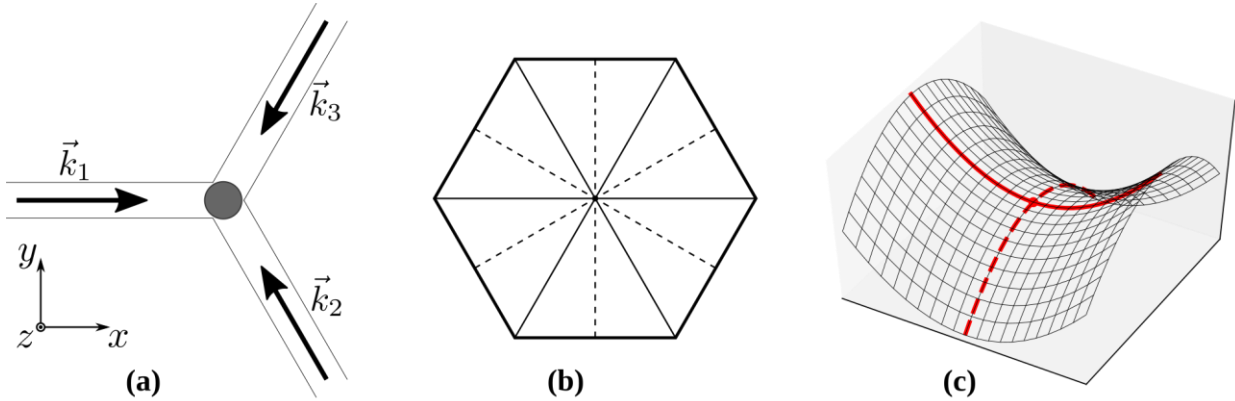


그림 2. (a) 세 빔 광 격자: 세 개의 평면파가 각각의 파수 벡터 $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ 를 가지고 교차하며, 회색 원으로 표시된 영역에서 간섭이 일어난다. (b) 정육각형의 대칭성: 실선과 점선은 두 가지 종류의 대칭축을 나타낸다. (c) 안장점: 표면 위의 한 점으로, 직교하는 두 방향 모두에서 기울기가 0 이지만, 해당 함수의 국소 극값은 아닌 점이다. 실선으로 표시된 경로를 따라 이동하면 국소 최소점처럼 보이는 지점을 지나게 되며, 이 지점이 실제 최소점인지 아닌지를 판별하기 위해서는 수직 방향(점선 방향)에 대한 추가적인 분석이 필요하다. 보여진 예시에서는 해당 지점이 안장점임을 나타낸다.

우리는 세 개의 동일한 강도를 갖는 레이저 빔이 서로 120° 각도로 교차하며 간섭하는 설정을 고려한다(그림 2a 참조). 세 빔 모두 z 방향으로 편광되고 x - y 평면에서 전파된다. x 축은 첫 번째 레이저의 파벡터 k_1 방향과 평행하도록 선택한다.

D.1 식 (2)와 (3)을 사용하여 평면 상의 위치 $r = (x, y)$ 에 대한 퍼텐셜 에너지 $V(r)$ 의 식을 유도하시오. 그 결과는 상수항과 세 개의 코사인 함수의 합의 형태로 정리할 수 있으며, 각 코사인 항의 인수는 벡터 $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{r}$ 의 형태로 표현된다. 이 벡터 $\mathbf{b}_i$ 들을 식별하고, 해당 형태로 결과를 제시하시오. 1.4pt

D.2 결과적으로 얻어진 퍼텐셜 에너지는 6 배 회전 대칭 축을 갖는다. 즉, 원점을 중심으로 60° 의 배수만큼 회전해도 퍼텐셜 분포는 불변이다. 이것이 사실임을 보여주는 간단한 논증을 제시하시오. 0.5pt

위의 대칭성 관찰은 2 차원 퍼텐셜 분포 $V(r)$ 의 해석을 단순화해준다. 그림 2b 에서 보이듯, 정육각형은 각각 꼭짓점과 변의 중점을 연결하는 두 집합의 대칭 축을 갖는다. 따라서 본 문제에서는 이차원 퍼텐셜 분포도를 별도로 생성하지 않아도 되며, x 축과 y 축(대칭선과 일치하는 방향)을 따라 퍼텐셜을 살펴보면 유용한 통찰을 얻을 수 있다.

D.3 퍼텐셜 함수들이 주기적이므로, 각 주기족에서 하나의 대표적인 극값만 포함되도록 리스트를 작성하시오. 퍼텐셜 $V(r)$ 를 x 축과 y 축을 따라 각각 $V_x(x) \equiv V(x, 0)$ 및 $V_y(y) \equiv V(0, y)$ 로 표현하고, 이 함수들의 형태를 유도하시오. 각 주기적으로 반복되는 최소값과 최대값의 위치를 식별하시오. 1.2pt

우리는 이차원 퍼텐셜 $V(r)$ 의 최소점, 즉 '격자점(lattice sites)'의 위치를 결정하고자 한다. V_X 와 V_Y 라는 단일 변수 함수의 최소값을 이용해 그 위치를 추정할 수 있지만, 이러한 극값들이 실제 최소점인지 여부는 추가적으로 검토해야 한다.

그림 2c 에 나타난 바와 같이, 단일 선을 따라 살펴본 경우 새들 포인트(saddle point)가 최소점처럼 보일 수 있으나 실제로는 그렇지 않다.

- D.4** 앞에서 얻은 결과를 바탕으로, 원점에 위치하지는 않지만 그에 가장 가까운 등가 최소점들을 모두 식별하시오. 이러한 최소점들 사이의 거리 a , 즉 광격자의 격자 상수를 레이저 파장 λ_{las} 를 사용하여 표현하시오. 0.8pt

초저온 원자는 전하 중성이므로 동일한 격자점에 여러 원자가 있을 때에만 상호작용이 중요하다. 그러나 실험자들은 장거리 상호작용을 유도하는 세팅도 구현할 수 있다. 그 한 가지 방법은 이른바 '라이드버그 원자(Rydberg atom)'를 생성하는 것이다. 이 원자는 매우 높은 주양자수 n 을 가진 들뜬 상태의 원자이며, 크기가 매우 크고 여러 물리량이 과장된 특성을 보인다. 전자의 궤도 운동량이 $n\hbar$ 일 때의 원형 궤도 반지름을 계산하여 Rb 라이드버그 원자의 크기를 추정할 수 있다.

- D.5** Rb 원자의 반지름이 레이저 빛의 파장 $\lambda_{las} = 380 \text{ nm}$ 와 비슷해지도록 하는 주양자수 n 을 계산하시오. n 을 λ_{las} 및 물리 상수들을 사용하여 표현하고, 그 수치값을 구하시오. 1.1pt