

영구 자석 (10 points)

강력한 영구 자석은 NdFeB 합금으로 만들어지며, 이 합금은 매우 넓은 히스테리시스 루프를 가지므로, 자화 J 는 다양한 상황에서 일정하다고 가정할 수 있습니다. 여기서는 $J \equiv \frac{1.5T}{\mu_0}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ 입니다. 모든 영구 자석의 자화는 균일하다고 가정합니다. 자화는 물질 내 자기 쌍극자 모멘트의 부피 밀도로 정의됩니다.

힌트 1. 다음과 같은 관계식을 사용할 수 있습니다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

힌트 2. 구형 자석이 생성하는 자기장은 점 자기쌍극자가 생성하는 자기장과 동일합니다. 다른 형태의 자석이 생성하는 자기장은 자석의 지름보다 훨씬 먼 거리에서만 점 자기쌍극자와 같은 형태로 근사할 수 있습니다.

힌트 3. 전기 및 자기 쌍극자의 전기장과 자기장은 좌표 및 쌍극자 모멘트의 함수로서 유사한 형태를 가지며, 상수 배를 곱함으로써 하나에서 다른 하나를 얻을 수 있습니다.

힌트 4. 경계 조건에 의해 유도된 장은 항상 해당 경계 바깥의 어떤 장 원천 구성으로 대체할 수 있습니다.

Part A. 자석 간 상호작용 (4.5 points)

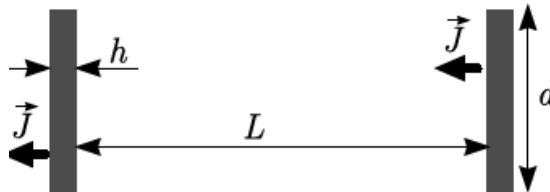
자석까지의 거리가 자석의 크기보다 충분히 클 경우, 자석이 만들어내는 자기장은 자기 쌍극자 모멘트 $\vec{m}$ 에 의해 생성되는 자기장으로 근사할 수 있습니다:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp})$$

여기서 $r = |\vec{r}|$ 이며, 이는 자기쌍극자에서 관측 지점까지 그은 반지름 벡터 $\vec{r}$ 의 크기입니다.

자기쌍극자 모멘트는 이 반지름 벡터 $\vec{r}$ 에 대해 평행 성분과 수직 성분으로 분해되며, $\vec{m} = \vec{m}_{\parallel} + \vec{m}_{\perp}$ 로 표현됩니다.

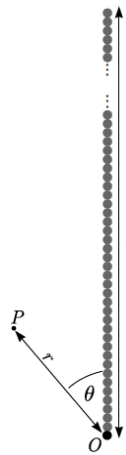
- A.1** 지름 $d=20 \text{ mm}$, 두께 $h=2 \text{ mm}$ 인 원통형 자석 두 개가 축을 따라 자화된 상태로 동축상에 배치되어 있을 때, 두 자석 중심 사이의 거리가 $L=20 \text{ cm}$ 일 경우, 두 자석 사이의 상호작용력의 크기를 구하시오. 단, $L \gg d, h$ 라고 가정할 수 있습니다.



- A.2** 문제 A.1 에서와 같은 자석이 생성하는 자기장은 자석의 크기보다 충분히 먼 거리에서 원형 전류 I 가 생성하는 자기장과 동일합니다. I 를 구하시오. 0.4pt
- A.3** 문제 A.1 에서와 같은 배치에서 $L=5 \text{ mm}$ 인 경우, 자석 사이의 상호작용력을 구하시오. 1.0pt
단, $d \gg L \gg h$ 를 가정할 수 있습니다.

A.4 직경 $\delta=5\text{ mm}$ 인 동일한 구형 자석들이 자기력에 의해 연결되어 사슬을 형성합니다. 1.0pt
이 사슬이 끊어지지 않고 매달릴 수 있는 최대 길이 l 을 구하시오. NdFeB 자석의 밀도는 $\rho=7500\text{ kg/m}^3$ 입니다.

A.5 A.4 에서의 자석 사슬을 생각하시오. 사슬의 끝점 O로부터 거리 r 에 있고, 사슬과 점 1.5pt
P를 잇는 선분 OP 사이의 각이 θ 인 점 P에서의 자기장 B의 크기에 대한 표현식을 구하시오 (아래 그림 참조). 단, $l \gg r$, 그리고 $r \sin \theta \gg \delta r$ 라고 가정합니다.



Part B. 자성체와의 상호작용 (3.5 points)

이제 우리는 영구 자석 외에도 변압기 코어 등에 사용되는 자성체로 만든 판들을 함께 고려합니다. 우리가 다룰 상황에서는 이 자성체의 상대 투자율 μ_r 이 일정하지만 매우 크며, $\mu_r \sim 10^5$ 라고 가정할 수 있습니다.

힌트 5. 큰 투자율을 갖는 물질로 만든 물체의 외부 표면 근처에서는 자기장 선들이 거의 표면에 수직으로 입사합니다. 이는 도체 표면 근처에서 전기장 선들이 나타나는 방식과 유사합니다.

B.1 A.4 에서 등장한 구형 자석이 두꺼운 무한 자성체 판으로부터 거리 $s=\delta$ 만큼 떨어져 1.0pt
있다고 가정합니다 (답안지에 제시된 그림 참조). 자석의 자화 방향은 판에 수직입니다. 해당 그림의 단면도에 자기장 선을 스케치하시오. 그림에는 세 점(1, 2, 3)이 표시되어 있으며, 이 세 점 각각을 통과하는 자기장 선들을 그림 안에 들어갈 수 있을 만큼 충분히 길게 표시해야 합니다.

- B.2** 이제 구형 자석이 자성체 판에 직접 접촉합니다. 이때 구형 자석이 안정적인 평형 상태에 있을 때의 자화 벡터 방향은 어떻게 되는지, 그리고 자석과 판 사이에 작용하는 수직 힘(정상력)은 얼마인지 구하십시오. 답안지에 제시된 상자 중 올바른 방향에 체크표시를 하시오. 틀린 방향에 체크하면 감점됩니다. 1.0pt
- B.3** 이제 A.1 에서의 자석 하나가, 지름 $D=2d$ 인 두꺼운 원형 자성체 판 두 개 사이에 배치되어 있다고 가정합니다. 자석의 평평한 면이 두 판에 맞닿아 있으며, 세 개의 원판이 모두 동축입니다. 각 판에 작용하는 자기력 F 를 구하십시오. 1.5pt
- 힌트:** 자성체 판 외부 및 두 판 사이의 틈 밖에서는 자기장을 무시해도 됩니다.

Part C. (반)강자성 질서 (2 points)

물질의 자기적 성질은 전자와 원자핵의 자기 쌍극자 모멘트로부터 비롯됩니다. 이러한 쌍극자 모멘트들이 서로 나란히 정렬되면, 그들이 만들어내는 자기장이 강화되며 — 이를 **강자성체**라고 합니다. 반면, 각 쌍극자 모멘트마다 그에 대해 반대 방향으로 정렬된 또 다른 쌍극자 모멘트가 근처에 존재하면 자기장이 서로 상쇄되며 — 이를 **반강자성체**라고 합니다.

이제 우리는 A.4 에서 등장한 구형 자석들을 매우 많이 모아, 2 차원 격자의 각 격자점에 배치된 경우를 고려합니다. 안정된 평형 상태의 실제 사진은 아래에 제시되어 있습니다. 모든 자화 벡터는 그림의 평면 내에 존재한다고 가정합니다. 계산에서는 오직 **가장 가까운 이웃 간의 상호작용**만 고려합니다 (C.1 그림에서는 각 자석이 4 개의 이웃을 가지며, C.2 그림에서는 6 개의 이웃을 가짐).

- C.1** 아래 그림에서 자석들의 자화 방향을 표시하십시오. 여러분이 제시한 배열이 유일한 가능한 구성이라는 것을 증명할 필요는 없습니다. 그러나 해당 구성이 **실제로 안정한 배열임을 정당화**해야 합니다. 격자 중앙 어딘가에 위치한 자석 하나를 격자에서 떼어내기 위해 필요한 에너지를 구하십시오. 단, 나머지 자석들은 고정된 상태로 유지된다고 가정합니다. 또한, 이 배열이 **강자성체**인지 **반강자성체**에 해당하는지를 판단하십시오. 0.8pt



C.2 아래 그림에 제시된 배열에 대해 C.1 번 문제와 동일한 질문들에 답하시오.

1.2pt



제임스 웹(James Webb) 우주망원경 (12 points)

이 문제는 제임스 웹 우주망원경의 물리학에 관한 것입니다. 별빛은 면적이 $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$ 인 주경(Primary Mirror)에 도달한 뒤, 이차경(Secondary Mirror)에 반사됩니다. 망원경 시스템의 초점 거리는 $f = 130\text{m}$ 입니다. 빛은 ISIM(통합 과학 기기 모듈, Integrated Science Instrument Module)로 초점이 맞춰지며, 이곳에는 CCD(전하 결합 소자, charged-coupled device) 카메라가 있습니다.

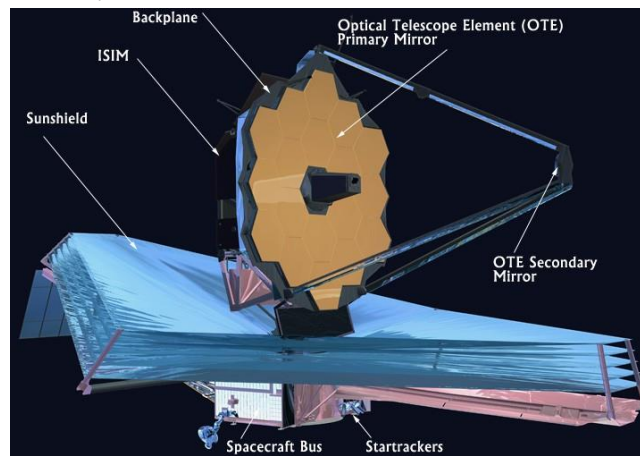


Image Credit: NASA

Part A. 별의 형상화 (1.8 points)

가장 가까운 적색거성은 **89 광년** 떨어져 있으며, 온도는 $T_{\text{star}} = 3600\text{K}$, 지름은 $d_o = 1.7 \times 10^{11}\text{m}$ 입니다.

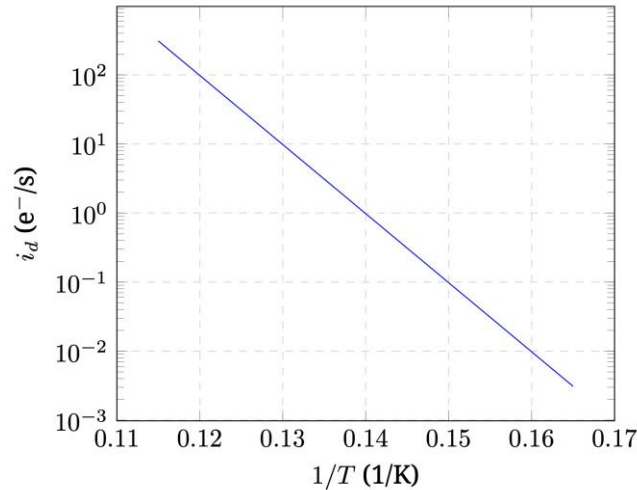
A.1	CCD 카메라 영상면에 맺히는 별상의 지름 을 계산하시오.	0.4pt
A.2	CCD 카메라 영상면에 나타나는 회절 중심 극대(Diffraction Central Maximum)의 지름을 추정하시오. 적색거성에서 가장 강한 세기를 가지는 파장은 $\lambda=800 \text{ nm}$ 라고 가정하시오.	0.4pt
A.3	CCD 가 냉각되지 않고, 영상면의 뒷면에서 복사를 통해서만 열을 방출할 수 있다고 가정할 때, 적색거성의 영상이 맺히는 위치에서 CCD의 평형 온도 는 얼마인가? CCD 표면이 흑체(Blackbody)라고 가정하고, 공식과 수치 추정 을 함께 제시하시오.	1.0pt

Part B. 광자 수 계산 (1.8 points)

CCD 카메라가 **광자 하나**를 흡수하면, 장치 내에서 전자 하나가 방출됩니다. 이는 광자가 **에너지 띠 간격 ΔE_g** 을 넘는 충분한 에너지를 가지고 있을 경우에만 발생합니다. 에너지가 충분한 광자는 모두 전자를 방출한다고 가정합니다. 그러나 CCD 카메라의 온도에 의해서도 일부 전자가 띠 간격을 넘어 **누설**될 수 있습니다. 이 전류를 **암전류(dark current) i_d** 라고 하며, 초당 전자 수로 측정됩니다. 이는 온도의 함수로 다음과 같이 주어집니다:

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/6k_B T} \quad (1)$$

여기서 i_0 는 상수입니다.



그래프는 암전류가 온도에 따라 어떻게 변하는지를 보여주며, 단위 e^-/s 는 초당 전자 수를 의미합니다.

- B.1** 암전류 그래프를 바탕으로, 픽셀 내의 전자를 들뜨게 할 수 있는 **최소한의 에너지를 갖는 광자**를 방출하는 원거리 열원(thermal source)의 온도의 대략적인 차수(범위)를 추정하십시오. 0.4pt

전자들은 축전기에 모이게 되며, 노출 시간 τ 이후 이 전자들이 계수됩니다. 이 과정에서 발생하는 주요한 불확실성은 세 가지입니다. 첫째, 계수 과정에서 발생하는 고정된 오차인 읽기 잡음(read out noise)이 있습니다. 둘째, 암전류로 인해 발생하는 푸아송 분포에 따른 오차가 있으며, 셋째는 검출된 입사 광자에 의한 푸아송 분포 오차입니다. 푸아송 분포에 따른 오차는 해당 과정에서 계수된 수의 제곱근에 해당합니다. 측정된 광자 수는 축전기에 저장된 총 전자 수에서 암전류로 인해 생성된 전자 수를 뺀 값과 같습니다.

- B.2** 읽기 잡음 σ_r , 암전류 i_d , 입사 광자율 p , 노출 시간 τ 가 주어졌을 때, 총 계수 불확실성 σ_t 에 대한 식을 쓰시오. 0.4pt

이 파트의 나머지 문제들에서는 노출 시간을 $\tau = 10^4 s$, 읽기 잡음을 고정값 $\sigma_r = 14$ 로 가정하십시오.

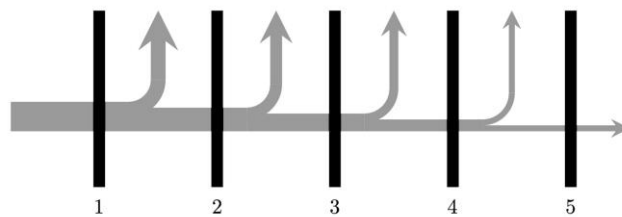
- B.3** 작동 온도를 $T_p = 7.5 K$ 로 가정하십시오. 이때 광자 수가 전체 계수 불확실성의 10 배가 되도록 하기 위해 필요한 최소한의 광자율 p 을 계산하십시오. 0.5pt

- B.4** 모든 광자가 띠 간격을 막 넘는 정도의 에너지를 가진다고 가정할 때, B.3에서 구한 광자율에 해당하는 광원 세기를 주경에서의 단위 면적당 와트(W/m^2) 단위로 나타내시오. 0.5pt

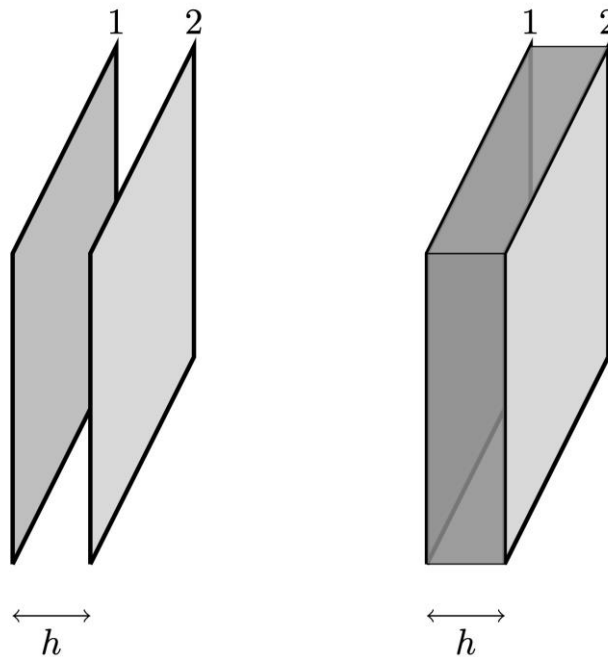
Part C. 수동 냉각 (4.4 points)

적외선 CCD 카메라는 낮은 온도로 유지되어야 합니다. 첫 번째 수단은 태양 복사로부터 보호하는 차폐막입니다.

태양 차폐막은 얇은 시트로 구성된 5 개의 분리된 반사층(검정색)으로 되어 있습니다. 태양으로부터 오는 복사 에너지(회색)는 왼쪽의 첫 번째 시트에 입사되며, 일부 에너지는 각 시트 쌍 사이를 통과하면서 우주로 방출됩니다.



에너지 흐름 개요: 수직선(검정색)은 시트를 나타내고, 에너지의 흐름(회색)은 왼쪽에서 오른쪽으로 향하지만, 시트 사이에서는 일부 에너지가 위쪽으로, 그리고 바깥쪽으로 우주 공간으로 흘러나갑니다.



왼쪽 그림은 인접한 두 시트(1 번과 2 번 시트)를 단순화한 모델로, 시트는 거리 h 만큼 떨어져 있습니다. 시트는 서로 연결되어 있지 않으며, 가장자리 둘레(perimeter)는 우주로 열려 있습니다. 시트는 서로 평행하다고 가정합니다. 시트 간에는 열복사가 이루어질 수 있고, 시트 사이 틈으로 열이 우주로 방출될 수 있습니다. 오른쪽 그림은 이러한 틈을 시각적으로 나타내기 위해 회색으로 표시했습니다

다음과 같은 단순화 가정을 적용합니다:

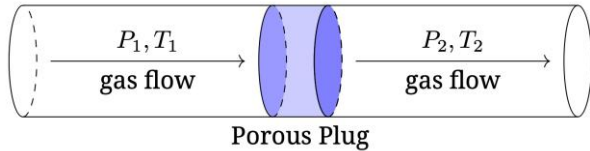
- 시트는 정사각형이며, 각 시트의 면적은 $A_{sheet} = 200m^2$ 입니다.
- 시트는 평행하며, 주변부에서 $h=25\text{ cm}$ 간격으로 떨어져 있습니다.
- 시트는 일정한 방사율 $\epsilon \ll 1$ 을 가지며, 시트 표면에서의 모든 반사는 난반사(diffuse reflection)라고 가정합니다.
- 시트는 얇고, 앞면과 뒷면의 온도는 같으며 온도 분포는 균일합니다.
- 한 시트가 방출한 복사 에너지 중 인접한 시트가 흡수하는 비율은 $\alpha \leq 1$ 입니다. 즉, 위 그림에서 시트 1 이 시트 2 방향으로 방출한 열이 Q_1 이라면, 시트 2 는 그 중 αQ_1 을 흡수합니다.
- 두 시트 사이의 순 복사 에너지 αQ_{12} 에 대해, 시트 사이의 가장자리 틈으로 우주로 방출되는 복사 에너지의 양은 βQ_{12} 로 근사합니다. 여기서 $\beta < 1$ 이며, 이는 두 시트 사이의 열 손실이 순열전달량에 비례한다는 것을 의미합니다. 본 문제에서는 이를 근사 모델로 사용합니다.
- 우주의 배경 온도는 무시할 수 있습니다.

C.1	입사 태양 복사 세기 I_{0I_0I0} , 상수 α , β , 그리고 필요한 물리 상수들을 사용하여 제 1 시트와 제 5 시트의 평형 온도 표현식을 유도하시오. 식을 단순화하기 위해 α , β 등의 상수로 정의된 보조 상수를 도입해도 좋습니다.	2.4pt
C.2	시트 기하 구조에 대한 정보를 바탕으로, 방사율 $\epsilon=0.05$ 를 가정하여 α 와 β 에 대한 수치 추정값을 유도하시오. 시트를 직사각형 상자(box) 모델로 생각하고, 가장자리 영역이 복사 에너지를 완전히 흡수하는 이상 흡수체처럼 작용한다고 가정하는 것이 좋습니다.	1.6pt
C.3	태양 복사 세기 $I_0 = 1360W/m^2$ 일 때, 제 1 시트와 제 5 시트의 온도를 수치적으로 구하시오.	0.4pt

Part D. 극저온 냉각기 (4 points)

냉각 시스템의 마지막 단계는 CCD 카메라 자체를 직접 냉각하는 장치입니다. 이 장치는 밀폐 순환식 냉동 시스템으로, 일정한 압력 P_1 에서 헬륨 가스를 공급관을 통해 다공성 플러그로 보내고, 이후 P_2 의 압력을 가진

관으로 이동시켜 CCD 를 냉각시킵니다. 냉각 후 헬륨 가스는 펌프를 지나 다시 공급관으로 되돌아갑니다.



헬륨 가스는 왼쪽에서 잘 정의된 압력 P_1 과 온도 T_1 상태로 공급되어 플러그를 통과한 뒤, 오른쪽에서 또 다른 잘 정의된 압력 P_2 와 온도 T_2 상태로 흐릅니다.

가스가 다공성 플러그를 통과할 때, 스펀지 구조의 좁은 채널 벽면과의 점성 마찰(viscous friction)이 중요한 역할을 합니다. 하지만 이 과정에서 가스와의 열 교환은 발생하지 않는다고 가정합니다.

영역 2 에서의 가스의 평균 속도는 영역 1 에서보다 약간 더 빠르지만 거의 동일하다고 봐도 무방합니다.

헬륨은 이상기체는 아니지만, 이 과정 전반에서 기체 상태를 유지한다고 가정합니다.

D.1 한 몰의 가스가 왼쪽에서 오른쪽으로 플러그를 통과할 때, 답안지의 표를 완성하십시오. 각 물리량에 대해 어떤 쪽이 더 큰지 판단하여 '>', '<', '=' 중 하나를 쓰거나, 정보가 부족해 판단할 수 없는 경우에는 '?'를 쓰시오. 1.0pt

D.2 가스 한 몰이 플러그를 통과하는 동안, 내부 에너지 U , 압력 p , 부피 V 로 구성된 보존되는 물리량을 식으로 나타내고, 이를 어떻게 유도했는지 과정도 함께 제시하십시오. 0.6pt

답안지에는 등온선과 등엔트로피선이 함께 표시된, 헬륨의 질량당 내부 에너지 대 질량당 부피 그래프가 제공되어 있습니다.

D.3 $V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$, $T_2 = 7.5 \text{ K}$ 일 때, D.2 에서 구한 보존 물리량의 수치 값을 그래프를 이용하여 구하십시오. 해당 값을 찾기 위한 그래프 상의 도식 과정도 함께 제시하십시오. 1.4pt

D.4 D.3 에서 그래프를 활용하여, 가능한 최대 T_1 값을 찾아내시오. 그래프 위에 도식 과정을 표시하십시오. 0.8pt

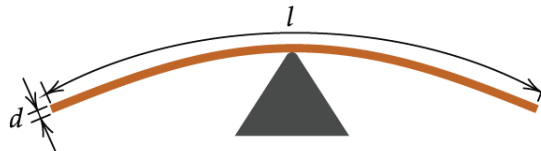
D.5 D.4 에서 구한 최대 T_1 값을 기준으로, 대응되는 P_1 값을 수치적으로 구하십시오.. 0.2pt

스케일 법칙 (8 points)

스케일 법칙은 두 물리량 사이에 존재하는 함수적 관계를 설명하며, 이 두 물리량은 일정한 구간에 걸쳐 서로 비례하여 변화합니다. 이러한 함수 관계는 종종 거듭제곱 법칙(멱법칙, power law) 형태이지만, 다른 형태일 수도 있습니다. 많은 경우에 정확한 수식을 구하기는 어렵지만, 스케일 법칙은 여전히 유도될 수 있습니다.

Part A. 스파게토(Spaghetto) (2.0 points)

- A.1 지름이 d 인 스파게토(파스타 빨대)를 수평으로 중앙에서 지지하고 있다고 가정합니다. 지름이 $d=1\text{ mm}$ 일 때, 이 빨대는 길이가 $l=50\text{ cm}$ 에 도달하면 자기 무게로 인해 부러집니다. 그렇다면, 지름이 $d'=1\text{ cm}$ 인 빨대가 자기 무게로 부러지기 전까지의 최대 길이 l' 는 얼마입니까? 2.0pt



Part B. 모래성 (2.0 points)

- B.1 거친 입자의 모래(coarse-grained sand)의 평균 입자 부피는 고운 입자의 모래(fine-grained sand)의 평균 입자 부피보다 10 배 더 큼니다. 젖은 고운 모래와 젖은 거친 모래 모두 각각 **최적의 수분 함량**을 가지고 있다고 가정하며, 이는 구조물의 강도가 최대가 되는 상태입니다. 이 두 종류의 모래를 사용해 동일한 모양과 크기의 원기둥을 각각 만든 뒤, 평행한 두 판 사이에 끼워 넣고 눌러서 강도를 측정합니다. 거친 모래로 만든 원기둥은 판에 가해지는 힘이 $F_c = 10\text{ N}$ 에 도달했을 때 파괴됩니다. 이와 동일한 조건에서, 고운 모래로 만든 원기둥이 파괴되기 위해 필요한 힘 F_f 는 얼마입니까? 중력의 영향은 무시해도 좋습니다. 2.0pt

Part C. 항성 간 여행(2.0 points)

- C.1 항성 간 탐사를 떠난 우주선은 일정한 크기의 **고유 가속도** $g = 10m/s^2$ 를 유지하면서 이동합니다. 이는 우주선이 순간적으로 정지해 있는 관성계(inertial frame)에서 측정되는 가속도입니다. 탑승자들은 자신의 남은 기대 수명인 50 년 내에 지구로 돌아올 수 있어야 하며, 이때 우주선이 지구로부터 도달할 수 있는 최대 거리 d 를 계산할 수 있습니다. 이제 가속도가 $g' = 15m/s^2$ 로 증가하면, 우주선은 더 먼 거리 d' 까지 도달할 수 있게 됩니다. 이때, 거리의 비 d'/d 는 얼마입니까?

힌트 1. 특수상대성 이론에서 상대속도 덧셈 공식을 사용할 수 있으나, 다른 접근 방식도 가능합니다.

힌트 2. 다음과 같이 정의되는 쌍곡선 함수(hyperbolic functions)를 사용할 수 있습니다:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

힌트 3. 접근 방식에 따라 다음 적분식들이 필요할 수 있습니다:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = a \tanh x + C, \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = a \sinh x + C, \int \sinh x dx = \cosh x + C$$

여기서 $\sinh x$ 와 $\tanh x$ 는 각각의 쌍곡선 함수의 역함수입니다.

Part D. 가라앉는 기분 (2.0 points)

- D.1 반지름이 r_0 인 **고체 나무 공**이 물 위에 떠 있습니다. 마찰력이 없다고 가정하면, 이 공을 수직 방향으로 살짝 움직였을 때 진동의 각진동수는 ω_0 가 됩니다. 하지만 실제로는 점성 마찰(유체 마찰) 때문에 진동은 점차 감쇠되며, 이때 측정된 감쇠 진동수는 실제로 $0.99\omega_0$ 입니다. 이 조건을 만족하는 진동이 가능한 최소한의 나무 공 반지름 r_{min} 은 얼마입니까?

힌트: 점성 저항력(마찰력)은 물체가 유체 속에서 움직일 때, 유체에 대한 속도와 유체의 점성 계수 η 에 비례합니다. 점성 계수의 단위는 $kg/(m \cdot s)$ 입니다.